Untersuchungen zur Vakuumstruktur im Minimalen Supersymmetrischen Standard Modell

Diplomarbeit

von
Tom-Alexander Langhoff

Institut für Theoretische Physik

Universität Karlsruhe (TH)

Juli 1998

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Physik der heutigen Zeit präsentiert sich als Zusammenstellung verschiedenartiger Theorien und Modelle. Jedes einzelne dieser Modelle, jede einzelne Theorie beschreibt Phänomene, Vorgänge und Wechselwirkungen bestimmter physikalischer Systeme. Jedoch sind nicht alle Theorien oder Modelle völlig verschieden oder unabhängig voneinander. Zum Beispiel ist die gewöhnliche klassische Mechanik eine Näherung der klassischen relativistischen Mechanik für Geschwindigkeiten, die sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind. Oder der Übergang des Plankschen Wirkungsquantums $\hbar \to 0$: alle rein quantenmechanischen Effekte verschwinden in diesem Grenzfall, und das beschriebene System verhält sich wie in der klassischen Mechanik.
Aus dieser Situation heraus ergibt sich ganz natürlich der Wunsch nach einer gewissen Vereinheitlichung aller bestehenden Theorien und Modelle. Als ultimatives Ziel ist die Formulierung einer einzigen Theorie anzusehen, mit deren Hilfe alle Vorgänge in unserer Welt physikalisch beschrieben werden können. Von einer solchen theory of everything (TOE) ist die heutige theoretische Physik noch sehr weit entfernt. Für physikalische Systeme mit charakteristischen Längenskalen im alltäglichen Bereich ist die klassische Mechanik unzweifelhaft die korrekte und durch unzählig viele Experimente gestützte theoretische Beschreibung, und für atomare Größenordnungen ist mit der Quantenmechanik eine gute Theorie vorhanden. Vor allem in zwei Gebieten der Physik gibt es noch große Unbestimmtheiten über die Theorie und mögliche Modelle; erstens die Kosmologie mit den Fragen nach den Bausteinen der dunklen Materie, dem Rätsel der Teilchen-Antiteilchen-Asymmetrie und den ganz allgemeinen Fragen nach dem Ursprung und der Zukunft unseres Weltalls, und zweitens die Elementarteilchenphysik, die noch keine konsistente quantentheoretische Beschreibung der Gravitation hervorbringen konnte und nur wenig Anhaltspunkte liefert, wie eine Theorie der Wechselwirkungen der (und welcher ?) Elementarteilchen bei sehr großen Energien aussehen könnte.

In der Elementarteilchenphysik gibt es schon viele erfolgreiche Ansätze, die Vielzahl der Modelle und Theorien zu reduzieren. Sie alle basieren auf der Tatsache, daß heutzutage vier fundamentale Wechselwirkungen zwischen den als elementar angesehenen und bezeichneten Bausteinen der Materie bekannt sind: es sind dies die elektromagnetische Wechselwirkung, die schwache und starke Wechselwirkung und die von allen schon am längsten bekannte Gravitation. Gelänge im Rahmen einer sogenannten Großen Vereinigungstheorie (Grand Unifying Theory oder GUT) die simultane Beschreibung der vier fundamentalen Wechselwirkungen, so wäre ein entscheidender Schritt auf dem Weg zu einer TOE getan.
Ein Meilenstein auf dem Weg zu einer GUT war die Aufstellung des Glashow-Salam-Weinberg-Modells [1], welches die Vereinigung der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung zu einer sogenannten elektroschwachen Wechselwirkung beschreibt und eine lokale $SU(2) \times U(1)$ Eichgruppe postuliert. Durch Erweiterung dieses Modells unter Einbeziehung der starken Wechselwirkung erhielt man das Standard Modell der Teilchenphysik (SM), eine lokale Quantenfeldtheorie mit lokaler ungebrochener Eichgruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Um aber die in der Natur auftretenden massiven Vektorbosonen $W^{\pm}_{\mu}$ und Z_{μ} der elektro-schwachen Wechselwirkung korrekt und konsistent beschreiben zu können, die Indiz für eine spontane Brechung der $SU(2) \times U(1)$ -Eichsymmetrie sind, fügte man im SM einen sogenannten Higgs-Sektor hinzu. Dieser enthält einzig ein skalares ungeladenes Higgs-Boson, welchem man einen Vakuumerwartungs-

wert (VEW) zuweist, der Ursache der spontanen Symmetriebrechung und der Massen der Vektorbosonen und Fermionen ist. Das SM einschließlich des Higgs-Sektors bildet das bis heute wohl am besten bestätigte physikalische Modell. Kein Experiment steht in so deutlichem Gegensatz zu den Vorhersagen des SM, daß ernsthaft an dessen Richtigkeit gezweifelt werden müßte. Einschränkend sollten neue experimentelle Ergebnisse zitiert werden [2], denen zufolge die im Standard Modell als masselos angenommenen Neutrinos mit großer Wahrscheinlichkeit doch eine endliche Ruhemasse besitzen.

Trotz dieser unglaublichen Übereinstimmung von Theorie und Experimenten im Fall des SM über einen sehr großen Energiebereich ist sicher, daß das SM nicht der letzte Schritt auf dem Weg zu einer Vereinigung der vier fundamentalen Wechselwirkungen ist und war. Wichtige theoretische Argumente legen diesen Schluß nahe.
Im Rahmen einer lokalen Quantenfeldtheorie zum Beispiel ist eine konsistente Beschreibung der gravitativen Wechselwirkung nicht möglich. Folglich benötigen wir für die angestrebte GUT einen anderen Formalismus.
Des weiteren steht das ungelöste Hierarchie-Problem im Raum, die Frage, warum die Energieskala, bei der die elektro-schwache Symmetrie spontan gebrochen wird, so klein gegenüber der Planckenergie ist, bei der spätestens die Gravitation ins Spiel kommt.
Im übrigen trennt das SM zwei Arten der Elementarteilchen streng voneinander: Bosonen und Fermionen. Erstere sind die Vermittler der verschiedenen Wechselwirkungen, letztere die Bausteine aller Materie. Eine Große Vereinigungstheorie sollte eine Antwort liefern, worauf sich diese Aufgabenteilung gründet und ob die Trennung auch immer so streng eingehalten wird.
Schließlich kann man ganz pragmatisch argumentieren, daß das SM einschließlich des Higgs-Sektors mit 18 freien, durch die Theorie vollkommen unbestimmten Parametern für eine grundlegende Theorie der Wechselwirkungen der Elementarteilchen unakzeptabel viele nicht bestimmte Größen enthält.

Was das ungelöste Hierarchie-Problem und die strenge Aufteilung in Bosonen und Fermionen anbelangt, wurde durch intensive Forschung entdeckt, daß durch die Postulierung einer sogenannten Supersymmetrie [3, 4], die Bosonen und Fermionen miteinander in Beziehung bringt, hier Abhilfe geschaffen werden kann. Die Generatoren der Supersymmetrie haben fermionischen Charakter und liefern, auf einen bosonischen Zustand angewandt, einen fermionischen und umgekehrt. Konkret für Ein-Teilchen-Zustände bedeutet dies, daß es zu jedem Teilchen einen Superpartner gibt, der für fermionische Teilchen ein Boson und für Bosonen ein Fermion ist, aber darüberhinaus die gleichen inneren Eigenschaften bezüglich der anderen Symmetriegruppen besitzt. Die beiden Superpartner treten in einer supersymmetrischen Theorie immer gemeinsam auf; sie werden in einem sogenannten Superfeld, einer supersymmetrischen Verallgemeinerung des herkömmlichen Feldbegriffs, vereinigt und gemeinsam beschrieben. Damit ist diese Supersymmetrie eine Symmetrie grundlegend anderer Art als die vorher schon bekannten inneren Symmetrien physikalischer Systeme, die den Spin eines Zustandes stets unverändert lassen und so die klare Trennungslinie zwischen Bosonen und Fermionen nur bekräftigen.
Das Hierarchie-Problem wird durch die Supersymmetrie ebenfalls gelöst, denn viele quadratische Divergenzen, die im SM auftauchen, verschwinden, falls eine Supersymmetrie postuliert wird: zum Beispiel erhalten die Skalarmassen (die Higgs-Masse konkret) keine quadratischen Divergenzen im UV-cut-off (der in der Größenordnung der Planckmasse liegt), sondern schlechtestenfalls nur noch logarithmisch divergente Beiträge im UV-cut-off. Der Grund liegt darin, daß sich Beiträge von Fermion-Schleifen und Boson-Schleifen genau kompensieren, was nur aufgrund der Supersymmetrie der Fall ist.
Sogenannte supersymmetrische Erweiterungen des Standard Modells der Teilchenphysik setzen das SM zu höheren Energien hin fort. Erweiterungen dieser Art gibt es jedoch viele, und es ist heute noch nicht eindeutig geklärt, wie diese Erweiterung auszusehen hat. Unter allen diesen ausgezeichnet ist das Minimale Supersymmetrische Standard Modell (MSSM) [5], welches eine supersymmetrische Erweiterung des SM mit minimal nötiger Teilchenanzahl darstellt. Supersymmetrische Modelle haben den weiteren Vorteil, daß die von der Energie abhängigen, laufenden Eichsymmetrie-Kopplungskonstanten sich bei hohen Energien in genau einem Punkt treffen und so eine Vereinigung der Kopplungskonstanten mittels Supersymmetrie möglich ist. In einem Modell ohne Supersymmetrie ist diese Eigenschaft der laufenden Kopplungen nicht gegeben [6].
Eine ungebrochene Supersymmetrie postuliert mit Ausnahme des Spins gleiche innere Eigenschaften der

Superpartner, speziell die Gleichheit der Massen, welches den experimentellen Beobachtungen widerspricht, denn man hat noch keinen Superpartner zu einem SM-Teilchen mit entsprechender Masse gefunden [7, 8]. Dies interpretiert man in der Weise, daß deren Massen noch zu groß sind, als daß sie an Beschleunigern der heutigen Generation entdeckt werden könnten. Damit muß die Supersymmetrie aber gebrochen sein. Der Mechanismus der Supersymmetrie-Brechung ist heutzutage noch nicht verstanden. Eine spontane Brechung der Supersymmetrie scheidet aus phänomenologischer Sicht aus, da solche Theorien großen Einschränkungen unterworfen sind [9, 10, 11]. Es wird eine sogenannte sanfte Brechung der Supersymmetrie angestrebt, bei der die Supersymmetrie durch Addition spezieller Terme zur Lagrange-Dichte des Modells explizit gebrochen wird; man wählt aber nur solche Terme aus, die das Verschwinden der quadratischen Divergenzen nicht beeinträchtigen. Diese Terme der Lagrange-Dichte bezeichnet man als die Supersymmetrie sanft brechende Terme. Der genaue physikalische Ursprung dieser speziellen sanften Brechungsterme ist aber noch unbekannt. In Supergravitationstheorien mit lokaler Supersymmetrie können die sanften Brechungsterme durch eine spontane Brechung der lokalen Supersymmetrie entstehen [12].

Ein anderer Formalismus, mit dessen Hilfe sich alle vier fundamentalen Wechselwirkungen beschreiben lassen, könnte die String-Theorie sein, bei der anstelle punktförmiger Elementarteilchen und deren eindimensionalen Weltlinien nun eindimensionale Objekte (die Strings) und deren zweidimensionalen Weltflächen (worldsheets) betrachtet werden. Bestimmte Schwingungsanregungen des eindimensionalen Strings werden als Teilchenzustände entsprechender Energie interpretiert. Unter den möglichen Anregungen eines Strings ist auch eine masselose Spin 2 Anregung, die sich als Graviton deuten läßt. Damit ist in einer String-Theorie die Gravitation mitenthalten. Innerhalb dieses Formalismus bereiten darüberhinaus die UV-Divergenzen weniger Schwierigkeiten als in einer Quantenfeldtheorie, bei der von punktförmigen Teilchen ausgegangen wird.
Es ist bemerkenswert, daß die oben angesprochene Supersymmetrie in String-Theorien in ganz natürlicher Weise Einlaß findet und zusätzlich auch unverzichtbar bei einer konsistenten Formulierung einer String-Theorie ist, wohingegen im Rahmen der Quantenfeldtheorien die Supersymmetrie ad hoc postuliert und durch ihre Auswirkungen nachträglich gerechtfertigt wird. String-Theorien lassen sich nicht in beliebigen Raumdimensionen formulieren (eine konsistente bosonische String-Theorie gibt es nur in $d = 26$ Dimensionen), und aus dem Spektrum der angeregten Zustände eines Strings ergeben sich Einschränkungen. Ohne die Forderung einer Invarianz unter Supersymmetrie-Transformationen erhielte man Zustände negativer Energie, sogenannte tachyons. Um also eine in sich konsistente String-Theorie zu erhalten, bekommt man die Supersymmetrie und $d = 10$ Raumdimensionen automatisch mitgeliefert, weshalb man von Superstring-Theorien [13, 14] spricht.
Gerade durch die String-Theorien wird deutlich, daß die Supersymmetrie nicht irgendeine Symmetrie ist, um welche man das SM erweitern kann, sondern daß ihr grundlegende Bedeutung in Theorien bei höheren Energien zukommt.

In dieser Arbeit steht mit dem MSSM eine ganz spezielle Erweiterung des Standard Modells der Teilchenphysik im Mittelpunkt. Weil die Superpartner aller Fermionen des SM skalare Teilchen sind, tauchen im MSSM ganz natürlich viele skalare Felder auf. Und weil die skalaren Felder die gleichen Eigenschaften bezüglich der inneren Symmetrien besitzten wie die SM-Fermionen, tragen fast alle Skalare im MSSM elektrische Ladung ungleich Null sowie unter Umständen auch Farbladung. Alle Terme in der Lagrange-Dichte des MSSM, welche nur skalare Felder ohne Ableitungen enthalten, werden zum Potential V_0 zusammengefaßt. In der englischsprachigen Literatur vor allem hält sich hartnäckig die Tautologie eines „scalar potential“[15, 16]. Wir werden uns diesem Brauch nicht anschließen, sondern immer nur von dem Potential im MSSM sprechen. Im MSSM taucht das sogenannte Superpotential W auf, eine analytische Funktion in den Superfeldern, die alle eichinvarianten Kopplungen der Superfelder des MSSM enthält. Aus Gründen der Renormierbarkeit treten nur Produkte von höchstens drei Superfeldern auf. Dieses Superpotential hat mit einem Potential sehr wenig gemeinsam (bis auf eine ähnliche Bezeichnung), aber solange wir stets genau zwischen Superpotential W und Potential V_0 unterscheiden, sollte es keine Mißverständnisse geben.

Das Potential V_0 des MSSM besteht aus drei Beiträgen: den sogenannten F-Termen, die sich aus den super-kinetischen Termen der chiralen Superfelder ergeben und für die das Superpotential wichtig ist, den D-Termen, die aus den minimalen Kopplungstermen der Vektorsuperfelder folgen und von denen es für jede

Eichgruppe Terme gibt, und Beiträgen der sanften Brechungsterme, deren Struktur sich an der Gestalt des Superpotentials orientiert. Durch die Beiträge der die Supersymmetrie sanft brechenden Terme kommt eine große Zahl an freien Parametern in das Potential V_0 hinein: die sanft brechenden Massenterme für alle Skalarfelder, der Parameter des bilinearen Terms und die Parameter für die trilinearen Terme. Später aufzustellende Bedingungen an das Potential werden dann Bedingungen für diese Parameter bilden.
Alles bisher Gesagte betrifft das Potential in niedrigster, nullter Ordnung. In höheren Ordnungen der Störungstheorie treten weitere Beiträge zum Potential auf, deren Struktur noch komplizierter ist als die des Potentials auf tree-level selbst. In der vorliegenden Diplomarbeit soll das Potential nur in niedrigster Ordnung untersucht werden.

Das Potential eines jeden physikalischen Modells legt durch sein globales Minimum den Zustand tiefster Energie fest, den Vakuumzustand. Das Potential muß also zumindest nach unten beschränkt sein, denn andernfalls wäre das Modell nicht konsistent und müßte verworfen werden. Diese Forderung der Beschränktheit nach unten wird sogenannte *bnu-Bedingungen* (beschränkt nach unten Bedingungen) an die Parameter des Potentials und des Modells zur Folge haben. Diese werden wir herleiten und angeben. Solche Bedingungen laufen in der englischsprachigen Literatur unter dem Namen ufb-Bedingungen (unbounded from below) [15, 17].
Im Fall exakter Supersymmetrie wäre das Potential, welches in Abwesenheit der die Supersymmetrie sanft brechenden Termen nur aus Beiträgen der F- und D-Terme bestünde, positiv definit und lieferte als globales Minimum den Vakuumzustand mit Energie Null und verschwindenden VEWen für alle skalaren Superfeldkomponenten [18]. Weil aber im MSSM durch die sanft brechenden Terme die Supersymmetrie nicht mehr erhalten ist, haben wir zusätzliche Beiträge zum Potential, die V_0 insgesamt negativ werden lassen können. Damit erhalten wir möglicherweise globale Minima mit negativer Energie, an denen verschiedene skalare Felder VEWe ungleich Null besitzen können. Nichtverschwindende VEWe skalarer Felder, die elektrische Ladung bzw. Farbladung ungleich Null tragen, führen zu einer Nichterhaltung der elektrischen Ladung bzw. der Farbladung und damit zu einer Brechung der zugehörigen Symmetrie, also der $U(1)_{\text{em}}$ bzw. der $SU(3)$. Solches ist aus phänomenologischen Gründen nicht erwünscht. Es gilt in jedem Fall, die VEWe der einzelnen skalaren Felder im globalen Minimum des Potentials V_0 zu bestimmen. Ein konservativer Lösungsansatz ist, durch zusätzliche Bedingungen solche Minima des Potentials V_0 einfach nicht zuzulassen, die eine derartige Verletzung einer bisher als erhalten gewünschten Symmetrie bewirken. In der englischsprachigen Literatur nennt man diese zusätzlichen Bedingungen ccb-Bedingungen (charge and/or color breaking) [15, 16].
Eine besondere Bedeutung kommt den skalaren Higgs-Feldern zu: wie im SM bewirkt auch im MSSM ein VEW ungleich Null eines neutralen skalaren Higgs-Feldes aufgrund der supersymmetrischen Verallgemeinerung der Yukawa-Kopplungen im Superpotential W, daß die Fermionen in einer geeigneten Eichung Massen erhalten, die wegen der Eichinvarianz explizit verboten sind und so durch die spontane Brechung einer Eichsymmetrie entstehen. Im MSSM müssen, um auf diese Weise Massen für die Leptonen und die up- und down-Quarks zu generieren, die ungeladenen Higgs-Komponenten beider Higgs-Superfelder VEWe ungleich Null im globalen Minimum des Potentials annehmen. Dies stellt eine weitere Forderungen an die Konfiguration der VEWe der skalaren Felder im MSSM dar, für die das Potential V_0 minimiert wird, wenn wir annehmen, daß die Fermionmassen wirklich durch Kopplungen an die ungeladenen Higgs-Skalare entstehen.

Die komplizierte Struktur und Gestalt des Potentials des MSSM mit Beiträgen aller Skalarfelder ist in erster Linie als Ursache dafür zu nennen, daß es erst wenige Untersuchungen der Minimumstruktur des Potentials gibt. Die ersten, die Untersuchungen in dieser Richtung durchführten, waren Jones et al. [19]. Sie betrachteten ein Potential aus Beiträgen dreier Superfelder, die einen trilinearen Kopplungsterm bilden. Aus der Annahme gleicher VEWe für die skalaren Felder konnten sie erste Einschränkungen an den Koeffizienten des trilinearen Terms angeben. Die Herkunft dieser Bedingung ist die Forderung, daß eine solche VEW-Konstellation nicht den Vakuumzustand des Modells liefern darf, weil nicht nur die elektroschwache, sondern auch weitere Symmetrien spontan gebrochen würden. Die Einschränkung an den Parameter garantiert einen positiven Wert des Potentials an diesem Punkt, so daß dieser nicht das globale Minimum des Potentials darstellen kann. Zu beachten ist, daß eine Übertragung dieser so gefundenen Einschränkungen auf den Fall des MSSM hinreichend unmotiviert ist, weil das Potential im MSSM Beiträge vieler skalarer

Komponenten enthält und insbesondere nicht nur eine, sondern mehrere trilineare Kopplungen umfaßt.
Es wurden ebenso bestimmte VEW-Konstellationen für skalare Felder im MSSM gewählt und hieraus ufb-Bedingungen gefolgert [17]. In diesem Sinne sind Betrachtungen zu nennen, die sogenannte equal-field-directions, also gleiche VEWe für verschiedene Skalarfelder, als vereinfachtes Problem untersuchen, um die Anzahl der unabhängigen VEWe im Potential klein zu halten [20].
Ein weit verbreitetes Verfahren, um ccb-Bedingungen zu finden, ist, nichtverschwindende VEWe für einzelne Skalar- und Higgs-Felder anzusetzen und diese auf einen dieser VEWe zu normieren. Die Verhältnisse werden zunächst konstant gewählt, so daß man durch Einsetzen dieser VEW-Konstellationen in das Potential eine einfache Funktion einer Veränderlichen erhält. Deren Minimum wird bestimmt, und es wird gefordert, daß das Potential an diesem Minimum einen positiven Wert annimmt (damit dieser Punkt nicht das globale Minimum des Potentials liefert). Diese Bedingungen in Form oberer Schranken an Parameter des Modells (vor allem trilineare Parameter) enthalten die als konstant angenommenen Verhältnisse der VEWe. Man minimiert diese oberen Schranken in Abhängigkeit der Werte der Verhältnisse und gibt eine optimale ccb-Bedingung als Resultat an [16]. Was aber anstelle dessen exakterweise getan werden muß, ist keine Reduktion der Veränderlichen im Potential durch Einführen neuer Beziehungen zwischen ihnen (die als konstant angenommenen Verhältnisse), sondern vielmehr eine Minimierung des Potentials in seiner reinen Form bezüglich aller unabhängigen, auftretenden Felder.
Casas, Lleyda und Muñoz veröffentlichten eine umfangreiche Arbeit [15], in der sie die Skalenabhängigkeiten der Parameter des MSSM in Betracht zogen und sogar Ein-Schleifen-Beiträge zum Potential mit berücksichtigten. Aber auch sie haben nicht konsistent eine Minimierung des Potentials des MSSM unter Einbeziehung aller Higgs-, Slepton- und Squark-Felder vorgenommen. Deshalb ist die Frage nach der Aussagekraft der gefundenen Bedingungen und Einschränkungen des Parameterbereiches des MSSM noch offen.
Es sind Überlegungen entstanden [21, 22], welchen zufolge nicht allein das globale Minimum als Vakuumzustand in Frage kommt, sondern ebenso die lokalen Minima des Potentials Vakuumzustände liefern können. Diese Vakua sind aber nur metastabil. Befindet sich das Universum in einem lokalen Minimum des Potentials und ist die Lebensdauer dieses metastabilen Zustandes im Einklang mit experimentellen Grenzen (für das Alter des Universums zum Beispiel), so ist dies genauso möglich und nicht unterscheidbar von der Situation eines Vakuums im globalen Minimum des Potentials. Solche Überlegungen sind zumeist kosmologischer Natur und sollen in dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden.

In der vorliegenden Diplomarbeit versuchen wir, die Minimumstruktur des Potentials im MSSM mit analytischen Methoden zu untersuchen. Insbesondere werden wir die Minimierung des Potentials mathematisch korrekt durchführen und alle auftretenden Felder als unabhängig ansehen. Dies führt schnell zu länglichen Ausdrücken, die nur schwer zu handhaben sind. In manchen Fällen (der Beschränkung auf eine Teilchengeneration und Verwendung der Symmetrien des Potentials) erhalten wir dennoch einfache Bedingungen für Parameter des Potentials. Wir werden das Potential einmal im Higgs-Sektor des MSSM, für Higgs- und Slepton-Felder (nur eine Sleptonengeneration) und schließlich unter Berücksichtigung aller skalarer Felder einer Teilchengeneration im MSSM betrachten und in jedem dieser Fälle getrennt Bedingungen für die Parameter herleiten.

Die Gliederung dieser Diplomarbeit ist wie folgt: im Anschluß an diese Einleitung und Motivation für die anstehenden Untersuchungen wird zunächst das Standard Modell kurz beschrieben. Die klassische Lagrange-Dichte wird angegeben und speziell der Higgs-Sektor mit Potential und dessen Minimum vorgestellt.
Im nächsten Kapitel beschäftigen wir uns mit Supersymmetrie: den Motivationen, der Supersymmetrie-Algebra sowie Darstellungen dieser Algebra mittels Superfeldern auf einem Superraum im Fall einfacher $N = 1$ Supersymmetrie. Beispiele supersymmetrischer Wirkungen werden angegeben, die später für das MSSM wichtig sind, wobei auch auf die Brechung der Supersymmetrie eingegangen wird.
In Kapitel 4 wird das MSSM mit seinen Superfeldern und dem Superpotential behandelt. Es werden die einzelnen Beiträge zur klassischen Wirkung und Lagrange-Dichte des MSSM aufgelistet. Die Eliminierung der Hilfsfelder wird beschrieben, und die Form der Beiträge der D-Terme, F-Terme und der sanft brechenden Terme zum Potential wird hergeleitet.
Das Potential steht im Mittelpunkt der Untersuchungen in den folgenden Abschnitten. Zunächst wird

das Potential nur für den vereinfachten Fall betrachtet, daß einzig die niedrigsten skalaren Komponenten der Higgs-Superfelder Vakuumerwartungswerte ungleich Null annehmen. Es wird diskutiert, unter welchen Bedingungen an die Parameter des Potentials keine Richtungen im Feldraum – dem Definitionsbereich des Potentials – existieren, entlang denen das Potential nach unten unbeschränkt ist oder für beliebig große VEWe der Felder beschränkt bleibt. Zur Suche nach dem globalen Minimum werden die stationären Gleichungen angegeben sowie deren verschiedene Lösungen studiert. In einem geeigneten Bereich des Parameterraumes ist das globale Minimum des Potentials durch verschwindende VEWe der geladenen skalaren Higgs-Komponenten gegeben und VEWe echt größer Null für die ungeladenen Komponenten. Einschließlich der hierfür notwendigen Bedingungen entspricht dies dem Vakuum im Higgs-Sektor des MSSM (im folgenden immer als *Standard-Vakuum* bezeichnet), bei dem nur die beiden ungeladenen Higgs-Skalare VEWe ungleich Null besitzen und keine weiteren skalaren Felder.
Analog ist das Vorgehen bei der Untersuchung des Potentials bei Mitberücksichtigung des Lepton-Slepton-Superfeldes in Kapitel 6 im Fall einer Leptonen-Generation: die konkrete Form des Potentials wird angegeben und mögliche Richtungen, entlang denen das Potential nach unten beschränkt sein könnte, werden diskutiert und die sich daraus ergebenden bnu-Bedingungen hergeleitet. Die verschiedenen stationären Punkte einschließlich der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für lokale Minima werden analysiert. Es erfolgt noch eine Diskussion der verschiedenen möglichen Konstellationen in den unterschiedlichen Bereichen des Parameterraums. Hier entstehen zusätzliche Bedingungen an die Parameter des Modells, damit das Standard-Vakuum wirklich das globale Minimum des Potentials des MSSM ist.
Zum Abschluß werden in Kapitel 7 noch die Squark-Felder des MSSM mit einbezogen. Das vollständige Potential wird mit seinen drei verschiedenen Beiträgen angegeben. Eine Untersuchung der bnu-Bedingungen erfolgt allerdings aus Gründen der Einfachheit nur im Spezialfall einer Teilchengeneration. Selbst in diesem vereinfachten Fall gestaltet sich eine Untersuchung der stationären Punkte und die Suche nach lokalen Minima bei einem 24 dimensionalen Feldraum als extrem schwierig. Aus phänomenologischen Gründen will man weitere spontane Symmetriebrechungen außer der der elektroschwachen Symmetrie vermeiden, so daß nur solche Minima interessant sind, bei denen neben den zwei ungeladenen Higgs-Bosonen die Slepton-Felder nichtverschwindende VEWe annehmen, da alle anderen skalaren Felder elektromagnetische Ladung ungleich Null und im Fall der Squarks zusätzlich noch Farbladungen tragen. Deshalb geben wir notwendige Bedingungen an die Parameter des Modells an, damit das Minimum des reinen Higgs-Sektors, das Standard-Vakuum, auch in diesem erweiterten Feldraum ein lokales Minimum sein kann. Diese sind allerdings nur notwendige Bedingungen dafür, daß das Standard-Vakuum auch das globale Minimum des Potentials liefert.
Im Anhang A sind alle verwendeten ersten und zweiten partiellen Ableitungen des Potentials sowohl nur für Higgs-Felder als auch für Higgs- und Slepton-Felder und Higgs-Felder, Sleptonen und Squarks aufgelistet, die in den entsprechenden Kapiteln benötigt und benutzt werden.
Das allgemeine Vorgehen bei der Suche nach stationären Punkten und lokalen Minima in den verschiedenen Bereichen des Feldraumes und nach lokalen Minima im gesamten Feldraum ist in Anhang B beschrieben und erläutert. Dort wird argumentiert, welche Randuntermengen entfallen, weil stationäre Punkte auf ihnen keine lokalen Minima im gesamten Feldraum des jeweiligen Potentials darstellen. Anhand spezieller Terme im Potential werden solche Randuntermengen identifiziert. Im Anhang B wird keine spezielle Form des Potentials zugrunde gelegt; vielmehr lassen sich die allgemeinen Aussagen auf die verschiedenen Fälle der Potentiale in den vorherigen Kapiteln direkt übertragen.
Anhang C enthält die verwendeten Konventionen und Supersymmetrie-Formeln.

Kapitel 2

Das Standard Modell

2.1 Konstruktion und Teilcheninhalt des Standard Modells

Das Standard Modell (SM) ist eine Poincaré- und eichinvariante, relativistische, lokale und effektive Quantenfeldtheorie, die die starke, schwache und elektromagnetische Wechselwirkung innerhalb eines bestimmten Energiebereiches beschreibt.
Grundlegendes Prinzip bei der Aufstellung des SM ist das Prinzip der lokalen Eichinvarianz. Für das SM ist

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

die Eichgruppe, wobei $SU(3)$ die Eichgruppe der starken Wechselwirkung ist und $SU(2) \times U(1)$ die schwache und elektromagnetische Wechselwirkungen beschreiben. Die Eigenwerte der Felder unter der $SU(2)$ werden als deren schwacher Isospin, diejenigen unter der $U(1)$ als Hyperladung der Felder bezeichnet. Die im SM explizit als rechts- und linkshändige Spinoren auftretenden Fermionen kommen in drei sogenannten Teilchengenerationen vor und sind mit ihrem Transformationsverhalten unter Eichtransformationen in Tabelle 1 gegeben. Die rechtshändigen Spinoren transformieren trivial unter der $SU(2)$, wohingegen die linkshändigen Spinoren Dubletts unter der $SU(2)$ bilden. Die jeder Eichgruppe zugeordneten Eichbosonen sind in der adjungierten Darstellung der jeweiligen Eichgruppe gewählt und in Tabelle 2 aufgelistet.

Fermionen	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$
$l_i = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}_i$	1	$\frac{1}{2}$	-1
e_i	1	1	2
$q_{iA} = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}_{iA}$	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
u_{iA}	3	1	$-\frac{4}{3}$
d_{iA}	3	1	$\frac{2}{3}$

Tabelle 1: Die Fermionen des Standard Modells. Der Index $i = 1, 2, 3$ ist ein Generationenindex und $A = 1, \ldots, 8$ ist ein Index der $SU(3)$.

Bosonen	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$
G^a_μ	$\frac{\lambda^a}{2}$	1	1
W^b_μ	1	$\frac{\sigma^b}{2}$	1
C_μ	1	1	$\frac{1}{2}$

Tabelle 2: Die Eichbosonen des Standard Modells mit $a = 1, \ldots, 8$ und $b = 1, 2, 3$.

Die unter Eichtransformationen invariante klassische Lagrange-Dichte des SM enthält einzig kinetische Terme für die Eichbosonen und die Fermionen, letztere gegeben durch die kovariante Ableitung, um die minimale Kopplung an die Eichfelder zu gewährleisten:

$$\bar{f}\, i\gamma^\mu\, D_\mu\, f \qquad \text{mit } f \in \{q_{iA}, l_i, e_i, u_{iA}, d_{iA}\} \ .$$

Die kovarianten Ableitungen D_μ der Fermionen sind durch deren Transformationsverhalten unter Eichtransformationen eindeutig festgelegt:

$$\begin{aligned}
D_\mu\, q_{iA} &= \left(\partial_\mu + ig_3\, \frac{1}{2}\, (\lambda^a)_A{}^B\, G^a_\mu + ig_2\, \frac{\sigma^b}{2}\, W^b_\mu + ig_1\, \frac{1}{6}\, C_\mu\right) q_{iB}\ , \\
D_\mu\, l_i &= \left(\partial_\mu + ig_2\, \frac{\sigma^b}{2}\, W^b_\mu - ig_1\, \frac{1}{2}\, C_\mu\right) l_i\ , \\
D_\mu\, e_i &= (\partial_\mu + ig_1\, C_\mu)\, e_i\ , \\
D_\mu\, u_{iA} &= \left(\partial_\mu + ig_3\, \frac{1}{2}\, (\lambda^a)_A{}^B\, G^a_\mu - ig_1\, \frac{2}{3}\, C_\mu\right) u_{iB}\ , \\
D_\mu\, d_{iA} &= \left(\partial_\mu + ig_3\, \frac{1}{2}\, (\lambda^a)_A{}^B\, G^a\mu + ig_1\, \frac{1}{3}\, C_\mu\right) d_{iB}\ .
\end{aligned}$$

Explizite Massenterme für Bosonen und Fermionen sind aufgrund der Symmetrie nicht erlaubt. Folglich sind alle durch das SM beschriebenen Teilchen zunächst masselos. Die kinetischen Terme der Bosonen sind aus den Feldstärketensoren in der kanonischen Weise aufgebaut; letztere sind

$$\begin{aligned}
G^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + g_3 f_{abc} G^b_\mu G^c_\nu \qquad \forall\, a = 1, \ldots, 8\,, \\
W^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g_2 \epsilon_{abc} W^b_\mu W^c_\nu \qquad \forall\, a = 1, 2, 3\,, \\
C_{\mu\nu} &= \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu\,.
\end{aligned}$$

Hierin sind f_{abc} die Strukturkonstanten der Lie-Algebra $su(3)$,

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right] = \sum_{c=1}^{8} i f_{abc} \frac{\lambda^c}{2},$$

und ϵ_{abc} der total antisymmetrische Tensor dritter Stufe, gleichzeitig auch die Strukturkonstante der Lie-Algebra $su(2)$.

Zusammen ergibt sich die klassische Lagrange-Dichte für die Fermionen und Vektorbosonen des SM in der Form

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{F+VB,klass} &= -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G^a_{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_b^{\mu\nu} W^b_{\mu\nu} - \frac{1}{4} C^{\mu\nu} C_{\mu\nu} \\ &\quad + \bar{l}_i i\gamma^\mu D_\mu l_i + \bar{e}_i i\gamma^\mu D_\mu e_i + \bar{q}_i^A i\gamma^\mu D_\mu q_{iA} + \bar{u}_i^A i\gamma^\mu D_\mu u_{iA} + \bar{d}_i^A i\gamma^\mu D_\mu d_{iA} \,.\end{aligned}$$

Die kinetischen Terme der Bosonen enthalten auch die Selbst-Wechselwirkungen der Eichbosonen der nicht-abelschen Eichgruppen. In den minimalen Kopplungstermen der Fermionen an die Eichfelder sind die Kopplungen der Fermionen an schwache und elektromagnetische Ströme zusammengefaßt.
Von den in der Natur vorkommenden elementaren Teilchen sind nur das linkshändige Neutrino als Fermion und das Photon und die Gluonen als Eichbosonen masselos[1]. Alle anderen Teilchen besitzen eine nichtverschwindende Ruhemasse. Das bedeutet, daß in der Natur die $SU(2) \times U(1)$-Symmetrie nicht exakt erfüllt, sondern spontan gebrochen ist. Eine denkbare explizite Brechung der Symmetrie durch ein Einführen der gewünschten Massenterme per Hand scheidet aus; die Eichsymmetrie darf nicht explizit gebrochen sein. Die Brechung der lokalen Eichsymmetrie muß auf andere Weise geschehen.

2.2 Spontane Symmetriebrechung und Higgs-Mechanismus

Zum Zwecke der spontanen Brechung der $SU(2) \times U(1)$-Symmetrie wird ein zusätzliches $SU(2)$-Dublett mit Spin 0 mit sogenannten Higgs-Teilchen eingeführt, das den gleichen Eigenwert unter der $U(1)$ besitzt wie das Lepton-Dublett. Weiterhin setzt man ein Potential für die skalaren Higgs-Teilchen an, welches sein Minimum nicht im Ursprung annimmt. Es ergibt sich ein Grundzustand, der nicht invariant unter der Gruppe $SU(2) \times U(1)$ ist, sondern von dem wir nur die $U(1)_{\mathrm{em}}$-Invarianz fordern. Diese $U(1)_{\mathrm{em}}$ ist die Eichgruppe der elektromagnetischen Ladung, deren Generator Q mit dem Generator der Hyperladung, Y, und dem dritten Generator des schwachen Isospins, T_3, über die Gell-Mann-Nishijima-Relation

$$Q = \frac{1}{2} Y + T_3$$

in Beziehung steht. Das Singlett-Elektronfeld $e_i(x)$ stellt einen Eigenzustand von Q mit Eigenwert $-e$ dar, der elektromagnetischen Elementarladung.
Durch den nicht mehr unter der elektroschwachen Symmetrie invarianten Grundzustand wird eine spontane Brechung der $SU(2) \times U(1)$ auf eine $U(1)_{\mathrm{em}}$ erreicht, und nach dem Theorem von Goldstone [23] erhalten wir drei zunächst masselose Goldstone-Bosonen. Aufgrund der Tatsache, daß hier eine lokale Eichsymmetrie spontan gebrochen wird, tauchen diese Goldstone-Teilchen nicht als physikalische Freiheitsgrade auf, sondern führen dazu, daß die drei Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung, $W^\pm$ und Z^0, massiv werden. Das ist der Higgs-Mechanismus [24, 25, 26].

[1] Sollten die Neutrinos eine endliche Ruhemasse besitzen, wofür es nach neuen Experimenten deutliche Hinweise gibt, so gäbe es auch rechtshändige Neutrinos. Dann wären alle Fermionen massiv und nur das Photon und die Gluonen masselos.

Die Fermion-Massen entstehen als Folge des VEWes des neutralen Higgs-Bosons, wenn wir zusätzliche eichinvariante Yukawa-Kopplungen des Higgs-Dubletts an die Fermionen des Standard Modells geeignet einführen.
Nun konkret: Das Higgs-Dublett

$$\phi \;=\; \begin{pmatrix} h^+ \\ h^0 \end{pmatrix}$$

mit einem elektrisch geladenen Higgs-Boson h^+ und einem neutralen, h^0, und entsprechend kovarianter Ableitung $D_\mu\,\phi$ wie das Lepton-Dublett l_i,

$$D_\mu\,\phi \;=\; \left(\partial_\mu + i g_2 \frac{\sigma^b}{2} W^b_\mu - i g_1 \frac{1}{2} C_\mu\right)\phi\,,$$

soll das Potential

$$V\left(\phi^+\,\phi\right) \;=\; -\mu^2\left(\phi^+\,\phi\right) + \frac{\lambda}{2}\left(\phi^+\,\phi\right)^2$$

mit positiven Parametern μ^2 und λ besitzen, dessen Minimum für

$$\phi^+\,\phi \;=\; |\phi_0|^2 \;:=\; \frac{\mu^2}{\lambda}$$

angenommen wird und uns somit eindeutig die $U(1)_{\text{em}}$-Symmetrie offenläßt. Um diese Ladungsinvarianz im SM nicht zu verletzen, weisen wir dem neutralen Higgs-Boson h^0 den VEW ϕ_0 und dem geladenen h^+ keinen VEW zu. Die klassische Higgs-Lagrange-Dichte umfaßt außer dem kinetischen Term mit der kovarianten Ableitung und dem Potential V noch die eichinvarianten Yukawa-Kopplungen des Higgs-Dubletts an die Fermionen in allgemeiner Form:

$$\mathcal{L}_{Higgs,klass} \;=\; \left(D^\mu\,\phi^+\right)\,\left(D_\mu\,\phi\right) - V\left(\phi^+\phi\right) + \left(M^e_{ij}\,\bar{l}_i\,\phi\,e_j + M^u_{ij}\,\bar{q}^A_i\,\phi^+\,u_{Aj} + M^d_{ij}\,\bar{q}^A_i\,\phi\,d_{iA} + h.c.\right)$$

mit komplexen Matrizen M^e, M^u und M^d. Nach Umdefinition des neutralen Higgs-Feldes können wir in einer geeignet gewählten Eichung (der sogenannten unitären Eichung) diese Lagrange-Dichte durch das neutrale Higgs-Boson h^0 und dessen VEW ϕ_0 ausdrücken. In dieser Eichung gibt es im Standard Modell als physikalischen Freiheitsgrad nur das ungeladene Higgs-Boson, welches einen VEW ungleich Null besitzt. Wir schreiben das Higgs-Dublett dann in der Form

$$\phi\,(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 + h^0\,(x) \end{pmatrix}.$$

Drücken wir das Higgs-Potential durch die physikalischen Freiheitsgrade aus, so erhalten wir zum Beispiel Terme, die proportional zu ϕ_0^2 sind:

$$\left(\frac{1}{4}\,g_2^2\,\left(W^{1\,\mu}W^1_\mu + W^{2\,\mu}W^2_\mu + W^{3\,\mu}W^3_\mu\right) + \frac{1}{4}\,g_1^2\,C^\mu C_\mu - \frac{1}{2}\,g_1 g_2\,C^\mu W^3_\mu\right)\phi_0^2\,.$$

Diese stellen Massenterme für geeignete Kombinationen der Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung dar, den sogenannten Masseneigenzuständen. Definieren wir diese Masseneigenzustände als

$$W_\mu^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^1 \mp i\,W_\mu^2\right),$$

die auch Ladungseigenzustände von Q mit Eigenwerten $\pm e$ darstellen (entsprechend der hochgestellten Indizes), und

$$\begin{aligned} Z_\mu &:= \left(g_1^2+g_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(g_2 W_\mu^3 - g_1 C_\mu\right), \\ A_\mu &:= \left(g_1^2+g_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(g_1 W_\mu^3 + g_2 C_\mu\right), \end{aligned}$$

welches elektrisch ungeladene Felder sind, so ergibt sich für die Form der Terme proportional zu ϕ_0^2 im Higgs-Potential

$$\frac{1}{2} g_2^2\,\phi_0^2\,W^{+\,\mu} W_\mu^- + \frac{1}{2}\frac{g_1^2+g_2^2}{2}\,\phi_0^2\,Z^\mu Z_\mu\,.$$

Hieraus sind die Massen der definierten Zustände ablesbar; offenbar bleibt das Vektorfeld A_μ masselos und entspricht dem Photon, während das ungeladene Vektorfeld Z_μ und die geladenen Felder $W_\mu^\pm$ durch die spontane Brechung der Eichsymmetrie Massen erhalten.
Wir können den sogenannten schwachen Mischungswinkel θ_W einführen durch

$$\tan\theta_W := \frac{g_1}{g_2}$$

und finden die Masseneigenzustände Z_μ und A_μ somit in Abhängigkeit der Eicheigenzustände W_μ^3 und C_μ als

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \cos\theta_W\,W_\mu^3 - \sin\theta_W\,C_\mu\,, \\ A_\mu &= \sin\theta_W\,W_\mu^3 + \cos\theta_W\,C_\mu\,. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen besitzen genau die Form einer $O(2)$-Transformation mit Parameter θ_W, weshalb von einer Drehung der Masseneigenzustände bezüglich der Eicheigenzustände gesprochen wird. Als Drehungswinkel finden wir genau den schwachen Mischungswinkel.
Auch die Kopplungskonstanten der Eichgruppen $SU(2)$ und $U(1)$ lassen sich durch den schwachen Mischungswinkel ausdrücken:

$$g_1 := \frac{e}{\sin\,\theta_W}\,, \qquad g_2 := \frac{e}{\cos\,\theta_W}\,,$$

wobei e für den Betrag der Elementarladung steht und aufgrund experimenteller Daten

$$\sin^2\,\theta_W \approx 0.23$$

gefunden wurde.
Die Terme proportional zu $\left(h^0\,(x)\right)^2$ und $h^0\,(x)$ im Higgs-Potential stellen Wechselwirkungen des neutralen Higgs-Bosons mit den Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung dar.
Kommen wir nun zu den Yukawa-Termen im Higgs-Potential. Ersetzen wir hier die Higgs-Felder durch h^0 und den VEW ϕ_0, so erhalten wir aus Termen, die proportional zu ϕ_0 sind, Massenterme für die Fermionen des Standard Modells:

$$M^e_{ij}\,\phi_0\,\bar{e_L}_i\,e_{Rj} + M^u_{ij}\,\phi_0\,\bar{u_L}_i^A\,u_{RAj} + M^d_{ij}\,\phi_0\,\bar{d_L}_i^A\,d_{RAj} + h.c.\,.$$

Im Falle der Fermionen erfolgen wie bei den Eichbosonen auch Umdefinitionen der Eicheigenzustände in die Masseneigenzustände, hier mittels unitärer Matrizen. Wegen der als masselos angenommenen linkshändigen Neutrinos können wir deren Eicheigenzustände in beliebiger Weise umdefinieren. Als Resultat erhalten wir die kinetischen Terme und die Massenterme der Fermionen in unveränderter Form, einzig die Eicheigenzustände sind durch die Masseneigenzustände zu ersetzen. Die Massenterme lauten, falls wir die Masseneigenzustände nach den Transformationen mit den gleichen Symbolen bezeichnen wie die Eicheigenzustände

$$M^e_{ii}\,\phi_0\,\bar{e}_{Li}\,e_{Ri} + M^u_{ii}\,\phi_0\,\bar{u}_L i^A\,u_{RAi} + M^d_{ii}\,\phi_0\,\bar{d}_L i^A\,d_{RAi} + h.c.\,.$$

Bei den Kopplungen der Quarks an den geladenen elektromagnetischen Strom heben sich die bei den Umdefinitionen verwendeten unitären Matrizen aber nicht weg. Es bleibt dort die sogenannte Cabbibo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix) [27] stehen. Die CKM-Matrix kann durch drei Winkel und eine CP-verletzende Phase beschrieben werden.
Im Produkt der kovarianten Ableitungen des Higgs-Dubletts sind die Wechselwirkungen des neutralen Higgs-Bosons mit den massiven Bosonen der schwachen Wechselwirkung und die Selbst-Wechselwirkung des Higgs-Bosons festgelegt.

2.3 Freie Parameter des Standard Modells

Das Standard Modell beschreibt die Wechselwirkungen der Elementarteilchen unter Verwendung der drei reellen Eichgruppenparameter g_1, g_2, und g_3, deren Werte von der Theorie selbst in keiner Weise vorhergesagt werden. Durch die Hinzunahme des Higgs-Sektors zur spontanen Brechung der $SU(2) \times U(1)$ Symmetrie und zur Erzeugung der Massen der Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung und der Fermionen erhalten wir weitere freie Parameter:

- zwei reelle Parameter im Higgs-Potential, μ^2 und λ,
- neun reelle Parameter zur Beschreibung der komplexen hermiteschen 3×3-Massen-Matrizen und
- vier Parameter der CKM-Matrix (drei Winkel und eine Phase, die für CP-Verletzung verantwortlich ist)

Insgesamt enthält das Standard Modell einschließlich des Higgs-Sektors 18 freie, durch die Theorie nicht bestimmte Parameter, die durch Experimente bestimmt werden müssen.

Kapitel 3

Supersymmetrie

Supersymmetrie [18, 28] ist eine Symmetrie zwischen Teilchen, deren Spin sich um 1/2 unterscheidet, die aber sonst gleiche Eigenschaften besitzen. Supersymmetrie ist also eine Symmetrie prinzipiell anderer Art als die inneren lokalen Symmetrien des SM und die Poincaré-Invarianz, die jeweils nur Teilchen mit gleichem Spin bei Transformationen miteinander verbinden. In supersymmetrischen Theorien gibt es zu jedem Fermion einen bosonischen Superpartner und zu jedem Boson einen fermionischen Superpartner.
Die in diesem Kapitel verwendeten Konventionen und Relationen sind im Anhang C zusammengefaßt. Sie werden nur in wenigen Fällen in diesem Abschnitt nochmals angegeben.

3.1 Motivation für Supersymmetrie

Bis jetzt gibt es noch keine gesicherten experimentellen Hinweise auf eine in der Natur realisierte Supersymmetrie; insbesondere ist noch kein Superpartner zu einem Teilchen des Standard Modells entdeckt worden. Was macht supersymmetrische Theorien so attraktiv, daß sie dennoch in Betracht gezogen werden ?
Aus theoretischer Sicht gibt es einige Gründe, die nahelegen, daß Supersymmetrie zumindest bei hinreichend hohen Energien realisiert ist:

- Keine quadratisch divergenten Beiträge zu skalaren Massen
  Höhere Ordnungen in der Störungstheorie liefern in nicht supersymmetrischen Theorien quadratisch divergente Beiträge zu skalaren Massen, zum Beispiel zur Masse des Higgs-Bosons. Ist jedoch Supersymmetrie realisiert, so ergeben sich sowohl fermionische als auch bosonische Beiträge, welche sich exakt wegheben. Deshalb treten in supersymmetrischen Theorien keine quadratisch divergenten Beiträge zu Skalarmassen auf.

- Treffen der drei Eichgruppenparameter in einem Punkt bei hohen Energien
  Die Eichgruppenparameter als Kopplungskonstanten der drei fundamentalen Wechselwirkungen des Standard Modells sind laufende, das heißt energieabhängige Größen. Im Sinne einer Vereinheitlichung dieser drei Kräfte bei einer entsprechend großen Energieskala sollten sich auch die drei Eichgruppenparameter auf eine einzige reduzieren. Dafür müssen sie zuerst einmal bei dieser Vereinigungsenergie den gleichen Wert annehmen. Die Extrapolation der Kurven der Eichgruppenparameter des Standard Modells ergibt keinen gemeinsamen Schnittpunkt. Unter Berücksichtigung der Supersymmetrie allerdings treffen sich die drei Eichgruppenparameter in einem Punkt [6]. Dies ist ein wichtiges Argument zugunsten der Supersymmetrie bei der Suche nach einer vereinheitlichten Theorie der verschiedenen Wechselwirkungen.

- Nur Superstring-Theorien sind konsistente String-Theorien für eine Beschreibung von Fermionen und Bosonen

In weitergehenden fundamentalen Theorien, sogenannten String-Theorien, die keine relativistischen Quantenfeldtheorien sind und für noch größere Energieskalen gelten, stellt man sich Elementarteilchen nicht als punktförmige Teilchen vor, sondern interpretiert sie als mögliche Schwingungszustände einer offenen oder geschlossenen Saite (eines open oder closed strings). Diese String-Theorien müssen aus Konsistenzgründen in höheren Dimensionen formuliert werden. Des weiteren lassen sich Zustände negativer Energie, die physikalisch nicht sinnvoll sind, vermeiden, wenn die Invarianz unter Supersymmetrie-Tranformationen postuliert wird. Diese Theorien werden als Superstring-Theorien bezeichnet. Es ist bemerkenswert, daß in diesem Fall die Supersymmetrie in recht natürlicher Weise in der Formulierung dieser Theorien selbst auftritt und nicht nachträglich postuliert werden muß.

- Die SUSY-Algebra ist im Rahmen einer relativistischen Quantenfeldtheorie die einzige konsistente Super-Lie-Algebra von Symmetrien der S-Matrix.

3.2 Die Supersymmetrie-Algebra

Den letzten oben angeführten Punkt wollen wir in diesem Kapitel näher erläutern.
Das No-go-Theorem von Coleman und Mandula [29] liefert Aussagen über die Eigenschaften aller möglichen bosonischen Generatoren von Symmetrien der S-Matrix. Die verwendeten Voraussetzungen sind fast alle physikalisch motiviert:

- Die betrachtete Symmetriegruppe der S-Matrix enthält eine Untergruppe, welche lokal isomorph zur Poincaré-Gruppe ist.
- Zu jeder positiven Energie E existieren höchstens endlich viele Zustände mit positiver, aber kleinerer Energie als E.
- Elastische Streuamplituden sind analytische Funktionen der Schwerpunktsenergie und des invarianten Impulsübertrages.
- Die S-Matrix ist nicht trivial, sondern erlaubt Streuung zwischen verschiedenen Zuständen.
- Die Generatoren der betrachtete Symmetriegruppe, dargestellt als Integraloperatoren auf dem Impulsraum, besitzen Distributionen als Kerne.

Unter diesen Voraussetzungen konnten Coleman und Mandula zeigen, daß jede Symmetriegruppe der S-Matrix einer relativistischen Quantenfeldtheorie mit bosonischen Generatoren das direkte Produkt der Poincaré-Gruppe mit einer internen Symmetriegruppe ist, welche selbst wieder als direktes Produkt einer kompakten halbeinfachen Gruppe mit $U(1)$ Gruppen darstellbar ist. Seien B_r die bosonischen Generatoren der internen Symmetriegruppe und P_μ die Erzeugenden der Translationen im Minkowski-Raum sowie $M_{\mu\nu}$ die Generatoren der Lorentz-Gruppe $SO(3,1)$, so gelten folgende Kommutator-Relationen

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0\,, \\
[P_\mu, M_{\rho\sigma}] &= i\left(\eta_{\mu\rho}\, P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}\, P_\rho\right)\,, \\
[M_{\mu\nu}, M_{\rho,\sigma}] &= i\left(\eta_{\mu\sigma}\, M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho}\, M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}\, M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\, M_{\mu\rho}\right)\,, \\
[B_r, P_\mu] &= [B_r, M_{\mu\nu}] \;=\; 0\,, \\
[B_r, B_s] &= i\, {c_{rs}}^t\, B_t\,.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Sowohl für massive als auch masselose Zustände ändert die innere Symmetrie nicht den Spin der Zustände.

Folglich können die Generatoren der Supersymmetrie nicht bosonisch, sondern müssen im Gegenteil fermionisch sein, um dieses wichtige No-go-Theorem zu umgehen.

Haag, Łopuszánski und Sohnius untersuchten alle möglichen Generatoren einer Supersymmetrie [30]. Unter den Voraussetzungen, daß

- nur Symmetrien der S-Matrix betrachtet werden,
- jedes Massenmultiplett nur eine endliche Anzahl verschiedener Teilchenarten enthält,
- und keine masselosen Teilchen und langreichweitigen Kräfte berücksichtigt werden,

fanden sie heraus, daß alle fermionischen Generatoren einer Supersymmetrie in einer der zweidimensionalen Darstellungen $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ oder $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ der Lorentz-Gruppe sein müssen. Weiterhin muß der Antikommutator $\left\{Q, \bar{Q}\right\}$ mit entsprechenden Indizes in einer $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$-Darstellung der Lorentz-Gruppe und damit proportional zu P_μ sein. Insgesamt ergibt sich so folgende Super-Poincaré-Algebra:

$$
\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0\,, \\
[P_\mu, M_{\rho\sigma}] &= i\left(\eta_{\mu\rho}\, P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}\, P_\rho\right)\,, \\
[M_{\mu\nu}, M_{\rho,\sigma}] &= i\left(\eta_{\mu\sigma}\, M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho}\, M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}\, M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\, M_{\mu\rho}\right)\,, \\
[Q_\alpha{}^n, P_\mu] &= \left[\bar{Q}_{\dot{\alpha}m}, P_\mu\right] = 0\,, \\
[Q_\alpha{}^n, M_{\mu\nu}] &= \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{\mu\nu}\right)_\alpha{}^\beta\, Q_\beta{}^n\,, \\
\left[\bar{Q}_{\dot{\alpha}n}, M_{\mu\nu}\right] &= -\tfrac{1}{2}\,\bar{Q}_{\dot{\beta}n}\left(\bar{\sigma}_{\mu\nu}\right)^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}\,, \\
\left\{Q_\alpha{}^n, \bar{Q}_{\dot{\beta}m}\right\} &= 2\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}\, P_\mu\, \delta^n_m\,.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Alle auftretenden Größen sind im Anhang C definiert. Die Indizes α und β laufen von 1 bis 2, entsprechend die gepunkteten Indizes. Die Indizes n und m numerieren die Anzahl der Erzeugenden der Supersymmetrie und reichen von 1 bis $N \geq 1$. Im Fall $N = 1$ spricht man von einfacher Supersymmetrie, bei $N > 1$ von einer erweiterten Supersymmetrie.

3.3 Darstellungen der Supersymmetrie-Algebra im Fall $N = 1$ und der Superraum

Das Teilchenspektrum supersymmetrischer Theorien muß eine Darstellung der Algebra (3.2) bilden. Lineare Realisierungen der Supersymmetrie lassen sich im Fall $N = 1$ mit dem Begriff des Superraumes und der Superfelder erhalten. Der Superraum ist eine Erweiterung des Minkowski-Raumes um $4N$ antikommutierende Dimensionen $\theta_\alpha{}^n$ und $\bar{\theta}^n_{\dot{\alpha}}$, $n = 1, \ldots, N$, welche als solche kein klassisches Analogon besitzen. Der Superraum im Fall $N = 1$ ist achtdimensional, und seine Punkte sind durch $z = \left(x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\right)$ gegeben mit den als Grassmann-Variablen bezeichnenten antikommutierenden θ_α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$:

$$
\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = \left\{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\right\} = \left\{\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\right\} = 0\,.
$$

Mit solchen antikommutierenden Variablen läßt sich (3.2) vollständig mit Kommutatoren darstellen (hier nur die Kommutatoren mit den Generatoren der Supersymmetrie):

$$\begin{aligned}
[\theta Q, \theta Q] &= [\bar\theta\bar Q, \bar\theta\bar Q] = 0\,,\\
[P_\mu, \theta Q] &= [P_\mu, \bar\theta\bar Q] = 0\,,\\
&\ [\theta Q, \bar\theta\bar Q] = 2\theta\sigma^\mu\bar\theta P_\mu\,.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Die Super-Poincaré-Algebra können wir durch Differentialoperatoren auf dem Superraum darstellen:

$$\begin{aligned}
P_\mu &:= i\,\partial_\mu\,,\\
Q_\alpha &:= \partial_\alpha - i\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\beta}\,\bar\theta^{\dot\beta}\,\partial_\mu\,,\\
\bar Q^{\dot\alpha} &:= -\bar\partial^{\dot\alpha} - i\,\bar\sigma^{\mu\,\dot\alpha\beta}\,\theta_\beta\,\partial_\mu\,,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

wobei

$$\partial_\alpha\,\theta^\beta := \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta = \delta^\beta_\alpha\,, \qquad \bar\partial^{\dot\alpha}\,\bar\theta_{\dot\beta} := \frac{\partial}{\partial\bar\theta_{\dot\alpha}}\bar\theta_{\dot\beta} = -\,\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\,, \qquad \{\partial_\alpha, \bar\partial_{\dot\alpha}\} = 0$$

gilt. Es folgt für die Generatoren mit der entsprechend anderen Indexstellung

$$\begin{aligned}
Q^\alpha &= \epsilon^{\alpha\beta}\,Q_\beta = -\,\partial^\alpha + i\,\bar\theta_{\dot\alpha}\,\bar\sigma^{\mu\,\dot\alpha\alpha}\,\partial_\mu\,,\\
\bar Q_{\dot\alpha} &= \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar Q^{\dot\beta} = \bar\partial_{\dot\alpha} + i\,\theta^\alpha\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu\,.
\end{aligned}$$

Die Darstellung (3.3) der Super-Poincaré-Algebra mit den Grassmann-Variablen θ_α und $\bar\theta_{\dot\alpha}$ entspricht der einer Lie-Algebra. Für Lie-Algebren werden Gruppenelemente der entsprechenden Lie-Gruppe mit Hilfe der Generatoren und der exp-Funktion definiert. Analog definieren wir als Gruppenelement der Super-Poincaré-Gruppe

$$G\left(x^\mu, \xi, \bar\xi\right) = \exp\left\{i\left(x^\mu P_\mu + \xi Q + \bar\xi\bar Q\right)\right\}\,, \tag{3.5}$$

welches von einem Raumzeitpunkt x^μ und antikommutierenden Parametern ξ und $\bar\xi$ abhängt. Durch die verschwindenden Kommutatoren von P_μ mit den Generatoren der Supersymmetrie, Q_α und $\bar Q_{\dot\alpha}$, können wir dies faktorisieren:

$$G\left(x^\mu, \xi, \bar\xi\right) = \exp\{ix^\mu P_\mu\}\,\exp\left\{i\left(\xi Q + \bar\xi\bar Q\right)\right\} = G\left(x^\mu, 0, 0\right)\,G\left(0, \xi, \bar\xi\right)\,.$$

Durch den zweiten Faktor

$$G\left(0, \xi, \bar\xi\right) = \exp\left\{i\left(\xi Q + \bar\xi\bar Q\right)\right\} \tag{3.6}$$

werden reine Supersymmetrie-Transformationen beschrieben, während der erste Faktor eine gewöhnliche Translation um x^μ im Minkowski-Raum darstellt. Die Ausführung zweier Supersymmetrie-Transformationen hintereinander ergibt mit der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$\begin{aligned} G\left(0,\xi,\bar\xi\right)\, G\left(x^\mu,\theta,\bar\theta\right) &= \exp\left\{i\left(\xi Q+\bar\xi\bar Q\right)\right\}\,\exp\left\{i\left(x^\mu P_\mu+\xi Q+\bar\xi\bar Q\right)\right\} \\ &= \exp\left\{i x^\mu P_\mu\right\}\,\exp\left\{i\left(\xi Q+\bar\xi\bar Q\right)\right\}\,\exp\left\{i\left(\theta Q+\bar\theta\bar Q\right)\right\} \\ &= \exp\left\{i x^\mu P_\mu\right\}\,\exp\left\{i\left(\xi Q+\bar\xi\bar Q+\theta Q+\bar\theta\bar Q+\frac{i}{2}\left[\xi Q+\bar\xi\bar Q,\theta Q+\bar\theta\bar Q\right]\right)\right\}\,, \end{aligned}$$

denn alle höheren Kommutatoren verschwinden aufgrund der Kommutator-Algebra (3.3). Wir erhalten unter erneuter Verwendung der Kommutatoren aus (3.3)

$$\begin{aligned} G\left(0,\xi,\bar\xi\right)\, G\left(x^\mu,\theta,\bar\theta\right) &= \exp\left\{i x^\mu P_\mu\right\}\,\exp\left\{i\left(\xi Q+\bar\xi\bar Q+\theta Q+\bar\theta\bar Q+i\left(\xi\sigma^\mu\bar\theta\,P_\mu-\theta\sigma^\mu\bar\xi\,P_\mu\right)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{i x^\mu P_\mu\right\}\,\exp\left\{-\xi\sigma^\mu\bar\theta\,P_\mu+\theta\sigma^\mu\bar\xi\,P_\mu\right\}\,\exp\left\{i\left(\xi+\theta\right)Q+i\left(\bar\theta+\bar\xi\right)\bar Q\right\} \\ &= \exp\left\{i\left(x^\mu+i\xi\sigma^\mu\bar\theta-i\theta\sigma^\mu\bar\xi\right)\,P_\mu\right\}\,\exp\left\{i\left(\theta+\xi\right)Q+i\left(\bar\theta+\bar\xi\right)\bar Q\right\} \\ &= G\left(\,x^\mu+i\xi\sigma^\mu\bar\theta-i\theta\sigma^\mu\bar\xi,\;\theta+\xi,\;\bar\theta+\bar\xi\,\right)\,. \end{aligned}$$

Supersymmetrie-Transformationen kann man sich als Translationen im Superraum vorstellen.

Auf diesem Superraum definieren wir Superfelder $\phi=\phi\left(z\right)=\phi\left(x^\mu,\theta_\alpha,\bar\theta_{\dot\alpha}\right)$ als Funktionen der Koordinaten des Superraums. Aufgrund der antikommutierenden θ-Variablen liefert eine Taylor-Entwicklung nach $\left(\theta_\alpha,\bar\theta_{\dot\alpha}\right)$ nur endlich viele Terme mit Funktionen des Minkowski-Raumes als Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \phi\left(x^\mu,\theta,\bar\theta\right) &= \phi_0\left(x^\mu\right)+\theta^\alpha\phi_{1\alpha}\left(x^\mu\right)+\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\phi_2^{\dot\alpha}\left(x^\mu\right)+\theta\sigma^\mu\bar\theta\phi_{3\mu}\left(x^\mu\right)+\theta\theta\phi_4\left(x^\mu\right) \\ &\quad+\bar\theta\bar\theta\phi_5\left(x^\mu\right)+\theta\theta\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\phi_6^{\dot\alpha}\left(x^\mu\right)+\bar\theta\bar\theta\theta^\alpha\phi_{7\alpha}\left(x^\mu\right)+\theta\theta\bar\theta\bar\theta\phi_8\left(x^\mu\right)\,. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dieses allgemeine Superfeld enthält jeweils sechzehn reelle fermionische ($\phi_{1\alpha}$, $\bar\phi_2^{\dot\alpha}$, $\bar\phi_6^{\dot\alpha}$ und $\phi_{7\alpha}$) und bosonische Freiheitsgrade (ϕ_0, $\phi_{3\mu}$, ϕ_4, ϕ_5 und ϕ_8). Solche Superfelder bilden im allgemeinen keine irreduziblen Darstellungen der Supersymmetrie-Algebra. Das bedeutet, daß wir noch Bedingungen an die Superfelder stellen müssen, um die Zahl der beschriebenen Freiheitsgrade zu reduzieren. Hierzu verwenden wir bezüglich der Supersymmetrie kovariante Ableitungen

$$\begin{aligned} D_\alpha &:= \partial_\alpha+i\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\beta}\,\bar\theta^{\dot\beta}\,\partial_\mu\,, &\qquad D^\alpha &= \epsilon^{\alpha\beta}\,D_\beta = -\,\partial^\alpha-i\,\bar\theta_{\dot\alpha}\,\bar\sigma^{\mu\,\dot\alpha\alpha}\,\partial_\mu\,, \\ \bar D_{\dot\alpha} &:= \bar\partial_{\dot\alpha}-i\,\theta^\alpha\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu\,, &\qquad \bar D^{\dot\alpha} &= \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar D_{\dot\beta} = -\,\bar\partial^{\dot\alpha}+i\,\bar\sigma^{\mu\,\dot\alpha\beta}\,\theta_\beta\,\partial_\mu\,. \end{aligned}$$

Die Namensgebung wird gerechtfertigt durch folgende verschwindenden Antikommutatoren:

$$\begin{aligned}\{ D_\alpha, Q_\beta \} &= \left\{ D_\alpha, \bar{Q}^{\dot\beta} \right\} = 0\,,\\ \{ D^{\dot\alpha}, Q_\beta \} &= \left\{ D^{\dot\alpha}, \bar{Q}^{\dot\beta} \right\} = 0\,.\end{aligned}$$

Die kovarianten Ableitungen selbst erfüllen folgende Algebra:

$$\{ D_\alpha, D_\beta \} = \left\{ \bar{D}^{\dot\alpha}, \bar{D}^{\dot\beta} \right\} = 0\,,$$

$$\{ D_\alpha, \bar{D}_{\dot\alpha} \} = -2\,i\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu\,.$$

Als Folge der verschwindenden Antikommutatoren in (3.3) antikommutieren die kovarianten Ableitungen D_α, $D^{\dot\alpha}$ mit den Supersymmetrie-Transformationen aus (3.6). Weiterhin ist anzumerken, daß mehr als zwei gleiche kovariante Ableitungen D oder $\bar{D}$ immer Null ergeben, weil mit den Variablen θ und $\bar\theta$ auch die entsprechenden partiellen Ableitungen antikommutieren.

3.3.1 Chirale und anti-chirale Superfelder

Mittels dieser kovarianten Ableitungen konstruieren wir geeignete Einschränkungen an die allgemeinen Superfelder: Sogenannte chirale Superfelder sind definiert durch die Bedingung

$$\bar{D}^{\dot\alpha}\phi\,(z) = 0 \tag{3.8}$$

und darstellbar durch

$$\phi\left(x^\mu, \theta, \bar\theta\right) = A\,(x^\mu) + \sqrt{2}\theta^\alpha\psi_\alpha\,(x^\mu) - i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu A\,(x^\mu) + \theta\theta F\,(x^\mu) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi\,(x^\mu)\,\sigma^\mu\bar\theta - \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\Box A\,(x^\mu)\;.$$

Wählt man als Argument

$$y_c^\mu = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar\theta\,,$$

so kann man chirale Superfelder mit diesem Argument einfacher schreiben als

$$\phi\,(y_c^\mu, \theta) = A\,(y_c^\mu) + \theta^\alpha\psi_\alpha\,(y_c^\mu) + \theta\theta F\,(y_c^\mu)\;. \tag{3.9}$$

Analog hierzu existieren antichirale Superfelder, definiert durch

$$D_\alpha\phi\,(z) = 0\,,$$

die sich mit

$$y_a^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar\theta$$

in der einfachen Form

$$\phi\left(y_a^\mu, \bar\theta\right) \;=\; B\left(y_a^\mu\right) + \sqrt{2}\bar\theta\bar\psi\left(y_a^\mu\right) + \bar\theta\bar\theta G\left(y_a^\mu\right) \tag{3.10}$$

darstellen lassen. Sowohl chirale als auch antichirale Superfelder besitzen je vier bosonische und fermionische reelle Freiheitsgrade. Die $\theta\theta$- bzw. $\bar\theta\bar\theta$-Komponenten sind keine physikalischen Freiheitsgrade sondern nur Hilfsfelder. Dies wird erst später deutlich, wenn wir die kinetischen Terme für die in den Superfeldern enthaltenen Bosonen und Fermionen betrachten, denn es ergeben sich keine kinetischen Terme für F und G.

Wie an der Darstellung chiraler und anti-chiraler Superfelder zu sehen ist, sind beliebige Linearkombinationen und Produkte chiraler bzw. antichiraler Superfelder wieder chirale bzw. anti-chirale Superfelder. Als Produkt zweier chiraler Superfelder

$$\phi_1\left(y_c^\mu, \theta\right) \;=\; A_1\left(y_c^\mu\right) + \sqrt{2}\theta^\alpha\psi_{1\,\alpha}\left(y_c^\mu\right) + \theta\theta F_1\left(y_c^\mu\right)$$

und

$$\phi_2\left(y_c^\mu, \theta\right) \;=\; A_2\left(y_c^\mu\right) + \sqrt{2}\theta^\alpha\psi_{2\,\alpha}\left(y_c^\mu\right) + \theta\theta F_2\left(y_c^\mu\right)$$

erhält man

$$\phi_1\,\phi_2\left(y_c^\mu, \theta\right) \;=\; A_1A_2 + \sqrt{2}\theta^\alpha\left(A_1\psi_{2\,\alpha} + A_2\psi_{1\,\alpha}\right) + \theta\theta\left(A_1F_2 + A_2F_1 - \psi_1\psi_2\right)\,,$$

wobei bei den Komponenten die Argumente y_c^μ weggelassen worden sind. Das Produkt eines chiralen Superfeldes mit seinem komplex-konjugierten Superfeld, welches dann anti-chiral ist, lautet für das Superfeld $\phi(z)$ aus (3.9)

$$\begin{aligned}
\phi^+(z)\,\phi(z) \;=\;& |A|^2 + \sqrt{2}A^*\,\theta\psi + \sqrt{2}A\,\bar\theta\bar\psi + i\theta\sigma^\mu\bar\theta\,\left(A^*\partial_\mu A - A\partial_\mu A^*\right) + \theta\theta\,\left(F^*A + FA^*\right)\\
&+ 2\theta\psi\,\bar\theta\bar\psi + \sqrt{2}\theta\theta\,\bar\theta\bar\psi\,F + \sqrt{2}\bar\theta\bar\theta\,\theta\psi\,F^*\\
&+ \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\,\left(A^*\,\partial_\mu\psi\,\sigma^\mu\,\bar\theta - \psi\,\sigma^\mu\,\bar\theta\,\partial_\mu A^*\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\bar\theta\,\left(A\,\theta\,\sigma^\mu\,\partial_\mu\psi - \theta\,\sigma^\mu\,\bar\psi\,\partial_\mu A\right)\\
&+ \theta\theta\,\bar\theta\bar\theta\,\left(-\frac{1}{4}\Box A^*\,A - \frac{1}{4}A^*\,\Box A + \frac{1}{2}\partial^\mu A^*\,\partial_\mu A + |F|^2 + \frac{i}{2}\,\left(\psi\,\sigma^\mu\,\partial_\mu\bar\psi - \partial_\mu\psi\,\sigma^\mu\,\bar\psi\right)\right)\,.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Dies ist weder ein chirales noch ein antichirales Superfeld.

3.3.2 Vektorsuperfelder

Eine andere Einschränkung der Superfelder erhält man durch die Realitäts-Bedingung

$$\phi(\,z\,) \;=\; \phi^*(\,z\,)\,.$$

Die Superfelder, die dieser Bedingung genügen, nennt man Vektorsuperfelder und besitzen folgende Entwicklung in den Grassmann-Variablen θ_α und $\bar\theta_{\dot\alpha}$:

$$\begin{aligned} V\left(x^\mu,\theta,\bar\theta\right) &= C\left(x^\mu\right)+\theta\psi\left(x^\mu\right)+\bar\theta\bar\psi\left(x^\mu\right)-\theta\sigma^\nu\bar\theta\, v_\nu\left(x^\mu\right)+\theta\theta\, G\left(x^\mu\right) \\ &\quad +\bar\theta\bar\theta\, G^*\left(x^\mu\right)+i\theta\theta\,\bar\theta\bar\lambda\left(x^\mu\right)-i\bar\theta\bar\theta\,\theta\lambda\left(x^\mu\right)+\frac{1}{2}\theta\theta\,\bar\theta\bar\theta\, M\left(x^\mu\right) \end{aligned}$$

mit reellen Komponenten C, G und M sowie einem reellen Vektorfeld v_μ. In einer speziellen Eichung, der Wess-Zumino-Eichung [31], die allerdings die Supersymmetrie bricht, kann man Vektorsuperfelder mit weniger Freiheitsgraden schreiben:

$$V\left(x^\mu,\theta,\bar\theta\right) = -\theta\sigma^\nu\bar\theta\, v_\nu\left(x^\mu\right)+i\theta\theta\,\bar\theta\bar\lambda\left(x^\mu\right)-i\bar\theta\bar\theta\,\theta\lambda\left(x^\mu\right)+\frac{1}{2}\theta\theta\,\bar\theta\bar\theta\, M\left(x^\mu\right)\ . \tag{3.12}$$

In dieser speziellen Eichung bleiben bis auf das Feld in der höchsten Komponente, M, nur die physikalischen Freiheitsgrade übrig; alle anderen unphysikalischen Freiheitsgrade verschwinden. In diesem Sinne ist die Wess-Zumino-Eichung in der Supersymmetrie ein Analogon zu der unitären Eichung im Standard Modell. Zu Vektorsuperfeldern werden wir später nochmals zurückkommen, wenn wir supersymmetrische Wirkungen konstruieren, die unter Eichsymmetrien invariant sein sollen.

3.4 Variationen der Superfelder unter Supersymmetrie-Transformationen

Die Komponenten eines allgemeinen Superfeldes (3.7) transformieren unter einer Supersymmetrie-Transformation $G\left(0,\xi,\bar\xi\right)$ mit Parametern ξ und $\bar\xi$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \delta\,\phi_0 &= -\left(\xi\phi_1+\bar\xi\bar\phi_2\right)\ , \\ \delta\,\phi_{1\,\alpha} &= -2\xi_\alpha\,\phi_4-\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\,\bar\xi^{\dot\beta}\,\left(\phi_{3\mu}-i\partial_\mu\phi_0\right)\ , \\ \delta\,\bar\phi_2^{\dot\alpha} &= -2\bar\xi^{\dot\alpha}\,\phi_5+\bar\sigma^{\mu\,\dot\alpha\beta}\,\xi_\beta\,\left(\phi_{3\mu}-i\partial_\mu\phi_0\right)\ , \\ \delta\,\phi_{3\mu} &= -\frac{i}{2}\,\xi\partial_\mu\phi_1+\frac{i}{2}\,\bar\xi\partial_\mu\bar\phi_2-2\xi\,\sigma^\nu\bar\phi_6\,\eta_{\nu\mu}-2\phi_7\,\sigma^\nu\,\bar\xi\,\eta_{\nu\mu}\ , \\ \delta\,\phi_4 &= -\bar\xi\bar\phi_6+\frac{i}{2}\,\partial_\mu\phi_1\,\sigma^\mu\,\bar\xi\,, \\ \delta\,\phi_5 &= -\xi\phi_7-\frac{i}{2}\xi\,\sigma^\mu\,\partial_\mu\bar\phi_2\,, \\ \delta\,\bar\phi_6^{\dot\alpha} &= \frac{i}{2}\,\bar\xi^{\dot\alpha}\,\partial^\mu\,\phi_{3\mu}-i\bar\sigma^{\mu\,\dot\alpha\beta}\,\xi_\beta\,\partial_\mu\phi_4-2\bar\xi^{\dot\alpha}\,\phi_8\,, \\ \delta\,\phi_{7\,\alpha} &= \frac{i}{2}\xi_\alpha\partial^\mu\,\phi_{3\mu}-i\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\,\bar\xi^{\dot\beta}\,\partial_\mu\,\phi_5-2\xi_\alpha\,\phi_8\,, \\ \delta\,\phi_8 &= \frac{i}{2}\left(\partial_\mu\phi_7\,\sigma^\mu\,\bar\xi-\xi\,\sigma^\mu\,\partial_\mu\bar\phi_6\right)\ . \end{aligned}$$

Wir beachten, daß die Variation der $\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}$-Komponente eines allgemeinen Superfeldes eine totale Raumzeitableitung ist.
Die Variation des chiralen Superfeldes ϕ aus (3.9) unter einer infinitesimalen Supersymmetrie-Transformation (3.6) mit Parametern ξ und $\bar{\xi}$ ist

$$\begin{aligned}
\delta\phi\left(x^\mu,\theta,\bar{\theta}\right) &= i\left(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right)\phi\left(x^\mu,\theta,\bar{\theta}\right) \\
&= \sqrt{2}\xi\psi + 2\sqrt{2}\theta\xi\,F - i\sqrt{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\,\left(\xi\,\partial_\mu\psi\right) - 2i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\,\partial_\mu A + \frac{i}{\sqrt{2}}\,\theta\theta\,\left(\partial_\mu\psi\right)\,\sigma^\mu\,\bar{\xi} \\
&\quad + i\theta\theta\,\xi\,\sigma^\mu\,\bar{\theta}\,\partial_\mu F - \theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\xi}\,\Box\,A - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}\,\left(\xi\,\Box\psi\right)\,.
\end{aligned}$$

Auch hier haben wir das Argument x^μ der Komponenten weggelassen. Erneut erhalten wir unter Verwendung des Argumentes y_c^μ eine einfachere Darstellung:

$$\delta\phi\left(x^\mu,\theta,\bar{\theta}\right) = \delta A\left(y_c^\mu\right) + \sqrt{2}\theta\left(\delta\psi\right)\left(y_c^\mu\right) + \theta\theta\,\delta F\left(y_c^\mu\right)$$

mit

$$\begin{aligned}
\delta A\left(y_c^\mu\right) &= -\sqrt{2}\xi\psi\left(y_c^\mu\right)\,, \\
\delta\psi_\alpha\left(y_c^\mu\right) &= -2\xi_\alpha\,F\left(y_c^\mu\right) - 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\,\bar{\xi}^{\dot{\beta}}\,\partial_\mu A\left(y_c^\mu\right)\,, \\
\delta F\left(y_c^\mu\right) &= \frac{i}{\sqrt{2}}\,\partial_\mu\,\psi\left(y_c^\mu\right)\,\sigma^\mu\,\bar{\xi}\,.
\end{aligned}$$

Dies sind die Transformationen der einzelnen Komponenten eines chiralen Superfeldes unter einer Supersymmetrie-Transformation. Wir stellen fest, daß die Variation der höchsten Komponente, F, eine totale Raumzeitableitung ist.
Analog findet man die Transformation der Komponenten antichiraler Superfelder.
Aus den allgemeinen Transformationen unter der Supersymmetrie folgt, daß die höchste Komponente des Superfeldes $\phi^+\,\phi$, die $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$-Komponente, ebenfalls in eine totale Raumzeitableitung transformiert. Diese Eigenschaft ist bei der Konstruktion einer Wirkung für ein physikalisches System mit Supersymmetrie wichtig.

3.5 Supersymmetrische Wirkungen

Jedes physikalische System wird durch seine Wirkung S eindeutig beschrieben. Die Evolution des Systems ist dadurch charakterisiert, daß die Wirkung stationär ist, deren Variation δS also verschwindet. In gewöhnlichen Feldtheorien in d Dimensionen konstruiert man die Wirkung als Raumzeit-Integral über eine Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$:

$$S = \int d^d x\;\mathcal{L}\left(x\right)\,. \tag{3.13}$$

Um dieses Verfahren auf supersymmetrische Systeme im Superraum zu erweitern, bedarf es einer Definition des Integrals über die antikommutierenden Dimensionen des Superraumes $z = \left(x^\mu, \theta, \bar{\theta}\right)$, denn in Analogie zu (3.13) wollen wir die Wirkung als Integral über den Superraum definieren. Wie in [32] definieren wir

$$\int d\theta^\alpha \, 1 \;=\; 0\,, \qquad \int d\theta^\alpha \, \theta_\beta \;=\; \delta^\alpha_\beta\,, \qquad \int d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \, 1 \;=\; 0\,, \qquad \int d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \, \theta^{\dot{\beta}} \;=\; \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\,. \tag{3.14}$$

Mehrfache Integrale über die θ_α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$-Variablen definieren wir durch

$$\int d^2\theta \, \theta\theta \;:=\; 1 \qquad \text{und} \qquad \int d^2\bar{\theta} \, \bar{\theta}\bar{\theta} \;:=\; 1\,. \tag{3.15}$$

Integration über den gesamten Superraum ist durch

$$\int d^8 z \;:=\; \int d^4 x \int d^2\theta \int d^2\bar{\theta}$$

definiert. Gemäß der Definition des Integrals über die antikommutierenden Variablen θ_α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ entspricht die Integration eines Superfeldes als Funktion im Superraum gerade einer Projektion auf die entsprechende Komponente. Mit dem allgemeinen Superfeld $\phi\,(z)$ aus (3.7) ist zum Beispiel aufgrund der Definitionen in (3.15)

$$\int d^2\theta \; \phi\,(z) \;=\; \phi_4\,(x^\mu) \qquad \text{und} \qquad \int d^2\theta \int d^2\bar{\theta} \; \phi\,(z) \;=\; \phi_8\,(x^\mu)\;.$$

Weiterhin definieren wir in Analogie zur δ-Distribution die Ausdrücke $\delta^2\,(\theta)$ und $\delta^2\,\left(\bar{\theta}\right)$ unter Berücksichtigung von (3.15) wie folgt:

$$\delta^2\,(\theta) \;=\; \theta\theta\,, \qquad\qquad \delta^2\,\left(\bar{\theta}\right) \;=\; \bar{\theta}\bar{\theta}\,.$$

Symmetrien des betrachteten Systems lassen die Wirkung invariant. Das bedeutet, daß unter einer Symmetrietransformation die Variation der Lagrange-Dichte nur eine totale Ableitung nach den Integrationsvariablen sein darf (oder auch Null). Dieser Variation der Wirkung aufgrund der Variation der Lagrange-Dichte entledigt man sich mittels partieller Integration und der Argumentation, daß die dabei entstehenden Randterme (im Unendlichen) keinen Beitrag liefern.
Handelt es sich sogar um eine Symmetrie der Lagrange-Dichte, so verschwindet deren Variation bei einer Transformation und die Wirkung bleibt invariant. Supersymmetrie ist aber keine Symmetrie der Lagrange-Dichte, sondern nur eine Symmetrie der Wirkung.
Damit die Wirkung unter einer Supersymmetrie-Transformation invariant bleibt, müssen wir das Argument der verschwindenden Randterme verwenden können. Dies kann aber bei Integrationen über die antikommutierenden Variablen θ_α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ nicht zum Tragen kommen. Vielmehr ist hier bis jetzt keine partielle Integration definiert. Und dies müssen wir nicht tun, wenn wir fordern, daß bei partieller Integration über den Minkowski-Raum die Randterme verschwinden. Das bedeutet, daß unter einer Supersymmetrie-Transformation die über die Dimensionen θ_α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ des Superraumes integrierte Lagrange-Dichte in eine totale Raumzeitableitung transformieren muß. Integrieren wir die Lagrange-Dichte aber über die antikommutierenden Variablen, so bedeutet dies nichts anderes, als bestimmte Komponenten der Superfelder in der Lagrange-Dichte herauszuprojezieren. Folglich müssen Lagrange-Dichten supersymmetrischer Systeme so konstruiert sein, daß Komponenten, die in eine totale Raumzeitableitung transformieren, bei der Integration über die Grassmann-Variablen auftreten.

Als mögliche Komponenten kommen die $\theta\theta$-Komponente eines chiralen oder die $\bar{\theta}\bar{\theta}$-Komponente eines anti-chiralen Superfeldes und die $\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}$-Komponente eines Vektorsuperfeldes oder eines Produktes eines chiralen Superfeldes mit seinem konjugiert komplexen Superfeld in Frage.

3.5.1 Supersymmetrische Wirkungen für chirale bzw. anti-chirale Superfelder

Gegeben sei ein chirales Superfeld ϕ mit Komponenten wie in (3.9). In (3.11) hatten wir schon das Produkt von ϕ mit seinem konjugierten anti-chiralen Superfeld ϕ^+ berechnet. Die höchste Komponente hiervon, die $\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}$-Komponente, lautet

$$\phi^+(z)\;\phi(z)\,\big|_{\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}} \;=\; -\frac{1}{4}\,(\Box A^*)\,A - \frac{1}{4}\,A^*\,\Box A + \frac{1}{2}\,\partial^\mu A^*\,\partial_\mu A + |F|^2 + \frac{i}{2}\,\left(\psi\,\sigma^\mu\,\partial_\mu\bar{\psi} - \partial_\mu\psi\,\sigma^\mu\,\bar{\psi}\right)\,.$$

Alle Komponentenfelder sind Funktionen des Minkowski-Raumes, was hier nicht mehr explizit angedeutet ist. Die Variation hiervon ist eine totale Raumzeitableitung, also ist diese $\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}$-Komponente ein prinzipieller Kandidat für einen Beitrag zur Wirkung dieses supersymmetrischen Systems eines chiralen Superfeldes. Wir erkennen, daß diese Komponente kinetische Terme für die fermionischen Freiheitsgrade des chiralen Superfeldes ϕ liefert und einen Hilfsfeld-Term. Deshalb können wir als kinetischen Teil einer Super-Lagrange-Dichte für ein chirales Superfeld und sein zugehöriges antichirales Superfelder ϕ^+

$$\mathcal{L}_{chiral}(x) \;=\; \phi^+(z)\;\phi(z)\,\big|_{\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}}\,.$$

ansetzen. Die Wirkung für ein chirales Superfeld und die darin auftretenden physikalischen Freiheitsgrade schreiben wir nach partieller Integration als

$$\begin{aligned} S_{chiral} &= \int d^8z\;\phi^+(z)\,\phi(z) \;=\; \int d^4x\;\mathcal{L}_{chiral}(x) \\ &= \int d^4x\;\left(\frac{1}{2}\,\partial^\mu A^*(x)\;\partial_\mu A(x) + \frac{i}{2}\,\left(\psi(x)\;\sigma^\mu\,\partial_\mu\bar{\psi}(x) - \partial_\mu\psi(x)\;\sigma^\mu\,\bar{\psi}(x)\right) + |F(x)|^2\right)\,. \end{aligned}$$

3.5.2 Supersymmetrische Wirkung für Vektorsuperfelder

Bei der Beschreibung von Spin-1-Teilchen muß stets das Prinzip der lokalen Eichinvarianz beachtet werden. Die Lagrange-Dichte soll invariant unter Eichtransformationen sein, weil durch diese nicht-physikalische Freiheitsgrade eliminiert werden können.
Betrachten wir zunächst den Fall einer abelschen Eichgruppe. Als Orientierungshilfe dient hierbei die Quantenelektrodynamik (QED). Eichtransformationen der Materiefelder sind lokale Phasentransformationen mit einer reellen Eichfunktion $\alpha(x^\mu)$, die Variation des entsprechenden Eichfeldes ist durch die Raumzeitableitung der Eichfunktion gegeben. Im Fall einer supersymmetrischen Theorie wird die Eichfunktion durch ein chirales Superfeld $\Lambda(z)$ ersetzt, so daß chirale bzw. anti-chirale Superfelder $\phi(z)$ bzw. $\phi^+(z)$ folgende Eichtransformation besitzen:

$$\phi(z)\;\rightarrow\;\exp\{\,ig\Lambda(z)\,\}\;\phi(z) \qquad \text{und} \qquad \phi^+(z)\;\rightarrow\;\phi^+(z)\;\exp\{\,-ig\Lambda^+(z)\,\}\,,$$

wobei $g \in \mathbb{R}$ für die Ladung des Superfeldes ϕ bzw. ϕ^+ bezüglich dieser Eichgruppe steht. Das Vektorsuperfeld V, welches das zugehörige Eichboson einschließlich dessen fermionischen Superpartner beschreibt, transformiert sich unter einer Eichtransformation mit chiralem Superfeld Λ gemäß

$$V \;\to\; V - i\left(\Lambda - \Lambda^{+}\right)\;.$$

Für das reelle Vektorfeld v_ν, welches im Vektorsuperfeld enthalten ist und das Eichboson dieser abelschen Eichgruppe beschreibt, gilt

$$v_\nu \;\to\; v_\nu - i\,\partial_\nu\left(B - B^{*}\right)\;,$$

wenn das chirale Superfeld $\Lambda\,(z)$ als skalare Komponente das Feld B besitzt. Dies entspricht genau der Eichtransformation des Eichfeldes in der QED.
Zu einer unter der Eichsymmetrie invarianten Lagrange-Dichte wird in der QED die kovariante Ableitung als minimale Kopplung des Eichfeldes an das Materiefeld definiert. Die kinetischen Terme mit der kovarianten Ableitung anstelle der gewöhnlichen Ableitung sind dann per Konstruktion invariant. Im Fall einer globalen Supersymmetrie haben wir gesehen, daß die kinetischen Terme von Skalarfeldern und Fermionfelder, die in einem chiralen bzw. anti-chiralen Superfeld zusammengefaßt werden, durch

$$\phi^{+}\,(z)\;\phi\,(z)\,\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta}$$

gegeben sind. Allerdings ist der Term $\phi^{+}\,\phi$ unter den obigen abelschen Eichtransformationen nicht länger invariant, sondern

$$\phi^{+}\,(z)\;\phi\,(z)\;\to\;\phi^{+}\,(z)\;\phi\,(z)\;\exp\left\{\,ig\left(\Lambda - \Lambda^{+}\right)\,\right\}\;.$$

Für supersymmetrische Verallgemeinerung der minimalen Kopplung des Vektorsuperfeldes V an das chirale Superfeld ϕ schreiben wir

$$\phi^{+}\,(z)\;\exp\left\{\,2gV\,\right\}\;\phi\,(z)$$

mit $g \in \mathbb{R}$, welches offensichtlich die gewünschte Invarianz besitzt und dessen $\theta\theta\bar\theta\bar\theta$-Komponente den kinetischen Beitrag zur Lagrange-Dichte bildet:

$$\begin{aligned}\phi^{+}\,(z)\;\exp\left\{\,2gV\,\right\}\;\phi\,(z)\,\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} \;&=\; -\frac{1}{4}\,\Box\,(A^{*}A) + (D^{\mu}A^{*})\,(D_\mu A) + \frac{i}{2}\left(\psi\sigma^{\mu}\partial_\mu\bar\psi - \partial_\mu\psi\sigma^{\mu}\bar\psi\right)\\ &\quad + |F|^{2} + gA^{*}MA + ig\sqrt{2}\left(A^{*}\psi\lambda - A\bar\psi\bar\lambda\right)\end{aligned}$$

mit aufgrund der Wess-Zumino-Eichung geeignet umdefinierten Komponenten der chiralen Superfelder ϕ und ϕ^{+} und mit den gewöhnlichen kovarianten Ableitungen

$$D_\mu A \;=\; \left(\partial_\mu + igv_\mu\right)A \qquad \text{und} \qquad D^{\mu}A^{*} \;=\; \left(\partial^{\mu} - igv^{\mu}\right)A^{*}\,.$$

Die zu dem Vektorfeld V gehörende supersymmetrische Feldstärke ist wie folgt definiert:

$$W^{\alpha} \;=\; -\frac{1}{4}\,\bar D\bar D\,D^{\alpha}\,V \qquad \text{und} \qquad \bar W_{\dot\alpha} \;=\; -\frac{1}{4}\,DD\,\bar D_{\dot\alpha}\,V\,, \tag{3.16}$$

wobei

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} \bar{W}_{\beta} = 0 \qquad \text{und} \qquad D_{\alpha} W_{\dot{\beta}} = 0$$

gilt. Die Feldstärken für ein Vektorsuperfeld werden also durch chirale bzw. anti-chirale Superfelder beschrieben. Für das Vektorsuperfeld V aus (3.12) erhalten wir

$$\begin{aligned} W^{\alpha}\left(y_c^{\mu}, \theta\right) &= i\lambda^{\alpha}\left(y_c^{\mu}\right) + \theta^{\alpha} M\left(y_c^{\mu}\right) - \theta\theta\, \sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\beta}}\, \partial_{\mu} \bar{\lambda}^{\dot{\beta}}\left(y_c^{\mu}\right) , \\ \bar{W}_{\dot{\alpha}}\left(y_a^{\mu}, \bar{\theta}\right) &= i\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\left(y_a^{\mu}\right) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} M\left(y_a^{\mu}\right) + \bar{\theta}\bar{\theta}\, \partial_{\mu} \lambda^{\beta}\left(y_a^{\mu}\right) \sigma^{\mu}{}_{\beta\dot{\alpha}} \end{aligned}$$

mit den bereits bei den chiralen und anti-chiralen Superfeldern eingeführten Variablen y_c^{μ} und y_a^{μ}. Die kinetischen Terme für das Vektorfeld V, also für das reelle Vektorfeld v_{ν} und seine Superpartner λ^{α} und $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$ erhalten wir aus den Feldstärken in der Form

$$\frac{1}{4} W^{\alpha} W_{\alpha}\Big|_{\theta\theta} + \frac{1}{4} \bar{W}_{\dot{\alpha}} \bar{W}^{\dot{\alpha}}\Big|_{\bar{\theta}\bar{\theta}} = \frac{1}{2} M^2 + \frac{i}{2}\left(\lambda\, \sigma^{\mu}\, \partial_{\mu} \bar{\lambda} - \partial_{\mu} \lambda\, \sigma^{\mu}\, \bar{\lambda}\right) + \frac{1}{4}\left(\partial^{\mu} v^{\nu} - \partial^{\nu} v^{\mu}\right)\left(\partial_{\mu} v_{\nu} - \partial_{\nu} v_{\mu}\right) .$$

Zusammen haben wir als supersymmetrische, eichinvariante Wirkung für eine abelsche Eichgruppe mit einem chiralen Superfeld ϕ und einem Vektorsuperfeld V

$$S = \int d^8 z \left(\phi^{+}(z) \exp\{2gV(z)\}\, \phi(z) + \frac{1}{4} W^{\alpha}(z)\, W_{\alpha}(z)\, \delta^2\left(\bar{\theta}\right) + \frac{1}{4} \bar{W}_{\dot{\alpha}}(z)\, \bar{W}^{\dot{\alpha}}(z)\, \delta^2(\theta)\right) .$$

Bei einer nicht-abelschen Eichgruppe $\mathcal{G}$ gehen wir zunächst von der unitären s-dimensionalen Darstellung der zugehörigen Lie-Algebra mittels hermitescher Matrizen $T^a \in \mathbb{R}^{s \times s}$ mit Eichindex $a = 1, \ldots, \dim \mathcal{G}$ aus, in der die chiralen Superfelder $\phi_i(z)$, $i = 1, \ldots, s$ gegeben sind:

$$\left[T^a, T^b\right] = i f_{abc}\, T^c$$

Die T^a sind die Generatoren der Symmetriegruppe $\mathcal{G}$ und die Strukturkonstanten f_{abc} der Lie-Algebra total antisymmetrisch. Für diese chiralen Superfelder ϕ sind

$$\begin{aligned} \phi_i(z) &\rightarrow \exp\{ig T^a \Lambda_a(z)\}_i{}^j\, \phi_j(z) , \\ \phi^{+\,i}(z) &\rightarrow \phi^{+\,j}(z) \exp\left\{-ig T^a \Lambda_a^{+}(z)\right\}_j{}^i \end{aligned}$$

Eichtransformationen einer supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie mit reellem Eichgruppenparameter g und chiralen Superfeldern Λ_a, $a = 1, \ldots, \dim \mathcal{G}$. Die Eich-Vektorsuperfelder V_a sind in der adjungierten Darstellung der Eichgruppe. Deren Transformationsverhalten legen wir fest durch die Forderung, daß die

Terme der minimalen Kopplung der Eich-Vektorsuperfelder an die chiralen Materie-Superfelder analog dem Fall einer abelschen Eichsymmetrie durch

$$\phi^{+\,i}\,(z)\,\exp\left\{\,2gV_aT^a\,\right\}_i^{\;j}\,\phi_j\,(z)\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$$

gegeben sind. Es ergibt sich

$$\exp\left\{\,V_a\,T^a\,\right\}_i^{\;j}\;\rightarrow\;\exp\left\{\,-i\Lambda_b^+\,T^b\,\right\}_i^{\;k}\exp\left\{\,V_c\,T^c\,\right\}_k^{\;l}\exp\left\{\,i\Lambda_d\,T^d\,\right\}_l^{\;j}\,. \tag{3.17}$$

Die Feldstärken der Vektorsuperfelder im Fall nicht-abelscher Eichsymmetrien sind durch

$$\begin{aligned} W_\alpha \;&:=\; -\frac{1}{4}\,\bar{D}\bar{D}\,\left(\exp\left\{\,-V_aT^a\,\right\}\,D_\alpha\,\exp\left\{\,V_bT^b\,\right\}\right)\,, \\ \bar{W}_{\dot{\alpha}} \;&:=\; -\frac{1}{4}\,DD\,\left(\exp\left\{\,-V_aT^a\,\right\}\,\bar{D}_{\dot{\alpha}}\,\exp\left\{\,V_bT^b\,\right\}\right) \end{aligned}$$

gegeben, wobei wir die Matrix-Indizes von W_α und $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ nicht explizit ausgeschrieben haben. Nach Konstruktion gilt wie im abelschen Fall, daß W_α ein chirales und $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ ein anti-chirales Superfeld ist. Damit können wir leicht das Transformationsverhalten der Feldstärken unter Eichtransformationen bestimmen: das Transformationsverhalten von $\exp\{\,-V_aT^a\,\}$ folgt aus (3.17), so daß

$$\begin{aligned} W_\alpha \;&\rightarrow\; -\frac{1}{4}\,\bar{D}\bar{D}\exp\left\{-i\Lambda_b T^b\right\}\exp\left\{-V_c T^c\right\}\exp\left\{i\Lambda_d^+\,T^d\right\}D_\alpha\exp\left\{-i\Lambda_b^+\,T^b\right\}\exp\left\{V_c T^c\right\}\exp\left\{i\Lambda_d T^d\right\} \\ &=\; -\frac{1}{4}\,\exp\left\{-i\Lambda_b T^b\right\}\bar{D}\bar{D}\exp\left\{-V_c T^c\right\}D_\alpha\exp\left\{i\Lambda_d^+\,T^d\right\}\exp\left\{-i\Lambda_b^+\,T^b\right\}\exp\left\{V_c T^c\right\}\exp\left\{i\Lambda_d T^d\right\} \\ &=\; -\frac{1}{4}\,\exp\left\{\,-i\Lambda_b T^b\,\right\}\bar{D}\bar{D}\,\exp\left\{\,-V_c T^c\,\right\}\,D_\alpha\,\exp\left\{\,V_c T^c\,\right\}\,\exp\left\{\,i\Lambda_d T^d\,\right\} \\ &=\; \exp\left\{\,-i\Lambda_b T^b\,\right\}\,W_\alpha\,\exp\left\{\,i\Lambda_d T^d\,\right\} \end{aligned}$$

und analog für $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$. Folglich muß der kinetische Term der Vektorfelder im Fall einer nicht-abelschen Eichsymmetriegruppe

$$\frac{1}{4}\,Tr\left\{\,W^\alpha\,(z)\;W_\alpha\,(z)\;\delta^2\left(\bar{\theta}\right)+\bar{W}_{\dot{\alpha}}\,(z)\;\bar{W}^{\dot{\alpha}}\,(z)\;\delta^2\,(\theta)\,\right\}$$

sein. Somit ist die Wirkung für chirale Superfelder $\phi_i\,(z)$ in einer Darstellung einer nicht-abelschen Eichgruppe $\mathcal{G}$ mit hermiteschen Generatoren T^a und den entsprechenden Vektorsuperfeldern $V_a\,(z)$, $a=1,\ldots,\dim\,\mathcal{G}$ wie folgt gegeben:

$$S \;=\; \int d^8z\left(\phi^{+\,i}\,(z)\,\exp\left\{\,2gV_aT^a\,\right\}_i^{\;j}\,\phi_j\,(z)+\frac{1}{4}\,Tr\left\{W^\alpha\,(z)\;W_\alpha\,(z)\;\delta^2\left(\bar{\theta}\right)+\bar{W}_{\dot{\alpha}}\,(z)\;\bar{W}^{\dot{\alpha}}\,(z)\;\delta^2\,(\theta)\right\}\right)\,.$$

Bis jetzt haben wir nur Beiträge zur supersymmetrischen Wirkung betrachtet, die die kinetischen Terme bzw. die Terme minimaler Kopplung verallgemeinert haben. Nun wollen wir die Beiträge von Wechselwirkungstermen angeben. Bei der Behandlung chiraler Superfelder zur Beschreibung von Materie-Superfeldern wurde gezeigt, daß das Produkt endlich vieler chiraler Superfelder erneut ein chirales Superfeld darstellt. Im Fall zweier chiraler Superfelder lautet die $\theta\theta$-Komponente des Produktes

$$A_1\left(y_c^\mu\right)F_2\left(y_c^\mu\right)+A_2\left(y_c^\mu\right)F_1\left(y_c^\mu\right)-\psi_1\left(y_c^\mu\right)\,\psi_2\left(y_c^\mu\right)\ ,$$

wenn A_i für die skalaren Komponenten, ψ_i für die fermionischen Komponenten und F_i für die Hilfsfelder in den $\theta\theta$-Komponenten der zwei chiralen Superfelder stehen. Für ein Produkt aus drei chiralen Superfeldern erhalten wir

$$A_1A_2F_3+A_1A_3F_2+A_1A_2F_3-\left(A_1\psi_2\psi_3+A_2\psi_1\psi_3+A_3\psi_1\psi_2\right)\ .$$

Wir haben die Raumzeitargumente weggelassen, denn sie sind die gleichen wie oben. Die $\theta\theta$-Komponenten der Produkte chiraler Superfelder transformieren unter Supersymmetrie-Transformationen in eine totale Raumzeitableitung und sind deshalb geeignete Beiträge für eine supersymmetrische Lagrangedichte. Die Beiträge, welche die Wechselwirkungen verschiedener Superfelder beschreiben, werden im sogenannten Superpotential $W\left(z\right)$ zusammengefaßt. Es enthält alle Kopplungsterme, die bei vorgegebener Eichsymmetrie erlaubt sind und höchstens aus drei Superfeldern bestehen. Produkte von vier und mehr chiralen Superfeldern liefern Beiträge, welche die Theorie nicht-renormierbar machen. Das Superpotential ist demnach von der allgemeinen Form

$$W\left(z\right)\ =\ a_i\phi_i\left(z\right)+b_{ij}\,\phi_i\left(z\right)\phi_j\left(z\right)+c_{ijk}\,\phi_i\left(z\right)\phi_j\left(z\right)\phi_k\left(z\right)\ ,$$

insofern die auftretenden Kombinationen der chiralen Superfelder $\phi_i\left(z\right)$ invariant unter der zugrundeliegenden Eichsymmetrie sind. Der Beitrag des Superpotentials zur Wirkung ist

$$S_{superpot}=\int d^8z\left(W\left(z\right)\,\delta^2\left(\bar{\theta}\right)+W^*\left(z\right)\,\delta^2\left(\theta\right)\right)\ ,$$

weil das Superpotential W als Summe von Produkten chiraler Superfelder selbst ein chirales Superfeld ist.

3.6 Brechung der Supersymmetrie

Die globale Supersymmetrie als Symmetrie der Wirkung eines physikalischen Systems muß nicht exakt, sondern kann auch gebrochen sein. Die spontane Brechung der elektroschwachen Symmetrie $SU(2)\times U(1)$ Symmetrie auf eine $U(1)$ im Standard Modell der Teilchenphysik ist ein Beispiel für eine energieabhängige Gültigkeit einer Symmetrie eines Systems.
Exakte Supersymmetrie fordert nicht nur gleiche Transformationseigenschaften der Superpartner, sondern im besonderen, weil die Generatoren der Supersymmetrie mit dem Generator der Translationen im Minkowski-Raum, dem Impulsoperator, kommutieren, gleiche Massen. Dies bedeutete konkret, daß ein Selektron mit gleicher Masse wie eine Elektron existiert. Ein solches skalares Teilchen konnte bis heute nicht gefunden werden, weshalb man annimmt, daß die Masse des Selektrons deutlich größer sein muß als

die des Elektrons. Also müssen wir in einem realistischen Modell zur Beschreibung der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen die Brechung der Supersymmetrie mit berücksichtigen.
Eine explizite Brechung der Supersymmetrie würde bedeuten, daß bei beliebigen Energieskalen, die kleiner sind als die Energieskala der Supersymmetriebrechung, alle guten Eigenschaften, welche erst den Rahmen zur Postulierung dieser Symmetrie gebildet haben, nicht mehr gültig sind.
Spontane Supersymmetrie-Brechung bedeutet, daß nur der Grundzustand als Zustand tiefster Energie nicht invariant unter Supersymmetrie-Transformationen ist. Ansonsten gelten alle Eigenschaften, wie im Fall einer ungebrochenen Supersymmetrie auch. Es läßt sich jedoch zeigen, daß Modelle mit spontan gebrochener Supersymmetrie sehr starken Einschränkungen unterworfen sind, welche es letztlich unmöglich machen, ein realistisches Modell mit spontaner Supersymmetrie-Brechung in Erwägung zu ziehen.
Im Fall der Supersymmetrie gibt es auch noch eine dritte Möglichkeit, die Symmetrie-Brechung zu erreichen: die sogenannte sanfte Brechung der Supersymmetrie. Bei dieser Variante, die eigentlich eine explizite Brechung der Supersymmetrie darstellt, addiert man zur Lagrange-Dichte des beschriebenen physikalischen Systems noch sogenannte sanfte Brechungsterme. Deren Beiträge zur Wirkung sind nicht invariant unter globalen Supersymmetrie-Transformationen. Andererseits lassen sich diese zusätzlichen Terme so wählen, daß keine quadratisch divergenten Beiträge zu Skalarmassen auftreten, welche im Rahmen der Renormierung der Theorie nicht erwünscht sind. Dies war aus phänomenologischer Sicht gerade ein bedeutender Anlaß, eine Invarianz unter Tranformationen aus der Super-Poincaré-Gruppe zu postulieren. Die allgemeine Form dieser die Supersymmetrie sanft brechenden Terme fanden Girardello und Grisaru [33]: gaugino-Massenterme, Massenterme für Skalare, bi- und trilineare Kopplungsterme skalarer Komponenten. Diese sanft brechenden Terme enthalten eine sehr große Zahl an Parametern, so daß zum Beispiel das MSSM mit sanft gebrochener Supersymmetrie deutlich mehr freie Parameter besitzt als das Standard Modell.

Kapitel 4

Das Minimale Supersymmetrische Standard Modell (MSSM)

4.1 Teilcheninhalt des MSSM

Das MSSM ist eine supersymmetrische Erweiterung des Standard Modells (SM) der Teilchenphysik. Zusätzlich zur Poincare-Symmetrie des SM wird noch eine globale einfache $N = 1$ Supersymmetrie postuliert wird, so daß das Modell invariant unter der sogenannten Super-Poincare-Gruppe ist. Weiterhin wird vom SM die lokale Eichsymmetriegruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ übernommen.
Um als realistisches Modell zur Beschreibung der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen zu gelten, muß das MSSM eine Brechung der Supersymmetrie zulassen. Diese wird durch Beiträge sanfter Brechungsterme zur Lagrange-Dichte des MSSM realisiert, die keine zusätzlichen quadratisch divergenten Beiträge zu Skalarmassen in höheren Ordnungen der Störungstheorie liefern. Demnach stellt das MSSM eine relativistische, lokale und effektive Quantenfeldtheorie dar, welche eine einfache, aber sanft gebrochene Supersymmetrie und die oben angegebene lokale Eichsymmetrie besitzt.

Die Minimalitätseigenschaft des MSSM ist die Zahl der verwendeten Teilchen: zu jedem Teilchen, das im Standard Modell beschrieben wird (SM-Teilchen), postuliert man gemäß der Supersymmetrie einen Superpartner, welcher sich im Spin um $\frac{1}{2}$ von dem des SM-Teilchens unterscheidet, aber sonst gleiche Eigenschaften und gleiches Transformationsverhalten unter den inneren Symmetrien aufweist. Den Fermionen des SM werden als Superpartner Skalare zugeordnet, die sogenannten Sfermionen, wohingegen den Eichbosonen und dem Higgs-Skalar Fermionen als Superpartner zugewiesen werden, die eine Endung -ino tragen (Photino, Winos, Gluinos, Higgsinos). Im MSSM werden die Teilchen nicht wie im SM durch (gewöhnliche) Quantenfelder beschrieben, sondern durch chirale Superfelder und Vektorsuperfelder. Diese sind Funktionen auf dem Superraum, der eine Erweiterung des Minkowski-Raumes um insgesamt vier antikommutierende Dimensionen darstellt. In diesen Superfeldern sind jeweils ein SM-Teilchen und sein Superpartner zusammengefaßt, einschließlich Hilfsfeldern, die keine Dynamik besitzen, weil keine Ableitungen in der Lagrange-Dichte auftauchen. Mittels ihrer algebraischen Bewegungsgleichungen lassen sich die Hilfsfelder eliminieren. Die chiralen Superfelder verallgemeinern die Materie-Quantenfelder der Fermionen im SM mit fester Händigkeit und das Higgs-Feld, während die Vektorsuperfelder die Vektorfelder des SM, deren fermionische Superpartner und Hilfsfelder enthalten.

Eine Besonderheit ist zu erwähnen: im Gegensatz zum SM, wo ein Higgs-Dublett eingeführt wurde zur spontanen Brechung der $SU(2) \times U(1)$ Eichsymmetrie, benötigt man im MSSM deren schon zwei. Der Grund liegt nicht auf der Hand: die eichinvarianten Yukawa-Wechselwirkungen der Higgs-Superfelder mit den chiralen Superfeldern sind im Superpotential zusammengefaßt, welches eine holomorphe Funktion der Superfelder ist. Das bedeutet, daß es nicht konjugiert komplexe Superfelder, also anti-chirale Superfelder enthalten darf. Weil aber aus Gründen der Eichinvarianz nicht ein chirales Higgs-Superfeld so mit den

Superfeldern der Quarks und Squarks kombiniert werden kann, um später Massenterme für alle Quarks aus dem Super-Higgs-Effekt zu erhalten, müssen wir ein zweites chirales Higgs-Superfeld einführen. Im Standard Modell konnten wir das hermitesch konjugierte des Higgs-Dubletts im postulierten Potential im Higgs-Sektor verwenden.
Eine weitere Begründung für die Notwendigkeit eines weiteren chiralen Higgs-Superfeldes ist die folgende: das Higgs-Superfeld, welches das SM-Higgs-Feld umfaßt, enthält noch dessen Superpartner, ein Higgsino. Damit ist die Summe der Eigenwerte der Hyperladung Y aller Fermionen nicht mehr Null, welches sie im SM ist. Diese nichtverschwindende Summe der Eigenwerte ist die Ursache für Anomalien, welche große theoretische Schwierigkeiten mit sich bringen. Ein Modell, welches die Natur und die Wechselwirkungen der elementaren Teilchen in einem bestimmten Energiebereich korrekt beschreiben soll, kann diese Anomalien nicht zulassen. Damit ist klar, daß ohne das zweite Higgs-Superfeld mindestens ein Fermion im Modell fehlt, um diese Summe der Eigenwerte wieder zu Null zu machen. Und aus Minimalitätsgründen reicht ein weiteres chirales Superfeld aus, das zweite Higgs-Superfeld.

Aufgrund der oben schon angesprochenen Tatsache, daß das Superpotential eine holomorphe Funktion der Superfelder ist, brauchen wir keine anti-chirale Superfelder zur Beschreibung rechtshändiger Fermionen zu verwenden. Deshalb beschreiben die chiralen Superfelder, die trivial unter der $SU(2)$ transformieren, nicht die rechtshändigen Teilchen, sondern die ladungskonjugierten linkshändigen Fermionen. Tabelle 1 listet die chiralen Superfelder des MSSM mit deren Transformationseigenschaften unter der lokalen Eichsymmetrie auf einschließlich den dadurch beschriebenen Teilchen. In Tabelle zwei sind die Vektorsuperfelder des MSSM und die darin enthaltenen Teilchen angegeben.

Die Vektorsuperfelder können in der Wess-Zumino-Eichung auf eine einfache Form gebracht werden, bei der bis auf das Hilfsfeld in der höchsten Komponente keine unphysikalischen Freiheitsgrade mehr auftreten. Allerdings bricht diese Eichwahl die Supersymmetrie. Für die chiralen Superfelder ändert sich an der Form nichts (wohl aber werden durch diese Eichwahl die Komponentenfelder geändert), aber die supersymmetrischen Feldstärken der Vektorsuperfelder im MSSM lassen sich in der Wess-Zumino-Eichung leicht angeben:

$$W_\alpha(z) = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}\,D_\alpha V(z)\,, \tag{4.1}$$

$$\vec{W}_\alpha(z) = \frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}\left[D_\alpha \vec{V} + ig_2\left(D_\alpha\vec{V}\right)\times\vec{V}\right], \tag{4.2}$$

$$W^r_\alpha(z) = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}\left[D_\alpha V^r(z) + ig_3\,f^{rst}\,(D_\alpha V^s)\,V^t\right]. \tag{4.3}$$

Sie stellen die supersymmetrische Verallgemeinerung der kinetischen Terme der Vektorsuperfelder mittels deren kovarianten Feldstärke-Tensoren dar. Hierbei stehen, wie schon früher verwendet, D_α und $\bar{D}^{\dot{\alpha}}$ für die supersymmetrischen kovarianten Ableitungen, g_2 bzw. g_3 für die Eichgruppenparameter der $SU(2)$ bzw. der $SU(3)$ und die f^{rst} für die Strukturkonstanten der $SU(3)$.

chirale Superfelder	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$	Skalarfelder	Fermionfelder	Hilfsfelder
$\mathbf{L}_i$	–	2	-1	$\begin{pmatrix} L^0 \\ L^- \end{pmatrix}_i$	$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}_i$	$\begin{pmatrix} F_L^u \\ F_L^d \end{pmatrix}_i$
$\mathbf{E}_i$	–	–	2	$(E^+)_i$	$(e_L^c)_i$	$(F_E)_i$
$\mathbf{Q}_{iA}$	3	2	$\frac{1}{3}$	$\begin{pmatrix} Q^+ \\ Q^- \end{pmatrix}_{iA}$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}_{iA}$	$\begin{pmatrix} F_Q^u \\ F_Q^d \end{pmatrix}_{iA}$
$\mathbf{U}_i^A$	$\bar{3}$	–	$-\frac{4}{3}$	$(U^-)_i^A$	$(u_L^c)_i^A$	$(F_U)_i^A$
$\mathbf{D}_i^A$	$\bar{3}$	–	$\frac{2}{3}$	$(D^+)_i^A$	$(d_L^c)_i^A$	$(F_D)_i^A$
$\mathbf{H}_1$	–	2	-1	$\begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{H}_1^0 \\ \tilde{H}_1^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} F_1^u \\ F_1^d \end{pmatrix}$
$\mathbf{H}_2$	–	2	1	$\begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{H}_2^+ \\ \tilde{H}_2^0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} F_2^u \\ F_2^d \end{pmatrix}$

Tabelle 1: Chirale Superfelder des MSSM in ihren Darstellungen der Eichgruppen und die durch sie beschriebenen Teilchen. Der tiefgestellte Index i ist ein Generationenindex und läuft von 1 bis 3, der Index A ist ein $SU(3)$-Index, der ebenfalls die Werte 1, 2, 3 annehmen kann.

Vektorsuperfelder	$SU(3)$	$SU(2)$	$U(1)$	Fermionfelder	Vektorfelder	Hilfsfelder
G^a	8	–	–	$\tilde{g}^a$	g_μ^a	D_g^a
V^b	–	3	–	$\tilde{w}^b$	W_μ^b	D_W^b
V	–	–	1	$\tilde{B}$	B_μ	D_B

Tabelle 2: Vektorsuperfelder des MSSM in den adjungierten Darstellungen der Eichgruppen mit $a = 1, \ldots, 8$ und $b = 1, \ldots, 3$.

4.2 Die Wirkung des MSSM

Die Wirkung für das MSSM setzt sich analog der Wirkung für das Standard Modell unter Berücksichtigung der Invarianz unter globalen Supersymmetrie-Transformationen zusammen. Wir teilen sie in die folgenden

Anteile auf: einen Anteil der Vektorsuperfelder, der deren kinetische Terme und die Wechselwirkungen untereinander supersymmetrisch verallgemeinert, einen Anteil, der die supersymmetrische minimale Kopplung der chiralen Superfelder an die Vektorsuperfelder berücksichtigt, das Superpotential als Quelle aller eich- und supersymmetrie-invarianter Kopplungen und zum Schluß noch einen Anteil, der die sanfte Brechung der Supersymmetrie bewirkt:

$$S_{MSSM} = \int d^8z \, \mathcal{L}_{MSSM}(z) \tag{4.4}$$

mit

$$\mathcal{L}_{MSSM}(z) = \mathcal{L}_{eich}(z) + \mathcal{L}_{min.Kopp}(z) + \mathcal{L}_{superpot}(z) - \mathcal{L}_{sanft}(z) \, . \tag{4.5}$$

Die Beiträge im einzelnen:

$$\mathcal{L}_{eich}(z) = \left\{ \frac{1}{4} W^{\alpha}(z) W_{\alpha}(z) + \frac{1}{4} \vec{W}^{\alpha}(z) \vec{W}_{\alpha}(z) + \frac{1}{4} W^{r\,\alpha}(z) W^{r}{}_{\alpha}(z) \right\} \delta^2\left(\bar{\theta}\right) + h.c. \tag{4.6}$$

mit den supersymmetrischen Feldstärken aus (4.1), (4.2) und (4.3) und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{min.Kopp}(z) = \; & \mathbf{L}^{+}(z) \exp\left\{ 2g_2 \vec{V}(z) \frac{\vec{\sigma}}{2} \right\} \exp\left\{ -g_1 V(z) \right\} \mathbf{L}(z) \\ & + \overline{\mathbf{E}}(z) \exp\left\{ 2g_1 V(z) \right\} \mathbf{E}(z) \\ & + \mathbf{Q}^{+}(z) \exp\left\{ 2g_3 V^{r}(z) \frac{\lambda^{r}}{2} \right\} \exp\left\{ 2g_2 \vec{V}(z) \frac{\vec{\sigma}}{2} \right\} \exp\left\{ \frac{1}{3} g_1 V(z) \right\} \mathbf{Q}(z) \\ & + \overline{\mathbf{U}}(z) \exp\left\{ 2g_3 V^{r}(z) \frac{\lambda^{r}}{2} \right\} \exp\left\{ -\frac{4}{3} g_1 V(z) \right\} \mathbf{U}(z) \\ & + \overline{\mathbf{D}}(z) \exp\left\{ 2g_3 V^{r}(z) \frac{\lambda^{r}}{2} \right\} \exp\left\{ \frac{2}{3} g_1 V(z) \right\} \mathbf{D}(z) \\ & + \mathbf{H}_1^{+}(z) \exp\left\{ 2g_2 \vec{V}(z) \frac{\vec{\sigma}}{2} \right\} \exp\left\{ -g_1 V(z) \right\} \mathbf{H}_1(z) \\ & + \mathbf{H}_2^{+}(z) \exp\left\{ 2g_2 \vec{V}(z) \frac{\vec{\sigma}}{2} \right\} \exp\left\{ g_1 V(z) \right\} \mathbf{H}_2(z) \, . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Die variierenden Exponenten für die $U(1)$-Symmetrie haben die unterschiedlichen Eigenwerte der Superfelder des Hyperladungsoperators Y als Ursache; ansonsten tauchen dem Transformationsverhalten der Superfelder entsprechende Exponentialterme auf.

Das Superpotential $W(z)$ selbst enthält alle eichinvarianten Kopplungsterme von Superfeldern. Aus Gründen der Renormierbarkeit treten höchstens trilineare Terme in den Superfeldern auf. Als linearer Term in den Superfeldern kommt nur der Fayet-Iliopoulos-Term [34] in Frage, und das auch nur, wenn eine $U(1)$ Gruppe Bestandteil der Eichsymmetriegruppe ist. Dann ist die höchste Komponente des Vektorsuperfeldes für diese $U(1)$ Eichgruppe supersymmetrisch und eichinvariant. Ein hieraus folgender Beitrag zum Potential des MSSM, um dies vorweg zu nehmen, würde eine spontane Brechung der Supersymmetrie bewirken. Weil diese aus phänomenologischen Gründen nicht erwünscht ist, wird der Fayet-Iliopoulos-Term nicht beachtet und weggelassen. Deshalb ist das Superpotential im Falle des MSSM durch

$$\begin{aligned}
W(z) \;=\; & \mu\,\mathbf{H}_1^T\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_2 + \sum_{i,j=1}^{3} y^e_{ij}\,\mathbf{L}_i^T\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_1\,\mathbf{E}_j \\
& + \sum_{i,j,A=1}^{3} \left(y^d_{ij}\,\mathbf{Q}^T_{Ai}\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_1\,\mathbf{D}^A_j + y^u_{ij}\,\mathbf{Q}^T_{Ai}\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_2\,\mathbf{U}^A_j \right) \\
& + \sum_{i,j=1}^{3} \lambda^h_{ij}\,\mathbf{L}_i^T\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_j + \sum_{i,j,k=1}^{3} \lambda^e_{ijk}\,\mathbf{L}_i^T\,(i\tau_2)\,\mathbf{L}_j\,\mathbf{E}_k + \sum_{i,j,k,A=1}^{3} \lambda^d_{ijk}\,\mathbf{Q}^T_{Ai}\,(i\tau_2)\,\mathbf{L}_j\,\mathbf{D}^A_k \\
& + \sum_{i,j,k=1}^{3} \lambda^u_{ijk} \sum_{A,B,C=1}^{3} \epsilon_{ABC}\,\mathbf{U}^A_i\,\mathbf{D}^B_j\,\mathbf{D}^C_k
\end{aligned} \tag{4.8}$$

gegeben. Hierbei sind explizit die Generationenindizes i und j sowie die Indizes der Eichgruppe $SU(3)$, A, angegeben, die alle Werte von 1 bis 3 annehmen können. Die Dublett-Struktur der Superfelder bezüglich der $SU(2)$-Eichsymmetrie ist durch Verwendung der Matrixschreibweise sichtbar, wobei

$$i\tau_2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und ϵ_{ABC} der total antisymmetrische Tensor dritter Stufe ist. Offenbar würden Wechselwirkungen gemäß Termen in der dritten und vierten Zeile von (4.8) eine Verletzung der Leptonen- und/oder der Baryonenzahl bewirken, welche im Standard Modell jeweils für sich erhalten sind. Um die Gültigkeit dieser Symmetrien auch im MSSM aufrechtzuerhalten, wird eine neue Symmetrie postuliert, die sogenannte R-Parität:

$$R \;=\; (-1)^{3\,B+L+2\,S}\;,$$

wenn B für die Baryonenzahl, L für die Leptonenzahl und S für den Spin des Feldes steht. Man fordert gerade R-Parität für alle Wechselwirkungsterme. Diese Forderung bewirkt, daß genau die Terme in der dritten und vierten Zeile von (4.8) nicht mehr invariant sind und somit entfallen.
Das Superpotential für das MSSM, genauer das MSSM mit R-Parität-Erhaltung, lautet demnach

$$\begin{aligned}
W_{MSSM}(z) \;=\; & \mu\,\mathbf{H}_1^T\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_2 + \sum_{i,j=1}^{3} y^e_{ij}\,\mathbf{L}_i^T\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_1\,\mathbf{E}_j \\
& + \sum_{i,j,A=1}^{3} \left(y^d_{ij}\,\mathbf{Q}^T_{Ai}\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_1\,\mathbf{D}^A_j + y^u_{ij}\,\mathbf{Q}^T_{Ai}\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_2\,\mathbf{U}^A_j \right)\,.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Der Beitrag des Superpotentials zur Lagrangedichte des MSSM ist

$$\mathcal{L}_{superpot}(z) \; = \; W_{MSSM}(z)\,\delta^2\left(\bar{\theta}\right) \, + \, W^*_{MSSM}(z)\,\delta^2(\theta)\;. \tag{4.10}$$

Der Beitrag der die Supersymmetrie sanft brechenden Terme lautet wie folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{sanft}(z) \;=\; & \Bigg(m^2_{H_1}\left(\left|H^0_1\right|^2 + \left|H^-_1\right|^2\right) + m^2_{H_2}\left(\left|H^+_2\right|^2 + \left|H^0_2\right|^2\right) \\
& + \sum_{i=1}^{3}\left(m^2_{L_i}\left(\left|L^0_i\right|^2 + \left|L^-_i\right|^2\right) + m^2_{E_i}\left|E^+_i\right|^2\right) \\
& + \sum_{i,A=1}^{3}\left(m^2_{Q_i}\left(\left|Q^+_{iA}\right|^2 + \left|Q^-_{iA}\right|^2\right) + m^2_{D_i}\left|D^{A+}_i\right|^2 + m^2_{U_i}\left|U^{A-}_i\right|^2\right)\Bigg)\,\delta^2(\theta)\,\delta^2\left(\bar{\theta}\right) \\
& + \Bigg(B\,\mu\,\mathbf{H}^T_1\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_2 + \sum_{i,j=1}^{3} A^e_{ij}\,y^e_{ij}\,\mathbf{L}^T_i\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_1\,\mathbf{E}_j + \sum_{i,j,A=1}^{3} A^d_{ij}\,y^d_{ij}\,\mathbf{Q}^T_{Ai}\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_1\,\mathbf{D}^A_j \\
& + \sum_{i,j,A=1}^{3} A^u_{ij}\,y^u_{ij}\,\mathbf{Q}^T_{Ai}\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_2\,\mathbf{U}^A_j \;+ h.c.\Bigg)\,\delta^2(\theta)\,\delta^2\left(\bar{\theta}\right)\;,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

wobei eine Vielzahl neuer Parameter auftritt: $m^2_{H_1}$, $m^2_{H_2}$, $m^2_{L_i}$, $m^2_{Q_i}$, $m^2_{D_i}$, $m^2_{U_i}$, B und die Matrizen A^e, A^d und A^u. In den ersten drei Zeile treten skalare Massenterme für die Sfermionen auf, und in den letzten beiden Zeilen werden die Kopplungen des Superpotentials mit neuen Koeffizienten versehen. Diese Terme entstehen durch eine nicht supersymmetrische Auswertung von Produkten von Superfeldern. Deshalb wird die Supersymmetrie durch diese Terme in der Lagrange-Dichte des MSSM explizit, aber sanft, gebrochen.

4.3 Massenterme für die Fermionen im MSSM

In den trilinearen Yukawa-Kopplungen im Superpotential mit Higgs-Superfelder sind die folgenden Terme enthalten:

$$\sum_{i,j=1}^{3} y^e_{ij}\,(e_L)_i\,H^0_1\,(e^c_L)_j + \sum_{i,j,A=1}^{3} y^d_{ij}\,(d_L)_{iA}\,H^0_1\,(d^c_L)^A_j + \sum_{i,j,A=1}^{3} y^u_{ij}\,(u_L)_{iA}\,H^0_2\,(u^c_L)^A_j + c.c.\,. \tag{4.12}$$

Bei geeigneter Definition der Masseneigenzustände der Fermionen im MSSM liefern diese Ausdrücke Massenterme der Fermionen, falls die neutralen Komponenten der zwei Higgs-Superfelder $\mathbf{H}_1$ und $\mathbf{H}_2$ durch VEWe ungleich Null ersetzt werden. Die anderen Terme in den Yukawa-Kopplungen in W aus (4.9) stellen keine weiteren Massenterme, sondern Wechselwirkungen der Felder dar.
Aus der Form der Massenterme erkennen wir, daß die Erzeugung von Fermion-Massen im MSSM mittels des Analogon des Higgs-Effektes im SM nur dann konsistente Ergebnisse liefern kann, wenn beide ungeladenen Higgs-Felder nichtverschwindende VEWe im Minimum des Potentials des MSSM besitzen.

4.4 Die Hilfsfelder im MSSM

Die Materie-Superfelder des MSSM enthalten neben den niedrigsten skalaren Komponenten und den fermionischen Komponenten, den θ-Komponenten, auch noch bosonische Komponenten als Koeffizienten von $\theta\theta$. Die Felder der höheren Komponenten sind in Abhängigkeit der skalaren Komponente und der fermionischen Feldern gegeben. Die $\theta\theta$-Komponenten der chiralen Superfelder sind sogenannte Hilfsfelder. In der Lagrange-Dichte treten keine Zeitableitungen dieser Komponenten auf, die Felder besitzen also keine Dynamik. Die Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen dieser Felder lassen sich deshalb sehr einfach lösen, und wir können die Ausdrücke für diese Komponenten wieder in die Lagrange-Dichte einsetzen.

Anhand der Komponenten F_{E_i} demonstrieren wir dies. Die einzigen Terme der Lagrange-Dichte, die diese Komponenten enthalten, lauten

$$\sum_{i=1}^{3} |F_{E_i}|^2 + \left(\sum_{i,j=1}^{3} y^e_{ij} \left(L_i^- H_1^0 - L_i^0 H_1^- \right) F_{E_j} + c.c. \right) \tag{4.13}$$

und haben ihren Ursprung in $\mathcal{L}_{min.Kopp}$ und $\mathcal{L}_{Superpot}$. Somit ergeben sich die Euler-Lagrange-Gleichungen für die als voneinander unabhängig angesehenen Variablen F_{Ei} und F^*_{Ei}

$$F^*_{E_i} = -\frac{\partial}{\partial F_{E_i}} \left(W_{MSSM}|_{\theta\theta} \right) \qquad \text{und} \qquad F_{E_i} = -\frac{\partial}{\partial F^*_{E_i}} \left(W^*_{MSSM}|_{\bar\theta\bar\theta} \right) .$$

Die Ableitung der $\theta\theta$-Komponente des Superpotentials nach einem Hilfsfeld, die nur skalare Komponenten enthalten darf, können wir auch als partielle Ableitung der niedrigsten Komponente des Superpotentials nach der entsprechenden skalaren Komponente des gleichen Superfeldes schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial F_{E_i}} \left(W_{MSSM}|_{\theta\theta} \right) = \frac{\partial}{\partial E_i^+} \left(W|_{\theta=\bar\theta=0} \right) .$$

Deshalb erhalten wir unter Verwendung der obigen Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen für die Terme in (4.13) folgenden Ausdruck:

$$-\sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial}{\partial E_i^+} W|_{\theta=\bar\theta=0} \right|^2 .$$

Analoge Terme ergeben sich im Fall der anderen Hilfsfelder der Materie-Superfelder.
Zusammen können wir die Summe aller Terme in der Lagrange-Dichte, die die Hilfsfelder der chiralen Superfelder enthalten und Beiträge zum Potential darstellen, wie folgt schreiben:

$$-\sum_{\phi} \left| \frac{\partial}{\partial \phi} W|_{\theta=\bar\theta=0} \right|^2 ,$$

wobei ϕ für eine beliebige skalare Komponente steht.

Die prinzipiell gleiche Situation liegt bei den Vektorsuperfeldern und deren höchsten Komponenten vor.

Auch diese können in der Lagrange-Dichte eliminiert werden. Das reelle Hilfsfeld des Photon-Superfeldes, D_B, tritt in folgenden Termen der Lagrange-Dichte auf, die aus $\mathcal{L}_{eich}$ und $\mathcal{L}_{min.Kopp}$ stammen:

$$\frac{1}{2}D_B^2 + g_1 \sum_A A^* D_B A \,,$$

wobei die Summe über alle skalaren Felder im MSSM läuft. Es treten keine Zeitableitungen der Hilfsfelder auf. Unter Verwendung der Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen für D_B,

$$D_B \;=\; -g_1 \sum_A A^* A \,,$$

können wir durch Einsetzen in die Lagrange-Dichte folgenden Term gewinnen:

$$-\frac{1}{2}D_B^2 \;=\; -\, g_1^2 \left(\sum_A A^* A \right)^2 .$$

Analog verhält es sich mit den Hilfsfeldern der anderen Vektorsuperfelder. Die entsprechenden Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen lauten:

$$D_W^b \;=\; -\, g_2 \sum_A A^{*\,j} \frac{1}{2} \left(\sigma^b\right)_j{}^i A_i \,, \qquad b \in \{1,2,3\}$$

und

$$D_g^a \;=\; -\, g_3 \sum_A A^{*\,j} \frac{1}{2} \left(\lambda^a\right)_j{}^i A_i \,, \qquad a \in \{1,\ldots,8\} \;,$$

wobei die Summe über alle skalaren Felder des MSSM reicht, die Komponenten eines Superfeldes sind, welches nicht trivial unter der entsprechenden Eichgruppe transformiert. Alle Terme in der Lagrange-Dichte, die die Hilfsfelder der Vektorsuperfelder enthalten und zum Potential beitragen, lassen sich in der folgenden Form darstellen:

$$-\frac{1}{2} \sum_G g_G^2 \sum_{a=1}^{\dim G} \left(\sum_\phi \phi^+ T^a \phi \right)^2 \,,$$

wobei G für die verschieden möglichen Eichgruppen steht und T^a, $a = 1, \ldots, \dim G$ für die Generatoren der Eichgruppe sowie ϕ für alle skalaren Felder, die Komponenten eines Superfeldes sind, das nicht in der trivialen Darstellung der jeweiligen Eichgruppe ist.

4.5 Das Potential im MSSM

Im Gegensatz zum Standard Modell treten im MSSM viele skalare Teilchen auf, denn zu jedem Fermion existiert ein skalarer Superpartner, das zugehörige Sfermion. Im SM selbst gibt es keine Skalare, nur im

Higgs-Sektor tritt das skalare Higgs-Teilchen auf. Unter dem Potential versteht man die negative Summe aller Terme in der Lagrange-Dichte eines Modells, welche nur skalare Teilchen enthalten, aber keine kinetischen Terme darstellen. Von diesen Termen gibt es im MSSM genügend, weil viele skalare Teilchen vorkommen. Die skalaren Felder, die im Potential vorkommen, werden als konstant angenommen, da ihre Werte als VEWe gedeutet werden, die keinerlei Raumzeitabhängigkeit besitzen sollen.
Wir wollen die Struktur der Beiträge zum Potential im MSSM herausarbeiten. Wie oben bei der Eliminierung der Hilfsfelder gesehen treten folgende Ausdrücke in der Lagrange-Dichte auf, welche nur skalare Komponenten enthalten:

$$-\sum_\phi \left| \frac{\partial}{\partial \phi} W|_{\theta=\bar\theta=0} \right|^2 - \frac{1}{2} \sum_G g_G^2 \sum_{a=1}^{\dim G} \left(\sum_\phi \phi^+ T^a \phi \right)^2 - \int d^2\theta \int d^2\bar\theta \, \mathcal{L}_{sanft} \, .$$

Mit folgenden Abkürzungen werden die drei verschiedenen Beiträge zum Potential benannt:

$$V_F = \sum_\phi \left| \frac{\partial}{\partial \phi} W|_{\theta=\bar\theta=0} \right|^2 , \tag{4.14}$$

$$V_D = \frac{1}{2} \sum_G g_G^2 \sum_{a=1}^{\dim G} \left(\sum_\phi \phi^+ T^a \phi \right)^2 , \tag{4.15}$$

und

$$\begin{aligned} V_{sanft} = \; & m_{H_1}^2 \left(\left|H_1^0\right|^2 + \left|H_1^-\right|^2 \right) + m_{H_2}^2 \left(\left|H_2^+\right|^2 + \left|H_2^0\right|^2 \right) + \sum_{i=1}^3 m_{L_i}^2 \left(\left|L_i^0\right|^2 + \left|L_i^-\right|^2 \right) \\ & + \sum_{i=1}^3 m_{E_i^+}^2 \left|E_i^+\right|^2 + \sum_{i,A=1}^3 \left(m_{Q_i}^2 \left(\left|Q_{iA}^+\right|^2 + \left|Q_{iA}^-\right|^2 \right) + m_{D_i^+}^2 \left|D_i^{A+}\right|^2 + m_{U_i^-}^2 \left|U_i^{A-}\right|^2 \right) \\ & + \Bigg(B\mu \left(H_1^0 H_2^0 - H_1^- H_2^+ \right) + \sum_{i,j=1}^3 A_{ij}^e y_{ij}^e \left(L_i^0 H_1^- - L_i^- H_1^0 \right) E_j^+ \\ & \quad + \sum_{i,j,A=1}^3 A_{ij}^d y_{ij}^d \left(Q_{iA}^+ H_1^- - Q_{iA}^- H_1^0 \right) D_j^{A+} \\ & \quad + \sum_{i,j,A=1}^3 A_{ij}^u y_{ij}^u \left(Q_{iA}^+ H_2^0 - Q_{iA}^- H_2^+ \right) U_j^{A-} + h.c. \Bigg) \end{aligned} \tag{4.16}$$

und entsprechend als F-Term-Beiträge V_F, D-Term-Beiträge V_D und Beiträge der sanften Brechungsterme V_{sanft} zum Potential

$$V_0 = V_F + V_D + V_{sanft} \tag{4.17}$$

bezeichnet. Das Potential bestimmt durch sein globales Minimum den Zustand tiefstmöglicher Energie im Modell, der als Vakuumzustand bezeichnet wird. Deshalb ist es wichtig, dieses globale Minimum des Potentials V_0 zu finden. Die Störungstheorie stellt nichts weiteres dar als eine Entwicklung um diesen Punkt tiefster Energie für nicht zu große Energien.

Kapitel 5

Untersuchung des Potentials im Higgs-Sektor des MSSM

Hier soll das Potential im MSSM für Beiträge der Higgs-Skalarfelder untersucht werden. Keine anderen Felder tragen im sogenannten Higgs-Sektor des MSSM zum Potential bei. Wir werden zunächst durch explizite Berechnung der drei verschiedenen Beiträge das Potential aufstellen und danach untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen an die im Potential auftretenden Parameter das Potential nach unten beschränkt ist. Weiterhin suchen wir das globale Minimum des Potentials.

5.1 Das Potential im MSSM für Higgs-Skalarfelder

Der Higgs-Sektor des MSSM besteht aus zwei chiralen Higgs-Superfeldern $\mathbf{H}_1$ und $\mathbf{H}_2$, die beide als $SU(2)$-Dubletts auftreten und Eigenvektoren mit entgegengesetzten Eigenwerte des Hyperladungsoperators Y sind:

$$Y\,\mathbf{H}_1 \;=\; -\mathbf{H}_1 \qquad \text{und} \qquad Y\,\mathbf{H}_2 \;=\; \mathbf{H}_2\,. \tag{5.1}$$

Beide Superfelder transformieren trivial unter der Eichgruppe der starken Wechselwirkung $SU(3)$ und enthalten jeweils skalare und fermionische Felder sowie Hilfsfelder. Als skalare Felder der beiden Superfelder wählen wir

$$\begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Dabei gibt der hochgestellte Index die elektrische Ladung der entsprechenden Komponente und der tiefgestellte Index das zugehörige Higgs-Superfeld an. Das Superpotential, welches als analytische Funktion in den Superfeldern keine hermitesch oder komplex konjugierten Felder enthalten darf, ist für den reinen Higgs-Sektor einzig durch den sogenannten μ-Term gegeben:

$$W \;=\; \mu\,\mathbf{H}_1^T\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_2 \tag{5.3}$$

mit $\mu \in \mathbb{C}$ und

$$i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dies sichert die Invarianz von W unter beliebigen $SU(2)$-Transformationen. Die niedrigste Komponente des Superpotentials aus (5.3) lautet

$$W|_{\theta=\overline{\theta}=0} \;=\; \mu \left(H_1^0 H_2^0 - H_1^- H_2^+\right) . \tag{5.4}$$

Das Potential im Higgs-Sektor des MSSM ist gegeben durch Beiträge von F-Termen, D-Termen und sanft brechenden Termen:

$$V_0\left(H_1^0, H_1^-, H_2^+, H_2^0\right) \;=\; V_F + V_D + V_{sanft} \tag{5.5}$$

mit den in (4.14) bis (4.16) angegebenen Ausdrücken für die einzelnen Beiträge (man beachte, daß im Higgs-Sektor des MSSM nur die skalaren Higgs-Felder vorkommen):

$$\begin{aligned}
V_F &= \sum_\phi \left| \frac{\partial}{\partial \phi} W|_{\theta=\overline{\theta}=0} \right|^2 , \\
V_D &= \frac{1}{2} \sum_G g_G^2 \, V_G \qquad \text{mit} \qquad V_G = \sum_{a=1}^{\dim G} \left(\sum_\phi \phi^+ \, T_a \, \phi \right)^2 , \\
V_{sanft} &= \sum_\phi m_\phi^2 \, |\phi|^2 + \left(B \, \mu \left(H_1^0 \, H_2^0 - H_1^- \, H_2^+ \right) + h.c. \right) .
\end{aligned}$$

Hierbei steht ϕ für alle auftretenden skalaren Komponenten (also diejenigen in (5.2)) und G für die möglichen Eichgruppen $SU(2)$ und $U(1)$. Wegen des trivialen Transformationsverhaltens beider Higgs-Superfelder brauchen wir die $SU(3)$ nicht zu berücksichtigen. Die T_a in V_D stehen für die Erzeugenden der einzelnen Symmetrien, und g_G^2 sind die Quadrate der Eichgruppenparameter.
Die Herleitung dieser Ausdrücke im Supersymmetrie-Formalismus zeigt, daß die Eichgruppenparameter g_G reell sind (und damit ihre Quadrate positiv). Diese Tatsache werden wir später als Bedingungen für die Beschränktheit des Potentials nach unten antreffen. Folglich liefern die D-Terme und die F-Terme nur nichtnegative Beiträge zum Potential V_0. Einzig die die Supersymmetrie sanft brechenden Terme können negative Beiträge liefern und somit das gesamte Potential negativ werden lassen.
Zur Untersuchung des Potentials werden die Felder H_1^- H_1^0, H_2^0 und H_2^+ als konstant angenommen. Deren konstanten Werte werden als Vakuumerwartungswerte bezeichnet.
Den möglichen Fayet-Iliopoulos-Term bei den D-Termen für die $U(1)$-Symmetrie haben wir zu Null gewählt, wie im vorigen Kapitel beschrieben.
In V_{sanft} treten die neuen Parameter $m_{H_1}^2, m_{H_2}^2 \in \mathbb{R}$ sowie $B \in \mathbb{C}$ auf. Weiterhin schreiben wir kurz

$$g_1^2 \;:=\; g_{U(1)}^2 \qquad \text{und} \qquad g_2^2 \;:=\; g_{SU(2)}^2 \, .$$

Für den Fall des reinen Higgs-Sektors erhalten wir mit (5.4) die F-Terme:

$$V_F \;=\; |\mu|^2 \left(\left|H_1^0\right|^2 + \left|H_1^-\right|^2 + \left|H_2^+\right|^2 + \left|H_2^0\right|^2\right) . \tag{5.6}$$

Zur Berechnung der D-Terme wählen wir als Generator der $U(1)$ $\frac{1}{2}Y$, so daß wegen der zu berücksichtigenden Eigenwerte der Komponenten in (5.1)

$$V_{U(1)} \;=\; \frac{1}{4}\left(\left|H_1^0\right|^2 + \left|H_1^-\right|^2 - \left|H_2^+\right|^2 - \left|H_2^0\right|^2\right)^2$$

ist. Im Fall der $SU(2)$ verwenden wir die Pauli-Matrizen σ_a und setzen $T_a := \frac{1}{2}\sigma_a$. Damit folgt

$$\begin{aligned} V_{SU(2)} \;&=\; \left(\mathrm{Re}\left\{\overline{H_1^0}H_1^- + \overline{H_2^+}H_2^0\right\}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\left\{\overline{H_1^0}H_1^- + \overline{H_2^+}H_2^0\right\}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(\left|H_1^0\right|^2 - \left|H_1^-\right|^2 + \left|H_2^+\right|^2 - \left|H_2^0\right|^2\right)^2 . \end{aligned}$$

Zusammengefaßt schreiben wir die D-Terme in der Form

$$\begin{aligned} V_D \;&=\; \frac{1}{8}g_1^2\left(\left|H_1^0\right|^2 + \left|H_1^-\right|^2 - \left|H_2^+\right|^2 - \left|H_2^0\right|^2\right)^2 + \frac{1}{8}g_2^2\left(\left|H_1^0\right|^2 - \left|H_1^-\right|^2 + \left|H_2^+\right|^2 - \left|H_2^0\right|^2\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}g_2^2\left(\left|H_1^0\right|^2\left|H_1^-\right|^2 + \left|H_2^+\right|^2\left|H_2^0\right|^2\right) + g_2^2\,\mathrm{Re}\left(\overline{H_1^0}H_1^-H_2^+\overline{H_2^0}\right) . \end{aligned} \tag{5.7}$$

Der Anteil der sanft brechenden Terme ist gegeben durch

$$V_{sanft} \;=\; m_{H_1}^2\left(\left|H_1^0\right|^2 + \left|H_1^-\right|^2\right) + m_{H_2}^2\left(\left|H_2^+\right|^2 + \left|H_2^0\right|^2\right) + 2\,\mathrm{Re}\left(B\,\mu\left(H_1^0H_2^0 - H_1^-H_2^+\right)\right) . \tag{5.8}$$

Die Summe der Terme (5.6), (5.7) und (5.8) bildet nach (5.5) das Potential. Per Konstruktion sind alle drei Terme einzeln invariant unter $SU(2)\times U(1)$ und somit auch das gesamte Potential. Von den in (5.2) eingeführten vier komplexen (also acht reellen) Feldern stellen aufgrund dieser Symmetriegruppe nur vier reelle Komponenten unabhängige Freiheitsgrade dar. Die Symmetrie des Potentials werden wir im folgenden für eine Vereinfachung des Problems verwenden.

5.2 Eliminierung der Komponente H_1^- aufgrund der $SU(2)$-Invarianz

Die Invarianz des Potentials unter $SU(2)$-Transformationen erlaubt eine Vereinfachung von V_0. Das Ziel ist, eine Komponente eines der beiden Higgs-Dubletts durch eine geeignete Transformation S verschwinden zu lassen. Eine beliebige Transformation $S \in SU(2)$ ist mittels drei reellen Zahlen α_i, $i = 1, 2, 3$ gegeben durch

$$S \;=\; \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \, \frac{\sigma_j}{2} \right\} \;=\; \begin{pmatrix} \cos\alpha_4 - \frac{i}{2}\,\alpha_3 \sin\alpha_4 & -\frac{1}{2}\,(\alpha_2 + i\alpha_1)\,\sin\alpha_4 \\ \\ \frac{1}{2}\,(\alpha_2 - i\alpha_1)\,\sin\alpha_4 & \cos\alpha_4 + \frac{i}{2}\,\alpha_3 \sin\alpha_4 \end{pmatrix}$$

mit

$$\alpha_4 \;:=\; \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \alpha_j^2}\,.$$

Wir können die Zahlen α_1 und α_2 so wählen, daß mit $\alpha_3 = 0$

$$S \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix} \;\propto\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir zwei der drei Freiheitsgrade verwendet und das Verschwinden der unteren Komponente H_1^- des ersten Higgs-Dubletts erreicht. Die Verwendung des noch übrigen Freiheitsgrades kann nur durch Transformationen T mit

$$T \;=\; \begin{pmatrix} \exp\left\{ \frac{i}{2}\alpha_3 \right\} & 0 \\ \\ 0 & \exp\left\{ -\frac{i}{2}\alpha_3 \right\} \end{pmatrix}$$

geschehen, wenn wir die Komponente H_1^- nicht wieder einführen wollen. Solche Transformationen liefern aber keine weitere Vereinfachung und werden deshalb nicht berücksichtigt und durchgeführt.
Auch der Freiheitsgrad der $U(1)$-Symmetrie wird nicht verwendet, denn hieraus ergäben sich ebenso keine weiteren Vereinfachungen von V_0.

Die lokale $SU(2)$-Invarianz des Potentials läßt sich also verwenden, um zwei Freiheitsgrade des Potentials zu eliminieren und Diskussion der Minima deutlich zu erleichtern.

5.3 Das Potential mit $H_1^- = 0$ und der Feldraum

Wie beschrieben, können wir $H_1^- = 0$ wählen und dieses konstante Feld im Potential eliminieren. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} x_1 &:= \left|H_1^0\right|\,, & x_2 &:= \left|H_2^0\right|\,, & x_3 &:= \left|H_2^+\right|\,, \\ m_1^2 &:= m_{H_1}^2 + |\mu|^2\,, & m_2^2 &:= m_{H_2}^2 + |\mu|^2\,, & m_B^2 &:= B\,\mu \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \theta &:= \arg B + \arg\mu + \arg H_1^0 + \arg H_2^0\,, \\ g^2 &:= g_1^2 + g_2^2 \end{aligned}$$

können wir das Potential für den reinen Higgs-Sektor des MSSM in der einfachen Form

$$V_0\left(x_1,x_2,x_3,\theta\right) \;=\; m_1^2x_1^2+m_2^2\left(x_2^2+x_3^2\right)+2\left|m_B^2\right|x_1x_2\cos\theta+\frac{1}{8}g^2\left(x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)^2+\frac{1}{2}g_2^2x_1^2x_3^2 \tag{5.9}$$

angeben. Das Potential ist in dieser Form nur von den vier reellen Variablen x_1, x_2, x_3 und θ abhängig. Der Grund ist, daß die ursprüngliche Form als Summe der Terme in den Gleichungen (5.6), (5.7) und (5.8) nicht acht unabhängige reelle Felder beinhaltet, sondern nur sechs, weil neben den vier Beträgen der Komponenten nur die Kombinationen $\arg H_1^0+\arg H_2^0$ und $\arg H_1^-+\arg H_2^+$ der Phasen auftreten. Die globale Rotation $S\in SU(2)$ hat weitere zwei Variablen eliminiert, nämlich das konstante komplexe Feld H_1^-.
Das Potential ist auf dem *Feldraum*

$$\mathcal{F} \;:=\; \left(\mathbb{R}_0^+\right)^3\times\mathbb{R}\;\subset\;\mathbb{R}^4 \tag{5.10}$$

definiert mit $\mathbb{R}_0^+ := \{y\in\mathbb{R} : y\geq 0\}$. Die ersten drei Komponenten des Feldraumes stehen für die Variablen x_1, x_2 und x_3 und die vierte Komponente entspricht der Phasenvariable θ. Wir beachten, daß $\mathcal{F}$ im $\mathbb{R}^4$ keine offene Menge ist, sondern vielmehr einen Rand

$$\partial\mathcal{F} \;:=\; \left\{(x_1,x_2,x_3,\theta)\in\mathcal{F} : x_1x_2x_3=0\right\}$$

und ein Inneres

$$\overset{o}{\mathcal{F}} := \;\mathcal{F}\setminus\partial\mathcal{F}$$

besitzt. Die Randmenge unterteilen wir in die disjunkten Untermengen

$$\begin{aligned}
\partial\mathcal{F}_i \;&:=\; \left\{(x_1,x_2,x_3,\theta)\in\mathcal{F} : x_i=0\;\wedge\;x_k\neq 0\quad\forall\,k\neq i\right\}\qquad i\in\{1,2,3\}\,,\\
\partial\mathcal{F}_{ij} \;&:=\; \left\{(x_1,x_2,x_3,\theta)\in\mathcal{F} : x_i=x_j=0\;\wedge\;x_k\neq 0\quad\forall\,i\neq k\neq j\neq i\right\}\qquad i,j\in\{1,2,3\}\,,\\
\partial\mathcal{F}_{123} \;&:=\; \left\{(x_1,x_2,x_3,\theta)\in\mathcal{F} : x_1=x_2=x_3=0\right\}.
\end{aligned}$$

Als *Randvariablen* bezeichnen wir die auf den einzelnen Randuntermengen verschwindenden Variablen. Wir haben die folgende disjunkte Zerlegung des gesamten Feldraumes $\mathcal{F}$ erhalten:

$$\mathcal{F} \;=\overset{o}{\mathcal{F}}\;\cup\partial\mathcal{F}_1\;\cup\;\partial\mathcal{F}_2\;\cup\;\partial\mathcal{F}_3\;\cup\;\partial\mathcal{F}_{12}\;\cup\;\partial\mathcal{F}_{13}\;\cup\;\partial\mathcal{F}_{23}\;\cup\;\partial\mathcal{F}_{123} \tag{5.11}$$

5.4 Beschränktheit des Potentials nach unten und bnu-Bedingungen

Das Potential des MSSM weist durch sein globales Minimum den Grundzustand als Zustand tiefster Energie aus. Wir fordern deshalb die Beschränktheit des Potentials nach unten auf dem Feldraum $\mathcal{F}$. Dies liefert

uns Bedingungen für die bisher noch völlig freien Parameter m_1^2, m_2^2, $|m_B^2|$, g^2 und g_2^2 im Potential V_0 in (5.9).
In V_0 sind die Terme höchster Ordnung aus den D-Termen entstanden und sind von vierter Ordnung in den Beträgen der Komponenten. Die sanften Brechungsterme zusammen mit den F-Termen liefern nur quadratische Terme in den Beträgen. Gemäß der disjunkten Zerlegung des Feldraumes (5.11) werden wir nach Richtungen suchen, entlang denen das Potential nach unten unbeschränkt sein könnte. Durch entsprechend zu postulierende Bedingungen (bnu-Bedingungen: beschränkt nach unten) an die Parameter im Potential wird ausgeschlossen, daß das Potential entlang dieser Richtungen nach unten unbeschränkt ist.
Die Randpunkte in $\mathcal{F}_{123}$ ergeben keine interessante Richtung, denn dort gilt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und damit stets $V_0 = 0$. Deshalb betrachten wir die Randuntermengen $\mathcal{F}_{ij}$ mit $i \neq j$, wo nur eine Variable nicht verschwindet. Wir können speziell die Menge $\mathcal{F}_{23}$ auswählen; bei den anderen ergeben sich die gleichen Resultate. Auf $\mathcal{F}_{23}$ gilt

$$V_0\,(x_1 \neq 0, 0, 0, \theta) \;=\; m_1^2 x_1^2 + \frac{1}{8} g^2 x_1^4\,.$$

Daher ist für $g^2 < 0$ das Potential auf $\mathcal{F}_{23}$ nach unten unbeschränkt. Folglich postulieren wir die Positivität des Parameters g^2:

$$g^2 \;=\; g_1^2 + g_2^2 \;>\; 0\,. \tag{5.12}$$

Daraus ergibt sich, daß die Randuntermenge $\mathcal{F}_1$, für deren Punkte nur x_1 verschwindet, keine weitere bnu-Bedingung liefern kann, weil das Potential stets einen positiven Beitrag vierter Ordnung enthält, der für hinreichend große Werte der Beträge der Komponenten der dominierende Beitrag zu V_0 ist. Im Fall von $\mathcal{F}_2$ allerdings gilt für $x_1 = x_3 \neq 0$ folgende Potentialdarstellung:

$$V_0\,(x_1 \neq 0, 0, x_1, \theta) \;=\; \left(m_1^2 + m_2^2\right) x_1^2 + \frac{1}{2} g_2^2 x_1^4\,.$$

Hieraus folgern wir, daß für negative Werte von g_2^2 diese Richtung im Feldraum die geforderte Beschränktheit des Potentials nach unten zunichte macht. Also postulieren wir die zweite bnu-Bedingung als

$$g_2^2 \;>\; 0\,. \tag{5.13}$$

Ganz offenbar bedingen die Relationen (5.12) und (5.13) die Nicht-Negativität der D-Terme des Potentials. Dies ist kein neues Ergebnis, denn wie schon oben erwähnt folgt die Positivität der Quadrate der Eichgruppenparameter aus dem Transformationsverhalten der Vektorsuperfelder, die in der adjungierten Darstellung der entsprechenden Eichgruppe auftreten, unter Supersymmetrie-Transformationen.
Schließlich untersuchen wir $\mathcal{F}_3$. Wir können ein Verschwinden der nicht-negativen D-Terme vierter Ordnung nur erreichen, falls wir zusätzlich $x_1 = x_2 \neq 0$ fordern. Dann ist das Potential entlang dieser Richtung durch

$$V_0\,(x_1 \neq 0, x_1, 0, \theta) \;=\; \left(m_1^2 + m_2^2 + 2\,|m_B^2| \cos\theta\right) x_1^2 \tag{5.14}$$

gegeben. Abhängig vom Vorzeichen der Klammer in (5.14) ist V_0 entlang dieser Richtung nach unten beschränkt oder nicht. Darum ist

$$m_1^2 + m_2^2 \;>\; 2\,|m_B^2| \tag{5.15}$$

unsere dritte bnu-Bedingung für das Potential V_0 in Gleichung (5.9), die in jedem Fall sicherstellt, daß der Koeffizient vor x_1^2 im Potential in (5.14) positiv ist.
Zum Schluß bleibt noch zu prüfen, ob sich im Inneren des Feldraumes weitere bnu-Bedingungen an die Parameter des Potentials ergeben können. Aufgrund von $x_1 x_3 \neq 0$, werden in $\overset{o}{\mathcal{F}}$ immer echt positive Beiträge der D-Terme entstehen, die gleichzeitig auch die Terme höchster auftretender Ordnung im Potential sind. Das bedeutet, daß im Inneren des Feldraumes keine weitere Einschränkungen an die Parameter nötig sind.

5.5 Stationäre Punkte und lokale Minima des Potentials

Die Suche nach lokalen Minima des Potentials V_0 aus (5.9) unterteilt sich durch die disjunkte Zerlegung des Feldraumes (5.11) in die Betrachtungen des Potentials auf den verschiedenen Mengen. In jeder dieser Untermengen des Feldraumes suchen wir zunächst stationäre Punkte des Potentials. Wie bei der Suche nach stationären Punkten und lokalen Minima des Potentials genau zu verfahren ist, ist im Anhang B ausführlich dargelegt. Deshalb verweisen wir hier nur auf das dort beschriebene Vorgehen.

Die benötigten partiellen Ableitungen des Potentials V_0 aus (5.9) sind im Anhang A aufgelistet.
Aufgrund der Argumentation im Anhang B folgt, daß die stationären Punkte auf den folgenden Randuntermengen keine lokalen Minima im gesamten Feldraum $\mathcal{F}$ liefern:

- $\partial\mathcal{F}_{23}$,
- $\partial\mathcal{F}_{13}$,
- $\partial\mathcal{F}_{2}$,
- $\partial\mathcal{F}_{1}$.

Wir brauchen das Potential auf diesen Randuntermengen somit nicht zu untersuchen. Es bleiben folgende Bereiche des Feldraumes $\mathcal{F}$ übrig:

1) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{123}$, also $x_1 = x_2 = x_3 = 0$,
2) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{12}$, also $x_3 \neq 0$, $x_1 = x_2 = 0$,
3) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{3}$, also $x_1 x_2 \neq 0$, $x_3 = 0$,
4) V_0 auf $\overset{o}{\mathcal{F}}$, also $x_1 x_2 x_3 \neq 0$.

Auf jeder dieser Untermengen des Feldraumes suchen wir zunächst stationäre Punkte und lokale Minima, um diese miteinander zu vergleichen und so das globale Minimum des Potentials auf dem gesamten Feldraum $\mathcal{F}$ aus (5.10) zu finden.
Damit haben wir alle disjunkten Teilbereiche des Feldraumes behandelt und eine vollständige Untersuchung der Minimumstruktur des Potentials im Higgs-Sektor des MSSM durchgeführt.

5.5.1 Fall 1) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{123}$

Offensichtlich verschwinden alle ersten partiellen Ableitungen für diese Konfiguration, unabhängig vom Wert von θ. Der Wert des Potentials an diesen stationären Punkten ist

$$V_0\,(0,0,0,\theta) \;=\; 0\,.$$

Die Untermatrix der Hesse-Matrix aus zweiten Ableitungen nach Randvariablen am Ursprung hat folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_2)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m_1^2 & 2\left|m_B^2\right|\cos\theta & 0 \\ 2\left|m_B^2\right|\cos\theta & 2m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m_2^2 \end{pmatrix}$$

mit den Unterdeterminanten

$$\begin{aligned} D_1 &= 2m_1^2\,, \\ D_2 &= 4\left(m_1^2 m_2^2 - \left|m_B^2\right|^2 \cos^2\theta\right)\,, \\ D_3 &= 2m_2^2\, D_2\,. \end{aligned}$$

Hinreichend für die Existenz eines lokalen Minimums an diesen stationären Punkten im gesamten Feldraum $\mathcal{F}$ ist die Positivität aller Unterdeterminanten der Hesse-Matrix, so daß diese selbst positiv definit ist. Ist umgekehrt mindestens eine der Unterdeterminanten negativ, so liegt kein lokales Minimum des Potentials im gesamten Feldraum vor, gemäß dem hinreichenden Kriterium, das im Anhang B angegeben ist.
Lieferte diese Konfiguration das globale Minimum des Potentials, so wäre die gesamte $SU(2) \times U(1)$ Symmetrie des Systems erhalten. Da dies nicht gewünscht ist, weil die spontane Brechung der $SU(2)$ wie im Standard Modell nicht zu vermeiden ist, muß folglich eine andere Konfiguration im Feldraum das globale Minimum von V_0 hervorbringen. Das bedeutet zunächst nicht, daß wir durch weitere Bedingungen die stationären Punkte auf $\partial\mathcal{F}_{123}$ als lokale Minimalstellen des Potentials ausschließen dürfen. Insbesondere brauchen wir nicht zu fordern, daß das Potential auf $\mathcal{F}_{123}$ kein lokales Minimum, sondern nur ein lokales Maximum besitzt oder daß dort gar kein Extremum existiert. Nach der Analyse sämtlicher Fälle werden wir sehen, daß nur solche weiteren stationären Punkte existieren, an denen das Potential negative Werte annimmt, so daß die hier gefundenen stationären Punkte sowieso nicht das globale Minimum des Potentials liefern.

5.5.2 Fall 2) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{12}$

Die Stationaritätsbedingung

$$2m_2^2 + \frac{1}{2}g^2 x_3^2 = 0$$

liefert unter der Bedingung $m_2^2 < 0$ stationäre Punkte mit

$$x_3^2 = -4g^{-2}m_2^2 \tag{5.16}$$

und nicht bestimmten Werten für θ. Das Potential nimmt an diesen stationären Punkten den negativen Wert

$$V_0\left(0, 0, x_3 = -4g^{-2}m_2^2, \theta\right) = -2g^{-2}m_2^4 \tag{5.17}$$

an. Die stationären Punkte können wegen

$$\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} \;=\; g^2 x_3^2 \;>\; 0$$

und

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\, \partial\theta} \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\, \partial\theta} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial\theta)^2} \end{vmatrix} \;=\; 0$$

lokale Minimalstellen auf $\partial\mathcal{F}_{12}$ sein. In der verschwindenden Unterdeterminante spiegelt sich gerade die Beliebigkeit von θ an den stationären Punkten wieder. Wir stellen fest, daß in keiner Umgebung um die stationären Punkte, die ganz im Randbereich $\partial\mathcal{F}_{12}$ enthalten ist, Punkte mit kleinerem Potentialwert existieren. In diesem Sinne dürfen wir die stationären Punkte als lokale Minima auf $\partial\mathcal{F}_{12}$ ansehen.
Aber können die stationären Punkte auch lokale Minima im ganzen Feldraum darstellen ? Hierfür müssen wir, wie im Anhang B beschrieben, die ersten partiellen Ableitungen nach den Randvariablen an den stationären Punkten auswerten. Wir finden, daß an den stationären Punkten aus (5.16) mit beliebigem θ

$$\frac{\partial V_0}{\partial x_1} \;=\; \frac{\partial V_0}{\partial x_2} \;=\; 0$$

gilt. Daraus erhalten wir keine Information, so daß wir die Untermatrix der Hesse-Matrix betrachten müssen, die nur aus partiellen Ableitungen nach den zwei Randvariablen besteht. Die Elemente sind am stationären Punkt durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} \;&=\; 2m_1^2 - 4g^{-2}g_2^2 m_2^2 \,, \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\, \partial x_2} \;&=\; 2\left|m_B^2\right| \cos\theta \,, \\ \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} \;&=\; 0 \,. \end{aligned}$$

gegeben. Die erste Hauptunterdeterminante dieser Untermatrix der Hesse-Matrix ist

$$\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} \;=\; 2m_1^2 - 4g^{-2}g_2^2 m_2^2 \;>\; 0 \,,$$

die unter Beachtung der bnu-Bedingungen (5.12), (5.13) und (5.15) und der Voraussetzung $m_2^2 < 0$ für diesen stationären Punkt positiv ist. Die zweite Determinante ist

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\, \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\, \partial x_2} & 0 \end{vmatrix} \;=\; -4\left|m_B^2\right|^2 \cos^2\theta \;\leq\; 0 \,.$$

Weil der Wert des Potentials am stationären Punkt nicht von θ abhängig ist, betrachten wir zunächst stationäre Punkte mit $\cos\theta < 0$, so daß die zweite Unterdeterminante der Hesse-Matrix negativ wird. Das bedeutet, daß diese Untermatrix einen negativen Eigenwert besitzt. Wenn wegen $\cos\theta < 0$ das Nebendiagonalenelement negativ ist, liegt der Eigenvektor zum negativen Eigenwert der Untermatrix im Feldraum $\mathcal{F}$, genau wie im Anhang B beschrieben. Daraus folgt, daß es eine Richtung gibt, gegeben durch den Eigenvektor zum negativen Eigenwert der Untermatrix der Hesse-Matrix, entlang der in jeder beliebigen Umgebung des stationären Punktes, die ganz im Feldraum enthalten ist, Punkte liegen, für die das Potential einen kleineren Wert annimmt als am stationären Punkt aus (5.18). Damit kann der stationäre Punkt auf dem betrachteten Randunterbereich kein lokales Minimum des Potentials im gesamten Feldraum liefern.
Das gilt nur für die stationären Punkte mit $\cos\theta < 0$. Aber der Wert des Potentials an den anderen stationären Punkten ist derselbe, so daß alle diese stationären Punkte nicht mehr als Stellen des globalen Minimums des Potentials im ganzen Feldraum $\mathcal{F}$ in Frage kommen. Deshalb brauchen wir die stationären Punkte auf dieser Randuntermenge nicht weiter zu berücksichtigen, und die Untersuchung des Potentials auf dieser Randmenge $\partial\mathcal{F}_{12}$ entfällt.

5.5.3 Fall 3) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_3$

Die Stationaritätsbedingungen auf dieser Randuntermenge ergeben sich aus den ersten partiellen Ableitungen nach x_1, x_2 und θ und sind von der Form

$$2m_1^2 x_1 + 2\left|m_B^2\right| x_2 \cos\theta + \frac{1}{2}g^2\left(x_1^2 - x_2^2\right)x_1 \;=\; 0\,, \tag{5.18}$$

$$2m_2^2 x_2 + 2\left|m_B^2\right| x_1 \cos\theta - \frac{1}{2}g^2\left(x_1^2 - x_2^2\right)x_2 \;=\; 0\,, \tag{5.19}$$

$$2\left|m_B^2\right| x_1 x_2 \sin\theta \;=\; 0\,. \tag{5.20}$$

Wegen der Gestalt der relevanten Untermatrix der Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_2} & 0 \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial\theta)^2} \end{pmatrix}$$

mit

$$\frac{\partial^2 V_0}{(\partial\theta)^2} \;=\; -2\left|m_B^2\right| x_1 x_2 \cos\theta$$

folgt aus der (5.20)

$$\cos\theta \;=\; -1\,, \tag{5.21}$$

weil die Hesse-Matrix im anderen möglichen Fall ($\cos\theta = 1$) entweder negativ definit oder indefinit wäre und somit ein möglicherweise existierender stationärer Punkt kein lokales Minimum des Potentials liefern würde. Mit der Einführung des Verhältnisses

$$z := \frac{x_2}{x_1} > 0$$

und (5.21) erhalten die Gleichungen (5.18) und (5.19) die Form

$$2m_1^2 - 2\left|m_B^2\right| z + \frac{1}{2} g^2 \left(x_1^2 - x_2^2\right) = 0\,, \tag{5.22}$$

$$2m_2^2 - 2\left|m_B^2\right| z^{-1} - \frac{1}{2} g^2 \left(x_1^2 - x_2^2\right) = 0\,. \tag{5.23}$$

Es folgt für das Verhältnis z durch Kombination die quadratische Gleichung

$$z^2 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{|m_B^2|}\, z + 1 = 0\,. \tag{5.24}$$

Wir erinnern uns der Ungleichung (5.15), die wegen der Beschränktheit des Potentials V_0 nach unten gefordert wurde. Sie liefert genau die Bedingung für reelle und positive Lösungen dieser quadratischen Gleichung. Diese Lösungen sind durch

$$z_{1/2} = \left(2\left|m_B^2\right|\right)^{-1} \left(m_1^2 + m_2^2 \pm \sqrt{\left(m_1^2 + m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\right) > 0\,, \tag{5.25}$$

gegeben. Damit folgen aus (5.22) und (5.23) die beiden möglichen Lösungen der stationären Gleichungen in der Form

$$x_1^2 = 4g^{-2}\left(1 - z^2\right)^{-1}\left(\left|m_B^2\right| z - m_1^2\right)\,, \tag{5.26}$$

$$x_2^2 = z^2\, x_1^2\,. \tag{5.27}$$

mit $z = z_1$ oder $z = z_2$ und (5.25). In jedem Fall ist $z \neq 1$, denn mit $z = 1$ würde aus der quadratischen Gleichung $m_1^2 + m_2^2 = 2\left|m_B^2\right|$ folgen, welches im Widerspruch zu der bnu-Bedingung (5.15) steht.
Es folgen die ersten Einschränkungen an den Parameterbereich: wegen der Positivität von x_1^2 folgt

$$\frac{m_1^2}{|m_B^2|} < z < 1 \qquad \text{oder} \qquad 1 < z < \frac{m_1^2}{|m_B^2|}\,. \tag{5.28}$$

Anzumerken ist, daß die Konstellation

$$m_1^2 = m_2^2$$

nicht möglich ist: wären die beiden Parameter gleich, so müßten sie nach der bnu-Bedingung (5.15) größer als $\left|m_B^2\right|$ sein. Von den Alternativen in (5.28) wäre nur noch die zweite möglich und das Verhältnis müßte

$$z \;=\; \frac{m_1^2}{|m_B^2|} - \sqrt{\frac{m_1^4}{|m_B^2|^2} - 1}$$

sein. Das liefert wegen

$$1 \;<\; z \;=\; \frac{m_1^2}{|m_B^2|} - \sqrt{\frac{m_1^4}{|m_B^2|^2} - 1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{m_1^2}{|m_B^2|} \;<\; 1$$

einen Widerspruch zu (5.28) oder der Realität von z.
Wir untersuchen nun, ob sich durch (5.28) weitere Einschränkungen an die Massenparameter ergeben, indem wir die Lösungen für z aus (5.25) einsetzen.

$m_1^2 > m_2^2$: Die erste Ungleichungskette in (5.28) liefert wegen der bnu-Bedingung (5.15) den Widerspruch

$$0 \;<\; m_1^2 - m_2^2 \;<\; \pm\sqrt{\left(m_1^2 + m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2} \;<\; 2\left|m_B^2\right| - m_1^2 - m_2^2 \;<\; 0\,,$$

aus der zweiten Bedingung in (5.28) folgt

$$2\left|m_B^2\right| - m_1^2 - m_2^2 \;<\; \pm\sqrt{\left(m_1^2 + m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2} \;<\; m_1^2 - m_2^2\,.$$

Wegen (5.15) wird die linke Ungleichung nur für das positive Vorzeichen der Wurzel erfüllt und liefert keine Einschränkungen an die Parameter. Die rechte Ungleichung wird äquivalent zu

$$m_1^2\, m_2^2 - \left|m_B^2\right|^2 \;<\; 0\,. \tag{5.29}$$

$m_2^2 > m_1^2$: Analog finden wir, daß hier die zweite Ungleichungskette in (5.28) nicht erfüllt werden kann, und daß die erste Ungleichungskette in (5.28) mit dem negativen Vorzeichen der Wurzel die Gültigkeit von (5.29) impliziert.

Zusammen: Unter Berücksichtigung der bnu-Bedingungen in den Gleichungen (5.12), (5.13) und (5.15) und der zusätzlichen Relation (5.29) erhalten wir folgende Werte für das Verhältnis z:

$$\begin{aligned}
m_1^2 > m_2^2 \quad &\Longrightarrow \quad z = \left(2\left|m_B^2\right|\right)^{-1}\left(m_1^2 + m_2^2 + \sqrt{\left(m_1^2 + m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\right)\,,\\
m_2^2 > m_1^2 \quad &\Longrightarrow \quad z = \left(2\left|m_B^2\right|\right)^{-1}\left(m_1^2 + m_2^2 - \sqrt{\left(m_1^2 + m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\right)\,.
\end{aligned}$$

Beide Lösungen von (5.24) sind reziprok zueinander, da das absolute Glied in (5.24) genau 1 ist. Die Existenz dieser zwei Lösungen der quadratischen Gleichung läßt uns noch eine diskrete Symmetrie offen:

$$z \longleftrightarrow z^{-1} \iff \left(x_1 \longleftrightarrow x_2 \quad \text{und} \quad m_1^2 \longleftrightarrow m_2^2\right)$$

Für die Hauptunterdeterminanten der Hesse-Matrix in den gefundenen stationären Punkten (5.26) und (5.27) mit $z = z_{1/2} \neq 1$ finden wir folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned}
D_1 &= g^2 x_1^2 + 2\left|m_B^2\right| z \;>\; 0\,, \\
D_2 &= \left(g^2 x_1^2 + 2\left|m_B^2\right| z\right)\left(g^2 x_2^2 + 2\left|m_B^2\right| z^{-1}\right) - \left(2\left|m_B^2\right| + g^2 x_1 x_2\right)^2 \\
&= 2\left|m_B^2\right| g^2 x_1 x_2 \left(z - z^{-1}\right)^2 \;>\; 0\,, \\
D_3 &= 2\left|m_B^2\right| x_1 x_2\, D_2 \;>\; 0\,.
\end{aligned}$$

Alle diese Unterdeterminanten sind positiv; deshalb liefern die gefundenen stationären Punkte lokale Minima des Potentials in diesem Randbereich.
In den beiden Fällen ist der Wert des Potentials gegeben durch

$$\begin{aligned}
&m_1^2 > m_2^2: \quad V_0(x_1 x_2 \neq 0, x_3 = 0) = -\left(2g^2\right)^{-1}\left(m_2^2 - m_1^2 + \sqrt{\left(m_1^2 + m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\right)^2, \\
&m_2^2 > m_1^2: \quad V_0(x_1 x_2 \neq 0, x_3 = 0) = -\left(2g^2\right)^{-1}\left(m_2^2 - m_1^2 - \sqrt{\left(m_1^2 + m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\right)^2.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Eine Anmerkung: Wie auf den ersten Blick zu sehen, liefert im Fall $m_1^2 > m_2^2$ das andere Vorzeichen der Wurzel (und damit der andere Wert von z) einen negativeren Wert des Potentials V_0, weil der Betrag des zu quadrierenden Terms dann größer ist. Aber der Punkt, an dem das Potential diesen kleineren Wert annimmt, gehört nicht mehr zum Feldraum $\mathcal{F}$ aus (5.10), denn es gilt dort $x_1^2 < 0$. Analoges gilt im Fall $m_2^2 > m_1^2$.

Wegen

$$\frac{\partial V_0}{\partial x_3} = 0$$

am stationären Punkt und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{\left(\partial x_3\right)^2} &= 2m_2^2 - \frac{1}{2} g^2 \left(x_1^2 - x_2^2\right) + g_2^2 x_1^2 \\
&= 2\left|m_B^2\right|^2 z^{-1} + g_2^2 x_1^2 \;>\; 0
\end{aligned}$$

unter Verwendung von (5.23), ebenfalls am stationären Punkt ausgewertet, liefert dieser stationäre Punkt auf der Randuntermenge $\partial\mathcal{F}_3$ ein lokales Minimum im gesamten Feldraum $\mathcal{F}$.

5.5.4 Fall 4) V_0 auf $\overset{o}{\mathcal{F}}$

In diesem Fall untersuchen wir das Innere des Feldraumes $\overset{o}{\mathcal{F}}$. Wir setzen alle ersten Ableitungen gleich Null und erhalten

$$2m_1^2 x_1 + 2\left|m_B^2\right| x_2 \cos\theta + \frac{1}{2} g^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right) x_1 + g_2^2 x_1 x_3^2 \;=\; 0\,, \tag{5.31}$$

$$2m_2^2 x_2 + 2\left|m_B^2\right| x_1 \cos\theta - \frac{1}{2} g^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right) x_2 \;=\; 0\,, \tag{5.32}$$

$$2m_2^2 x_3 - \frac{1}{2} g^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right) x_3 + g_2^2 x_1^2 x_3 \;=\; 0\,, \tag{5.33}$$

$$2\left|m_B^2\right| x_1 x_2 \sin\theta \;=\; 0\,. \tag{5.34}$$

Hier haben wir die ganze Hesse-Matrix, also alle 16 zweiten gemischten partiellen Ableitungen zu berücksichtigen. Speziell müssen die Hauptdiagonalelemente der Hesse-Matrix nichtnegativ sein. Wegen (5.34) und

$$\frac{\partial^2 V_0}{(\partial\theta)^2} \;=\; -2\left|m_B^2\right| x_1 x_2 \cos\theta$$

muß somit

$$\cos\theta \;=\; -1 \tag{5.35}$$

sein. Setzen wir (5.33) in (5.32) ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung von $x_3 \neq 0$

$$2\left|m_B^2\right| \cos\theta - g_2^2 x_1 x_2 \;=\; 0\,,$$

und mit (5.35) folgt

$$-2\left|m_B^2\right| - g_2^2 x_1 x_2 \;=\; 0\,.$$

Wegen der angenommenen Positivität von g_2^2 in (5.13) ist diese Gleichung nicht erfüllbar. Somit gibt es im Inneren des Feldraumes keinen stationären Punkt, der ein lokales Minimum des Potentials im Innern von $\mathcal{F}$ liefert. Das globale Minimum des Potentials existiert, weil V_0 nach unten beschränkt ist, und muß deshalb auf einem der Randbereiche angenommen werden.

5.6 Diskussion der Minimumstruktur des Potentials im Higgs-Sektor des MSSM

Wir haben das Potential auf vier Bereichen des Feldraumes untersucht, wo prinzipiell (nach den Argumentationen in Anhang B) lokale Minima im gesamten Feldraum auftreten könnten. Im Fall 2) auf $\partial\mathcal{F}_{12}$ fanden wir keinen stationären Punkt, der ein lokales Minimum im gesamten Feldraum $\mathcal{F}$ liefert. Im Inneren des Feldraumes existiert kein stationärer Punkt, wenn die bnu-Bedingungen berücksichtigt werden. Nur auf dem Randbereich $\partial\mathcal{F}_3$ mit $\left|H_2^+\right| = 0$ existiert unter Beachtung von (5.29) ein stationärer Punkt, der auch ein lokales Minimum von V_0 im ganzen Feldraum liefert. Schließlich bleibt noch der stationäre Punkt im Ursprung. Durch (5.29) ist nicht nur die Existenz des stationären Punktes im Fall 3) garantiert,

sondern gleichzeitig auch, daß die Hesse-Matrix im Ursprung indefinit ist, so daß der Ursprung keine lokale Minimalstelle des Potentials im ganzen Feldraum ist.
Noch anzumerken ist die Tatsache, daß im Fall der Existenz der stationären Punkte auf dem Randbereich $\partial\mathcal{F}_{12}$, also für $m_2^2 < 0$ auch der stationäre Punkt auf $\partial\mathcal{F}_3$ besteht. Zusätzlich gilt dann mit (5.17) und (5.30)

$$\begin{aligned} V_0(\,\text{Fall } 2)\,) \;<\; V_0(\,\text{Fall } 3)\,) \;&\Longleftrightarrow\; 2m_2^4 \;>\; \frac{1}{2}\left(m_2^2 - m_1^2 + \sqrt{\left(m_1^2+m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\right)^2 \;>\; 0 \\ &\Longleftrightarrow\; m_2^4 - m_1^4 + 2\left|m_B^2\right|^2 \;>\; \left(m_2^2 - m_1^2\right)\sqrt{\left(m_1^2+m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\,. \end{aligned}$$

Aus der bnu-Bedingung (5.15) und $m_2^2 < 0$ folgt

$$\begin{aligned} m_1^2 + m_2^2 \;>\; 2\left|m_B^2\right| \;&\Longrightarrow\; m_1^2 \;>\; 2\left|m_B^2\right| - m_2^2 \\ &\Longrightarrow\; m_1^4 \;>\; 4\left|m_B^2\right|^2 - 2\left|m_B^2\right| m_2^2 + m_2^4 \\ &\Longrightarrow\; m_2^4 - m_1^4 + 2\left|m_B^2\right|^2 \;<\; -2\left|m_B^2\right|\left(\left|m_B^2\right| - m_2^2\right) \;<\; 0\,. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich durch Quadrieren beider Seiten

$$\begin{aligned} V_0(\,\text{Fall } 2)\,) \;<\; V_0(\,\text{Fall } 3)\,) \;&\Longleftrightarrow\; 0 \;>\; m_2^4 - m_1^4 + 2\left|m_B^2\right|^2 \;>\; \left(m_2^2 - m_1^2\right)\sqrt{\left(m_1^2+m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2} \\ &\Longleftrightarrow\; 4\left|m_B^2\right|^4 + 4\left|m_B^2\right|^2\left(m_2^4 - m_1^4\right) \;<\; -4\left|m_B^2\right|^2\left(m_2^2 - m_1^2\right)^2 \\ &\Longleftrightarrow\; \left|m_B^2\right|^2 + 2m_2^4 - 2m_1^2 m_2^2 \;<\; 0 \\ &\Longleftrightarrow\; \left|m_B^2\right|^2 + 2m_2^2\left(m_2^2 - m_1^2\right) \;<\; 0\,. \end{aligned}$$

Wegen $m_2^2 < 0 < m_1^2$ ist das aber ein Widerspruch. Es zeigt sich, daß der stationäre Punkt im Fall 3) auch einen niedrigeren Potentialwert liefert als die stationären Punkte auf $\partial\mathcal{F}_{12}$.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß für die bnu-Bedingungen

$$g_2^2 \;>\; 0\,, \qquad g^2 \;>\; 0\,, \qquad m_1^2 + m_2^2 \;>\; 2\left|m_B^2\right|$$

sowie

$$m_1^2\, m_2^2 - \left|m_B^2\right|^2 \;<\; 0$$

das globale Minimum des Potentials im Higgs-Sektor des MSSM an einem Punkt auf $\partial\mathcal{F}_3$ mit $\left|H_2^+\right| = 0$ angenommen wird und dort einen negativen Wert für V_0 liefert. Das bedeutet, daß nur die ungeladenen

Higgs-Felder VEWe ungleich Null im Minimum besitzen und somit nur die $SU(2) \times U(1)$ Symmetrie des Potentials gebrochen wird und nicht auch noch die Ladungserhaltung verletzt ist.
Ist diese Bedingung (5.29) an die Massenparameter m_1^2, m_2^2 und $\left|m_B^2\right|$ nicht erfüllt, so liegt das globale Minimum des Potentials im Ursprung mit Potentialwert $V_0 = 0$. Dies bewirkt keine spontane Brechung der elektroschwachen Eichsymmetrie des Modells.

Kapitel 6

Untersuchung des Potentials im MSSM für Higgs- und Slepton-Felder

Nachdem das Potential im reinen Higgs-Sektor im letzten Abschnitt behandelt wurde, werden wir jetzt Beiträge der Slepton-Felder hinzunehmen. Damit wird das Potential etwas umfangreicher und komplizierter. Dennoch kann mittels Vereinfachungen eine durchaus überschaubare Gestalt des Potentials hergestellt werden. Wir werden im erweiterten Feldraum die bnu-Bedinungen herausarbeiten. Verschiedene stationäre Punkte werden untersucht und Bedingungen für die Existenz lokaler Minima aufgestellt. Die Situationen in verschiedenen Parameterbereichen können auf analytischer Basis allerdings nur eingeschränkt miteinander verglichen werden.

6.1 Das Potential im MSSM für Higgs- und Slepton-Felder

Wir wollen das Potential V_0 für die zwei Higgs Dubletts $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ und die leptonischen Superfelder $\mathbf{L}_i$ und $\mathbf{E}_j$ im MSSM betrachten. Die Indizes i und j sind Familienindizes und laufen von 1 bis 3. Das Potential enthält die folgenden skalaren Komponenten der genannten Superfelder

$$\begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} L_i^0 \\ L_i^- \end{pmatrix} \quad \left(E_i^+\right) . \tag{6.1}$$

Die hierfür relevanten Terme im Superpotential W des MSSM lauten

$$\mu\, \mathbf{H}_1^T\, (i\tau_2)\, \mathbf{H}_2 + \sum_{i,j=1}^{3} y_{ij}^e\, \mathbf{L}_i^T\, (i\tau_2)\, \mathbf{H}_1\, \mathbf{E}_j$$

mit

$$i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

und deren niedrigste skalare Komponente ist

$$\mu\left(H_1^0 H_2^0 - H_1^- H_2^+\right) + \sum_{i,j=1}^{3} y_{ij}^e \left(L_i^0 H_1^- - L_i^- H_1^0\right) E_j^+ .$$

Die allgemeinen Ausdrücke für die einzelnen Teile des Potentials, die F- und D-Terme und die die Supersymmetrie sanft brechenden Terme, geben wir hier nicht mehr an. Sie findet man im Kapitel 4 in den Gleichungen (4.14), (4.15) und (4.16).
Speziell für die betrachteten Komponenten der Superfelder aus (6.1) ergibt sich:

$$\begin{aligned} V_F &= \left|\mu H_2^0 - \sum_{i,j=1}^{3} y_{ij}^e L_i^- E_j^+\right|^2 + \left|-\mu H_2^+ + \sum_{i,j=1}^{3} y_{ij}^e L_i^0 E_j^+\right|^2 + |\mu|^2 \left|H_1^0\right|^2 + |\mu|^2 \left|H_1^-\right|^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{3}\left(\left|\sum_{j=1}^{3} y_{ij}^e H_1^- E_j^+\right|^2 + \left|\sum_{j=1}^{3} y_{ij}^e H_1^0 E_j^+\right|^2 + \left|\sum_{j=1}^{3} y_{ji}^e \left(L_j^0 H_1^- - L_j^- H_1^0\right)\right|^2\right) \end{aligned} \tag{6.2}$$

mit

$$g_1^2 := g_{U(1)}^2 , \qquad g_2^2 := g_{SU(2)}^2$$

und

$$\begin{aligned} V_D &= \frac{1}{8} g_1^2 \left(\left|H_1^0\right|^2 + \left|H_1^-\right|^2 - \left|H_2^0\right|^2 - \left|H_2^+\right|^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\left|L_i^0\right|^2 + \left|L_i^-\right|^2 - 2\left|E_i^+\right|^2\right)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{8} g_2^2 \left(\left|H_1^0\right|^2 + \left|H_1^-\right|^2 - \left|H_2^0\right|^2 + \left|H_2^+\right|^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\left|L_i^0\right|^2 - \left|L_i^-\right|^2\right)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} g_2^2 \left|\overline{H_1^0} H_1^- + \overline{H_2^+} H_2^0 + \sum_{i=1}^{3} \overline{L_i^0} L_i^-\right|^2 , \end{aligned} \tag{6.3}$$

oder nach Auswertung des Betragsquadrates

$$\begin{aligned}
V_D \;=\;& \frac{1}{8} g_1^2 \left(\left|H_1^0\right|^2 + \left|H_1^-\right|^2 - \left|H_2^0\right|^2 - \left|H_2^+\right|^2 + \sum_{i=1}^{3} \left(\left|L_i^0\right|^2 + \left|L_i^-\right|^2 - 2\left|E_i^+\right|^2 \right) \right)^2 \\
&+ \frac{1}{8} g_2^2 \left(\left|H_1^0\right|^2 + \left|H_1^-\right|^2 - \left|H_2^0\right|^2 - \left|H_2^+\right|^2 + \sum_{i=1}^{3} \left(\left|L_i^0\right|^2 + \left|L_i^-\right|^2 \right) \right)^2 \\
&+ g_2^2 \,\mathrm{Re} \left[\overline{H_1^0} H_1^- \overline{H_2^0} H_2^+ + \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{H_1^0} H_1^- L_i^0 \overline{L_i^-} + \overline{H_2^0} H_2^+ \overline{L_i^0} L_i^- \right) + \sum_{i<j} \overline{L_i^0} L_i^- L_j^0 \overline{L_j^-} \right] \qquad (6.4) \\
&+ \frac{1}{2} g_2^2 \left(\left|H_1^0\right|^2 \left|H_2^+\right|^2 + \left|H_1^-\right|^2 \left|H_2^0\right|^2 - \sum_{i \neq j} \left|L_i^0\right|^2 \left|L_j^-\right|^2 \right) \\
&+ \frac{1}{2} g_2^2 \left(\sum_{i=1}^{3} \left(- \left|H_1^0\right|^2 \left|L_i^-\right|^2 - \left|H_1^-\right|^2 \left|L_i^0\right|^2 + \left|H_2^0\right|^2 \left|L_i^-\right|^2 + \left|H_2^+\right|^2 \left|L_i^0\right|^2 \right) \right) ,
\end{aligned}$$

und die sanften Brechungsterme als

$$\begin{aligned}
V_{sanft} \;=\;& m_{H_1}^2 \left(\left|H_1^0\right|^2 + \left|H_1^-\right|^2 \right) + m_{H_2}^2 \left(\left|H_2^0\right|^2 + \left|H_2^+\right|^2 \right) + \sum_{i=1}^{3} \left(m_{L_i}^2 \left(\left|L_i^0\right|^2 + \left|L_i^-\right|^2 \right) + m_{E_i}^2 \left|E_i^+\right|^2 \right) \\
&+ \sum_{i,j=1}^{3} \left\{ A_{ij}^e \, y_{ij}^e \left(L_i^0 H_1^- - L_i^- H_1^0 \right) E_j^+ + h.c. \right\} + \left\{ B\mu \left(H_1^0 H_2^0 - H_1^- H_2^+ \right) + h.c. \right\} . \qquad (6.5)
\end{aligned}$$

Das Potential

$$V_0 \;=\; V_F + V_D + V_{sanft}$$

ist die Summe der Beiträge in (6.2), (6.3) bzw. (6.4) und (6.5).

6.2 Das Potential für eine Leptonengeneration, $H_1^- = 0$ und der Feldraum

Die Beiträge des Potentials sind nach Konstruktion $SU(2) \times U(1)$ invariant. Deshalb eliminieren wir die skalare Komponente H_1^- durch eine geeignete Eichwahl. Hierzu verfahren wir genau wie im vorigen Kapitel und führen dies deshalb nicht noch einmal aus. Auch hier verwenden wir demnach nicht die volle Symmetriegruppe, sondern nur zwei der drei Freiheitsgrade der $SU(2)$.
Die Beiträge zum Potential V_0 erhalten unter Berücksichtigung von $H_1^- = 0$ folgende Gestalt:

$$V_F = \left|\mu H_2^0 - \sum_{i,j=1}^{3} y_{ij}^e\, L_i^- E_j^+\right|^2 + \left|-\mu H_2^+ + \sum_{i,j=1}^{3} y_{ij}^e\, L_i^0 E_j^+\right|^2 + |\mu|^2 \left|H_1^0\right|^2$$
$$+ \sum_{i=1}^{3}\left(\left|\sum_{j=1}^{3} y_{ij}^e\, H_1^0 E_j^+\right|^2 + \left|\sum_{j=1}^{3} y_{ji}^e\, L_j^- H_1^0\right|^2\right), \tag{6.6}$$

$$V_D = \frac{1}{8}\, g_1^2 \left(\left|H_1^0\right|^2 - \left|H_2^0\right|^2 - \left|H_2^+\right|^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\left|L_i^0\right|^2 + \left|L_i^-\right|^2 - 2\left|E_i^+\right|^2\right)\right)^2$$
$$+ \frac{1}{8}\, g_2^2 \left(\left|H_1^0\right|^2 - \left|H_2^0\right|^2 + \left|H_2^+\right|^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\left|L_i^0\right|^2 - \left|L_i^-\right|^2\right)\right)^2 \tag{6.7}$$
$$+ \frac{1}{2}\, g_2^2 \left|\overline{H_2^+} H_2^0 + \sum_{i=1}^{3} \overline{L_i^0} L_i^-\right|^2 .$$

Durch Ausquadrieren des Betrages erhalten wir die D-Term-Beiträge in der Form

$$V_D = \frac{1}{8} g_1^2 \left(\left|H_1^0\right|^2 - \left|H_2^0\right|^2 - \left|H_2^+\right|^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\left|L_i^0\right|^2 + \left|L_i^-\right|^2 - 2\left|E_i^+\right|^2\right)\right)^2$$
$$+ \frac{1}{8} g_2^2 \left(\left|H_1^0\right|^2 - \left|H_2^0\right|^2 - \left|H_2^+\right|^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\left|L_i^0\right|^2 + \left|L_i^-\right|^2\right)\right)^2 \tag{6.8}$$
$$+ g_2^2\, \mathrm{Re}\left[\sum_{i=1}^{3} \bar{H}_2^0 H_2^+ \bar{L}_i^0 L_i^- + \sum_{i<j} \bar{L}_i^0 L_i^- L_j^0 \bar{L}_j^-\right] - \frac{1}{2} g_2^2 \sum_{i\neq j} \left|L_i^0\right|^2 \left|L_j^-\right|^2$$
$$+ \frac{1}{2} g_2^2 \left(\left|H_1^0\right|^2 \left|H_2^+\right|^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(-\left|H_1^0\right|^2 \left|L_i^-\right|^2 + \left|H_2^0\right|^2 \left|L_i^-\right|^2 + \left|H_2^+\right|^2 \left|L_i^0\right|^2\right)\right) .$$

Der Anteil der die Supersymmetrie sanft brechenden Terme lautet:

$$V_{sanft} = m_{H_1}^2 \left|H_1^0\right|^2 + m_{H_2}^2 \left(\left|H_2^0\right|^2 + \left|H_2^+\right|^2\right) + \sum_{i=1}^{3}\left(m_{L_i}^2 \left(\left|L_i^0\right|^2 + \left|L_i^-\right|^2\right) + m_{E_i}^2 \left|E_i^+\right|^2\right) \tag{6.9}$$
$$- \sum_{i,j=1}^{3} \left\{A_{ij}^e y_{ij}^e\, L_i^- H_1^0 E_j^+ + h.c.\right\} + \left\{B\mu\, H_1^0 H_2^0 + h.c.\right\} .$$

Zur Vereinfachung der noch immer komplizierten Ausdrücke der Anteile in den Gleichungen (6.6), (6.8) und (6.9) werden wir im folgenden das Potential für nur eine Leptonenfamilie untersuchen. Somit treten keine Summen über verschiedene Familien auf, und die Zahl der Parameter verringert sich deutlich. Mit den Abkürzungen

$$x_1 := \left|H_1^0\right|, \qquad x_2 := \left|H_2^0\right|, \qquad x_3 := \left|H_2^+\right|,$$
$$x_4 := \left|L_1^0\right|, \qquad x_5 := \left|L_1^-\right|, \qquad x_6 := \left|E_1^+\right|$$

und den Phasenvariablen

$$\begin{aligned}
\theta_1 &:= \arg B + \arg\mu + \arg H_1^0 + \arg H_2^0 \,, \\
\theta_2 &:= \arg A^e + \arg y^e + \arg H_1^0 + \arg L^- + \arg E^+ \,, \\
\theta_3 &:= -\arg H_2^0 + \arg H_2^+ - \arg L^0 + \arg L^-
\end{aligned}$$

erhalten wir für das Potential im Falle einer Leptonenfamilie:

$$\begin{aligned}
V_0 \;=\;& m_1^2 x_1^2 + m_2^2\left(x_2^2+x_3^2\right) + m_L^2\left(x_4^2+x_5^2\right) + m_E^2 x_6^2 + 2\left|m_B^2\right| x_1 x_2 \cos\theta_1 \\
& - 2\left|M_e\right| x_1 x_5 x_6 \cos\theta_2 - 2\left|m_e\right| x_3 x_4 x_6 \cos\left(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e\right) \\
& - 2\left|m_e\right| x_2 x_5 x_6 \cos\left(\theta_2-\theta_1-\theta_e\right) + \left|y^e\right|^2 \left(\left(x_1^2+x_4^2+x_5^2\right)x_6^2 + x_1^2 x_5^2\right) \\
& + \frac{1}{8}\, g_1^2\left(x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_4^2+x_5^2-2x_6^2\right)^2 + \frac{1}{8}\, g_2^2\left(x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_4^2+x_5^2\right)^2 \\
& + g_2^2 x_2 x_3 x_4 x_5 \cos\theta_3 + \frac{1}{2}\, g_2^2 \left(x_1^2\left(x_3^2-x_5^2\right) + x_2^2 x_5^2 + x_3^2 x_4^2 \right) .
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Hierbei sind die Konstanten

$$\begin{aligned}
m_L^2 &:= m_{L_1}^2\,, & m_E^2 &:= m_{E_1}^2\,, & y^e &:= y_{11}^e\,, & A^e &:= A_{11}^e\,, \\
M_e &:= A^e y^e\,, & m_B^2 &:= B\mu\,, & m_e &:= \mu y^e\,, & \theta_e &:= \arg A^e - \arg B
\end{aligned}$$

verwendet worden. Zusätzlich definieren wir

$$g^2 := g_1^2 + g_2^2\,.$$

Von den ursprünglich 14 reellen Freiheitsgraden des Potentials sind nach Ausnutzung der Symmetrien neun übriggeblieben. Und das, obwohl wir eine Symmetriegruppe $SU(2)\times U(1)$ haben, die nur vier Dimensionen umfaßt. Wir konnten einen zusätzlichen Freiheitsgrad eliminieren, welcher eine weitere Symmetrie andeutet, allerdings nur eine Symmetrie des Potentials und nicht der Lagrange-Dichte des Modells.

Den *Feldraum* als Definitionsbereich des Potentials V_0 aus (6.10) setzen wir als

$$\mathcal{F} \; := \; \left(\mathbb{R}_0^+\right)^6 \times \mathbb{R}^3 \;\subset\; \mathbb{R}^9 \tag{6.11}$$

an. Die ersten sechs Komponenten des Feldraumes entsprechen den Beträgen der sechs Komponentenfelder x_1 bis x_6, die weiteren drei den verwendeten Phasenvariablen θ_1 bis θ_3. Wir lassen explizit VEW-Konstellationen zu, welche einen verschwindenden VEW für das neutrale Higgs-Boson im ersten Higgs-Superfeld, H_1^0, erlauben. Eine solche Konstellation als Minimum des Potentials würde keine Masse für das Elektron liefern, wie aus der Struktur der Massenterme der Fermionen im MSSM in (4.12) sichtbar ist.
Der so definierte Feldraum ist keine offene Menge, sondern besitzt ein Inneres

$$\overset{o}{\mathcal{F}} = \left(\mathbb{R}^+\right)^6 \times \mathbb{R}^3$$

sowie einen Rand $\partial\mathcal{F}$ mit folgender disjunkten Zerlegung:

$$\partial\mathcal{F} \;=\; \bigcup_{n=1}^{6} \; \bigcup_{i_1<\cdots<i_n} \partial\mathcal{F}_{i_1\cdots i_n}$$

wobei für $n \in \{1,\ldots,6\}$ und $i_1 \,<\, \cdots \,<\, i_n \,\in\, \{1,\ldots,6\}$

$$\partial\mathcal{F}_{i_1,\cdots,i_n} \;:=\; \left\{\,(y_1,\cdots,y_9) \in \mathcal{F} \;:\; y_{i_1} \;=\; \cdots \;=\; y_{i_n} \;=\; 0\,,\, y_k \neq 0 \quad \forall\, k \notin \{i_1,\ldots,i_n\}\,\right\}$$

ist. Die Variablen, die auf einer Randuntermenge verschwinden, werden wir als *Randvariablen* auf diesem Randbereich bezeichnen.

Die ersten und zweiten partiellen Ableitungen des Potentials nach den verschiedenen Feldern und Phasenvariablen sind im Anhang A vollständig aufgelistet.

6.3 Beschränktheit des Potentials nach unten und bnu-Bedingungen

Das Potential des MSSM soll nach unten beschränkt sein, damit der Vakuumzustand der Zustand mit minimaler Energie ist. Das bedeutet nicht, daß gefordert wird, daß das Potential immer positiv ist, sondern daß keine Richtungen innerhalb des Feldraumes existieren, entlang denen V_0 immer negativere Werte annehmen kann, also nach unten unbeschränkt ist. Damit solche Richtungen nicht existieren, müssen die Parameter bestimmte Bedingungen erfüllen, sogenannte bnu-Bedingungen (beschränkt nach unten). Diese ergeben sich dadurch, daß man Richtungen im Feldraum betrachtet, entlang denen das Potential nach unten unbeschränkt sein könnte, und dann geeignete Forderungen an die Parameter stellt.
Die Terme höchster Ordnung sind deshalb bei dieser Untersuchung ganz besonders entscheidend. In den D-Termen treten Terme vierter und damit höchster Ordnung auf, und aus den F-Termen erhalten wir Terme vierter, dritter und zweiter Ordnung. Die Terme vierter Ordnung müssen positive Beiträge liefern

oder verschwinden. Andernfalls machte die Konstruktion solcher Richtungen im Feldraum keinerlei Mühe. Deshalb müssen die Eichgruppenparameter als Koeffizienten der Terme höchster Ordnung auch positiv sein:

$$g_1^2 > 0 \qquad \text{und} \qquad g_2^2 > 0\,. \tag{6.12}$$

Damit steht fest, daß entlang den zu suchenden Richtungen, für die V_0 nach unten unbeschränkt sein könnte, die D-Terme verschwinden müssen, denn sonst könnten wir durch hinreichend große Werte der Komponenten mit positiven D-Termen stets die dominierenden Beiträge zu V_0 erhalten. Es ist allerdings zu beachten, daß auch V_F aus (6.6), ohne die Summation über verschiedene Teilchengenerationen, Terme vierter Ordnung enthält. Diese besitzen konstruktionsgemäß einen positiven Koeffizienten und müssen deshalb entlang solcher Richtungen in $\mathcal{F}$ ebenso verschwinden. Wenn wir diese Terme vierter Ordnung Null setzen, verschwinden gleichzeitig alle Terme dritter Ordnung in den F-Termen. Dann ist sichergestellt, daß das Potential nur noch Beiträge höchstens zweiter Ordnung aus den F-Termen enthält (oder alle F-Terme verschwinden). An deren Koeffizienten können wir Bedingungen stellen, die die Beschränktheit des Potentials V_0 aus (6.10) nach unten sicherstellen.

Anhand der Darstellung der F-Terme in (6.6) und der D-Terme im Potential aus Gleichung (6.7) und unter Berücksichtigung von (6.12) können wir die notwendigen Bedingungen für die Abwesenheit sämtlicher Terme vierter Ordnung im Potential sofort angeben:

$$\begin{aligned}
x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 2x_6^2 &= 0\,,\\
x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 &= 0\,,\\
\left|\overline{H_2^+} H_2^0 + \overline{L^0} L^-\right| &= 0\,,\\
x_1 x_6 \quad = \quad x_1 x_5 &= 0\,.
\end{aligned}$$

Folgende Richtungen im Feldraum genügen diesen Bedingungen:

- $x_1 = x_2 \neq 0,\ x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$,
- $x_1 x_2 x_4 \neq 0,\ x_3 = x_5 = x_6 = 0 \quad \text{mit} \quad x_1^2 - x_2^2 + x_4^2 = 0$,
- $x_2 = x_4 \neq 0,\ x_1 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$,
- $x_3 = x_5 \neq 0,\ x_1 = x_2 = x_4 = x_6 = 0$,
- $x_2 x_3 x_4 x_5 \neq 0,\ x_1 = x_6 = 0 \quad \text{mit} \quad x_2 = x_4,\ x_3 = x_5,\ \cos\theta_3 = -1$.

Durch Auswertung des Potentials entlang dieser Richtungen ergeben sich die bnu-Bedingungen an die Parameter des Modells. Die erste Richtung liefert die bekannte bnu-Bedingung des reinen Higgs-Falles,

$$m_1^2 + m_2^2 > 2\left|m_B^2\right|\,,$$

und aus der zweiten Richtung ergibt sich mit $a = x_4/x_1 > 0$

$$m_1^2 + \left(a^2+1\right) m_2^2 + a^2 m_L^2 - 2\left|m_B^2\right| \sqrt{a^2+1} \;>\; 0 \qquad \forall\, a > 0\,.$$

Weil die obere bnu-Bedingung des reinen Higgs-Falles gerade der unteren Bedingung für $a = 0$ entspricht, fassen wir beide zusammen und fordern die obige Ungleichung für alle nichtnegativen Werte von a.
Aus den letzten drei Richtungen erhalten wir jeweils die weitere bnu-Bedingung

$$m_2^2 + m_L^2 \;>\; 0\,. \tag{6.13}$$

Auch diese Bedingung ist in der obigen enthalten. Hierzu dividiert man die Ungleichung durch $a^2 + 1$ und vollzieht anschließend den Grenzübergang für $a \to \infty$. Es folgt genau (6.13). Somit können wir die drei gefundenen Bedingungen in einer einzigen Ungleichung zusammenfassen:

$$m_1^2 + \left(a^2+1\right) m_2^2 + a^2 m_L^2 - 2\left|m_B^2\right| \sqrt{a^2+1} \;>\; 0 \qquad \forall\, a \geq 0\,. \tag{6.14}$$

Die Bedingungen (6.14) und (6.12) stellen Einschränkungen an den Parameterraum des Modells dar. Die Gültigkeit dieser bnu-Bedingungen garantiert, daß im Feldraum $\mathcal{F}$ keine Richtungen existieren, entlang denen das Potential V_0 aus (6.10) nach unten unbeschränkt ist und damit ein globales Minimum des Potentials gar nicht auftritt.

Aus der bnu-Bedingung (6.14) wollen wir Bedingungen an die darin auftretenden Parameter m_1^2, m_2^2, m_L^2 und $\left|m_B^2\right|$ aufstellen. Dazu betrachten wir das Polynom

$$p\,(\lambda) \;=\; \lambda^2 - 2\frac{\left|m_B^2\right|}{m_2^2 + m_L^2}\,\lambda + \frac{m_1^2 - m_L^2}{m_2^2 + m_L^2}\,,$$

womit (6.14) äquivalent wird zu

$$p\,(\lambda) \;>\; 0 \qquad \forall\, \lambda \geq 1\,.$$

Das gilt unter Beachtung von (6.13) und $\lambda = \sqrt{a^2+1}$. Diese Aussage ist genau dann erfüllt, falls die größte reelle Nullstelle des Polynoms kleiner als 1 ist oder falls p nur in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Nullstellen besitzt (man beachte, daß das Polynom p eine nach oben offene Parabel darstellt). Im letzteren Fall nämlich ist das Vorzeichen des Polynoms von λ unabhängig und zum Beispiel durch $\operatorname{sgn} p(1) = 1$ gegeben, was genau wegen der bnu-Bedingung des reinen Higgs-Falles folgt. Also ist p stets positiv, falls keine reelle Nullstelle existiert.
Nun wenden wir uns dem Fall zu, daß beide als reell angenommene Nullstellen zusammenfallen. Dies tritt genau dann ein, wenn

$$\left|m_B^2\right|^2 \;=\; \left(m_1^2 - m_L^2\right)\,\left(m_2^2 + m_L^2\right)\,.$$

Die Nullstelle des Polynoms ist durch

$$\lambda_0 \;=\; \frac{\left|m_B^2\right|}{m_2^2 + m_L^2}$$

gegeben. Wir stellen die Bedingung

$$\lambda_0 \; < \; 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left|m_B^2\right| \; < \; m_2^2 + m_L^2$$

auf, die wir in äquivalenter Form als

$$\lambda_0 \; < \; 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \; < \; m_1^2 - m_L^2 \; < \; m_2^2 + m_L^2$$

schreiben können.
Im Fall zweier reeller Nullstellen, der für

$$\left|m_B^2\right|^2 \; > \; \left(m_1^2 - m_L^2\right)\,\left(m_2^2 + m_L^2\right)$$

eintritt, ist

$$\lambda_1 \; = \; \frac{1}{m_2^2 + m_L^2}\left(\left|m_B^2\right| + \sqrt{\left|m_B^2\right|^2 - \left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right)}\right)$$

die größere Nullstelle. Hier gilt:

$$\lambda_1 \; < \; 1 \quad \Longleftrightarrow \quad m_1^2 + m_2^2 \; > \; 2\left|m_B^2\right| \quad \text{und} \quad \left|m_B^2\right| \; < \; m_2^2 + m_L^2 \, .$$

Damit sind zu der bnu-Bedingung (6.14) äquivalente Bedingungen an die Parameter des Modells gefunden, die erfüllt sein müssen. Zur Übersicht stellen wir sie nochmals zusammen:

$$(6.15)\; m_1^2 + m_2^2 \; > \; 2\left|m_B^2\right| \;\text{ und }\; \begin{cases} \left|m_B^2\right|^2 \; < \; \left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right) \, , \\ \left|m_B^2\right|^2 \; \geq \; \left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right) \quad \text{und} \quad \left|m_B^2\right| \; < \; m_2^2 + m_L^2 \, . \end{cases}$$

Wir erkennen, daß hier zum reinen Higgs-Fall zusätzliche Bedingungen auftreten, die von den Parametern im Potential erfüllt werden müssen, um die Beschränktheit nach unten zu garantieren.
Die bnu-Bedingung des reinen Higgs-Falles ergibt sich aus (6.14) für $a = 0$ und enthält den sanften Massenparameter m_L^2 für das Lepton-Superfeld nicht, so daß man die jeweiligen bnu-Bedingungen nicht direkt vergleichen kann. Dennoch läßt sich folgendes sagen: zu jedem beliebigen Wert von m_L^2 und $\left|m_B^2\right| > 0$ existiert eine Konstellation der Parameter m_1^2 und m_2^2, die die bnu-Bedingung (5.15) des reinen Higgs-Falles erfüllt, allerdings nicht mehr die bnu-Bedingungen für den Fall des Potentials mit Slepton-Feldern, also die Bedingung (6.15). Zu festem, aber beliebigen m_L^2 und $\left|m_B^2\right| > 0$ wählen wir zum Beweis dieser Aussage einfach $m_2^2 < -m_L^2$ und $m_1^2 > 2\left|m_B^2\right| - m_2^2$. Dann ist nämlich $m_1^2 + m_2^2 > 2\left|m_B^2\right|$, allerdings ist auch $\left|m_B^2\right|^2 \geq \left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right)$ und auch noch $m_2^2 + m_L^2 < 0$, was genau im Widerspruch zu den Bedingungen in (6.15) steht.

6.4 Suche nach stationären Punkten und lokalen Minima des Potentials

Gesucht ist das globale Minimum des Potentials V_0, das den Grundzustand der Theorie bestimmt. Hierzu werden wir in den einzelnen Bereichen des Feldraumes, den Randbereichen und dem Innern, lokale Minima bestimmen. Das genaue Verfahren und Vorgehen bei der Suche nach lokalen Minima des Potentials im gesamten Feldraum ist im Anhang B ausführlich erläutert. Auch auf die Diskussion der einzelnen speziellen Terme im Potential im Anhang B sei hiermit verwiesen.
Wir wollen nur die Resultate dieser Untersuchungen präsentieren. Folgende Randuntermengen können durch die Überlegungen zum quadratischen Term $x_1 x_2 \cos\theta_1$ ausgeschlossen werden:

mit fünf Variablen: $\partial\mathcal{F}_{23456}$, $\partial\mathcal{F}_{13456}$,

mit vier Variablen: $\partial\mathcal{F}_{2456}$, $\partial\mathcal{F}_{2356}$, $\partial\mathcal{F}_{2346}$, $\partial\mathcal{F}_{2345}$, $\partial\mathcal{F}_{1456}$, $\partial\mathcal{F}_{1356}$, $\partial\mathcal{F}_{1346}$, $\partial\mathcal{F}_{1345}$,

mit drei Variablen: $\partial\mathcal{F}_{256}$, $\partial\mathcal{F}_{246}$, $\partial\mathcal{F}_{245}$, $\partial\mathcal{F}_{236}$, $\partial\mathcal{F}_{235}$, $\partial\mathcal{F}_{156}$, $\partial\mathcal{F}_{146}$, $\partial\mathcal{F}_{145}$, $\partial\mathcal{F}_{136}$, $\partial\mathcal{F}_{135}$,

mit zwei Variablen: $\partial\mathcal{F}_{25}$, $\partial\mathcal{F}_{16}$, $\partial\mathcal{F}_{15}$.

Wegen den analogen Überlegungen, angewandt auf trilineare Terme, entfallen die Randuntermengen

mit vier Variablen: $\partial\mathcal{F}_{1256}$, $\partial\mathcal{F}_{1245}$, $\partial\mathcal{F}_{1235}$, $\partial\mathcal{F}_{1234}$,

mit drei Variablen: $\partial\mathcal{F}_{126}$, $\partial\mathcal{F}_{124}$, $\partial\mathcal{F}_{123}$,

mit zwei Variablen: $\partial\mathcal{F}_{56}$, $\partial\mathcal{F}_{45}$, $\partial\mathcal{F}_{35}$, $\partial\mathcal{F}_{24}$, $\partial\mathcal{F}_{23}$, $\partial\mathcal{F}_{12}$.

Und wegen der Terme vierter Ordnung können wir die Randbereiche

mit zwei Variablen: $\partial\mathcal{F}_{46}$, $\partial\mathcal{F}_{36}$

ausschliessen.

Von den Fällen mit drei nichtverschwindenden Variablen sind noch $\partial\mathcal{F}_{234}$, $\partial\mathcal{F}_{134}$, $\partial\mathcal{F}_{346}$ und $\partial\mathcal{F}_{345}$ zu untersuchen. Dies erfolgt gleich im Anschluß. Die Fälle $\partial\mathcal{F}_{456}$, $\partial\mathcal{F}_{356}$ und $\partial\mathcal{F}_{125}$ jedoch können mit diesen Argumentationen nicht ausgeschlossen werden, und wir werden auf diesen Randbereichen später lokale Minima des Potentials suchen.
Von den Fällen mit vier nichtverschwindenden Variablen müssen noch $\partial\mathcal{F}_{14}$, $\partial\mathcal{F}_{13}$ und $\partial\mathcal{F}_{26}$ untersucht werden. Auf dem Randbereich $\partial\mathcal{F}_{34}$ werden wir später lokale Minima suchen.

Jetzt erfolgt die Untersuchung der speziellen Randuntermengen:

V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{234}$:

In diesem Fall bilden die ersten partiellen Ableitungen nach x_1, x_5 und x_6 und nach den drei Phasen die Stationaritätsbedingungen. Darin tritt von den Phasenvariablen einzig θ_2 auf. Weiterhin gilt unter Berücksichtigung der Matrix der zweiten partiellen Ableitungen

$$\cos\theta_2 \;=\; 1\,.$$

Am stationären Punkt $\vec{x}_S$, dessen Existenz hier angenommen wird, denn andernfalls entfiele diese Randmenge sowieso, ausgewertet, ist

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}_S} = 2\left|m_B^2\right| x_1 \cos\theta_1 - 2\left|m_e\right| x_5 x_6 \cos\left(\theta_1 + \theta_e\right) .$$

Wir wählen die Konstante $\theta_e \in [0, 2\pi)$ und prüfen, ob diese partielle Ableitung durch geeignete Wahl von θ_1 negativ werden kann.
Sei zunächst $\theta_e \in (0; \pi)$. Dann setzen wir $\theta_1 := \frac{3\pi}{2}$ und erhalten so

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}_S} = -2\left|m_e\right| x_5 x_6 \cos\left(\theta_1 + \theta_e\right) < 0 .$$

Für $\theta_e = \pi$ setzen wir $\theta_1 := \pi$ und erhalten

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}_S} = -2\left|m_B^2\right| x_1 - 2\left|m_e\right| x_5 x_6 < 0 .$$

Ist $\theta_e \in (\pi; 2\pi)$, so wählen wir $\theta_1 := \frac{\pi}{2}$, woraus $\theta_1 + \theta_e \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ folgt, und erhalten

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}_S} = -2\left|m_e\right| x_5 x_6 \cos\left(\theta_1 + \theta_e\right) < 0 .$$

Es bleibt nur noch der Fall $\theta_e = 0$ übrig. In diesem Fall ist eine Zerlegung wie in den anderen Fällen unmöglich: wir können nur folgende Form der partiellen Ableitung nach x_2 erreichen:

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}_S} = \left(2\left|m_B^2\right| x_1 - 2\left|m_e\right| x_5 x_6\right) \cos\theta_1 .$$

Das Vorzeichen des Ausdruckes in der Klammer ist durch die Lösung des Gleichungssystems für den stationären Punkt bestimmt. Dementsprechend können wir θ_1 wählen, um diese partielle Ableitung insgesamt negativ werden zu lassen.

Damit ist gemäß den obigen allgemeinen Überlegungen gezeigt, daß bei geeigneter Wahl der Phasenvariable θ_1 am stationären Punkt in jedem Fall

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}_S} < 0$$

gilt. Deshalb folgt, daß der stationäre Punkt kein lokales Minimum im Feldraum $\mathcal{F}$ bildet, denn in jeder Umgebung des stationären Punktes $\vec{x}_S$ innerhalb des Feldraumes existieren Punkte, die einen kleineren Wert des Potentials liefern.

V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{134}$:

In diesem Fall folgt aus den Gleichungen für stationäre Punkte und der Matrix der zweiten partiellen Ableitungen

$$\cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right) = 1 .$$

Die entscheidende partielle Ableitung ist hier deswegen

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_1}\right|_{\vec{x}_S} = 2\left|m_B^2\right| x_2 \cos\theta_1 - 2\left|M_e\right| x_5 x_6 \cos\left(\theta_1 + \theta_e\right) .$$

Die Situation ist vollständig analog zu derjenigen im Fall des stationären Punktes auf der Randuntermenge $\partial\mathcal{F}_{234}$. Dort hatten wir gesehen, daß stets eine Wahl der Phase θ_1 möglich war, so daß die partielle Ableitung nach x_2, ausgewertet am stationären Punkt, negativ wurde. Folglich ist durch analoge Schlußweise in diesem Fall das entsprechende Resultat zu erreichen, nämlich daß wir die Phase θ_1 immer so wählen können, daß

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_1}\right|_{\vec{x}_S} < 0$$

wird. Wir brauchen die Randuntermenge $\partial\mathcal{F}_{134}$ gemäß der Überlegungen in Anhang B nicht mehr zu berücksichtigen.

V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{346}$:

Die Stationaritätsbedingungen legen von den Phasenvariablen nur θ_1 fest:

$$\cos\theta_1 = -1 .$$

Am stationären Punkt ausgewertet finden wir

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_6}\right|_{\vec{x}_S} = -2\left|M_e\right| x_1 x_5 \cos\theta_2 + 2\left|m_e\right| x_2 x_5 \cos\left(\theta_2 - \theta_e\right) .$$

Gilt $\theta_e \in (0;\pi)$, so wählen wir $\theta_2 := \frac{\pi}{2}$ und erreichen die Negativität der partiellen Ableitung nach x_6. Für $\theta_e = \pi$ bewirkt die Wahl $\theta_2 := 0$ das gewünschte. Im Fall $\theta_e \in (\pi; 2\pi)$ schließlich setzen wir $\theta_2 := -\frac{\pi}{2}$.
Gilt $\theta_e = 0$, so erhalten wir die partielle Ableitung in der Form

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_6}\right|_{\vec{x}_S} = \left(-2\left|M_e\right| x_1 + 2\left|m_e\right| x_2\right) x_5 \cos\theta_2 ,$$

so daß wir je nach Vorzeichen der Klammer θ_2 entsprechend wählen können, um die Ableitung negativ werden zu lassen. Das Vorzeichen der Klammer ist durch die Lösung des Systems der Stationaritätsgleichungen eindeutig festgelegt.

V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{345}$:

Hier wird durch die Gleichungen für den stationären Punkt und die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen

$$\cos\theta_1 = -1$$

festgelegt. Die anderen Phasen bleiben unbestimmt. In diesem Fall betrachten wir die partielle Ableitung nach x_5, die am stationären Punkt ausgewertet wird:

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_5}\right|_{\vec{x}_S} = -2\,|M_e|\,x_1 x_6 \cos\theta_2 + 2\,|m_e|\,x_2 x_6 \cos(\theta_2 - \theta_e)\ .$$

Die Situation ist vollständig analog derjenigen im Fall $x_1 x_2 x_5 \neq 0$, einzig x_5 und x_6 sind miteinander zu vertauschen. Ansonsten können wir die Argumentation von oben wiederholen und somit auch diesen Fall bei der Suche nach lokalen Minima im Feldraum $\mathcal{F}$ ausschliessen.

Ganz analog verläuft die Argumentation für die Randbereiche $\partial\mathcal{F}_{14}$, $\partial\mathcal{F}_{13}$ und $\partial\mathcal{F}_{26}$, die ebenfalls entfallen.

Kommen wir zu den Randbereichen, auf denen nur eine Variable verschwindet. Hiervon können durch eine analoge Argumentation wie schon in den bisherigen Fällen die Randmengen $\partial\mathcal{F}_1$, $\partial\mathcal{F}_3$ und $\partial\mathcal{F}_4$ ausgeschlossen werden.
Betrachten wir das Potential auf $\partial\mathcal{F}_2$ genauer: Hier ist die entscheidende Ableitung am stationären Punkt $\vec{x}_S$:

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}_S} = 2\left|m_B^2\right| x_1 \cos\theta_1 - 2\,|m_e|\,x_5 x_6 \cos(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e) + g_2^2 x_3 x_4 x_5 \cos\theta_3\ ,$$

wobei durch die Stationätsbedingungen und die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\cos(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e) &= 1\,,\\ \sin\theta_2 &= 0\end{aligned}$$

und

$$|m_e|\,x_3 x_4 + |M_e|\,x_1 x_5 \cos\theta_2 > 0$$

gelten muß. Damit erhalten wir

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}_S} = 2\left|m_B^2\right| x_1 \cos\theta_1 + \left(g_2^2 x_3 x_4 - 2\,|m_e|\,x_6\right) x_5 \cos\theta_3\ .$$

Hier sind weder θ_1 noch θ_3 festgelegt, sondern einzig die Kombination $\theta_1 + \theta_3 = \theta_2 - \theta_e$ mit $\theta_2 \in \{0;\pi\}$. Wir suchen also solche Werte für θ_1 und θ_3, daß deren Summe einen festen Wert besitzt und $\cos\theta_1 < 0$ ist und $\cos\theta_3$ beide Vorzeichen annehmen kann.
Sei $\theta_2 - \theta_e \in (0;\pi)$ angenommen. Wenn wir $\theta_3 = -\frac{\pi}{2}$ wählen, so folgt $\cos\theta_1 < 0$ und damit die Negativität der partiellen Ableitung. Ist $\theta_2 - \theta_e \in (\pi;2\pi)$, so setzen wir $\theta_2 := \frac{\pi}{2}$ und erreichen so das Gewünschte. Im Falle $\theta_2 = \theta_e$ folgt $\cos\theta_1 = \cos\theta_3$, und wir finden

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}_S} = \left(2\left|m_B^2\right| x_1 + g_2^2 x_3 x_4 - 2\,|m_e|\,x_6\right) x_5 \cos\theta_1\ .$$

In diesem Fall wählen wir die Phase θ_1 je nach feststehendem Vorzeichen der Klammer, welches sich aus der Lösung der Stationaritätsgleichungen ergibt. Dadurch erhalten wir auch in diesem Fall eine negative partielle Ableitung nach x_2 und somit am stationären Punkt kein lokales Minimum des Potentials im ganzen Feldraum. Bleibt noch die Situation für $\theta_2 - \theta_e = \pi$. In diesem Fall folgt $\cos\theta_1 = -\cos\theta_3$ und

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}_S} = \left(2\left|m_B^2\right| x_1 - g_2^2 x_3 x_4 + 2\left|m_e\right| x_6\right) x_5 \cos\theta_1 \,.$$

erneut können wir je nach Vorzeichen der Klammer die Phasenvariable θ_1 festlegen, um eine negative partielle Ableitung nach x_2 zu erreichen. Insgesamt läßt sich in jeder Situation eine geeignete Wahl der Phasenvariablen θ_1 und θ_3 treffen, damit die partielle Ableitung des Potentials nach x_2, ausgewertet am stationären Punkt in diesem Fall, negativ wird.

Das Vorgehen im Fall von $\partial\mathcal{F}_5$ ist analog hierzu. In diesem Fall sind durch die Stationätsgleichungen und die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen

$$\cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e\right) = 1 \qquad \text{und} \qquad \sin\theta_1 = 0 \,.$$

gegeben. Deshalb können die drei cos-Terme in der partiellen Ableitung nach x_5, die am stationären Punkt ausgewertet wird, auf zwei cos-Terme reduziert werden, nämlich auf $\cos\theta_2$ und $\cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right)$. Hierbei ist die Phase θ_2 vollkommen unbestimmt und frei wählbar, denn sie taucht in den stationären Gleichungen nicht auf. Eine Wahl dieser Phase ist immer so möglich, daß die partielle Ableitung nach x_5, am stationären Punkt ausgewertet, negativ wird.

Für $\partial\mathcal{F}_6$ schließlich folgt aus dem System der Gleichungen für den stationären Punkt und der Matrix der zweiten partiellen Ableitungen

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_3 = -1 \,.$$

Deshalb können hier die drei in der partiellen Ableitung nach x_6 auftretenden cos-Terme auf zwei reduziert werden: auf $\cos\theta_2$ und $\cos\left(\theta_2 - \theta_e\right)$, wobei erneut θ_2 beliebig wählbar ist. Somit folgt wie in allen obigen Fällen bisher auch, daß die entscheidende partielle Ableitung nach Auswertung am stationären Punkt negativ ist. Dieser stationäre Punkt kann also kein lokales Minimum im gesamten Feldraum $\mathcal{F}$ darstellen.

Konkret ist eine Untersuchung folgender Randmengen nach stationären Punkten noch durchzuführen:

0) $\partial\mathcal{F}_{123456}$,

1) $\partial\mathcal{F}_{456}$,

2) $\partial\mathcal{F}_{356}$,

3) $\partial\mathcal{F}_{3456}$,

4) $\partial\mathcal{F}_{34}$,

5) $\partial\mathcal{F}_{125}$,

6) $\partial\mathcal{F}_{1246}$,

7) $\partial\mathcal{F}_{1236}$,

8) $\partial\mathcal{F}_{12456}$,

9) $\partial\mathcal{F}_{12356}$,

10) $\partial\mathcal{F}_{12346}$,

11) $\partial\mathcal{F}_{12345}$,

sowie

12) $\overset{o}{\mathcal{F}}$

6.4.1 Fall 0) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{123456}$

Die Punkte, an denen alle x-Variablen Null sind, sind in ganz trivialer Art und Weise stationäre Punkte. Offensichtlich verschwinden auch die ersten partiellen Ableitungen nach den Randvariablen an den stationären Punkten. Die Untermatrix der Hesse-Matrix aus den zweiten partiellen Ableitungen nach den Randvariablen hat folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 2m_1^2 & 2\left|m_B^2\right|\cos\theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\left|m_B^2\right|\cos\theta_1 & 2m_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2m_L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m_L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m_E^2 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten negative Hauptunterdeterminanten, falls einer der Massenparameter m_1^2, m_2^2, m_L^2 oder m_E^2 negativ ist. Es ergibt sich die Bedingung

$$m_1^2 m_2^2 - \left|m_B^2\right|^2 \cos^2\theta_1 \ \geq\ 0\,,$$

um eine negative Hauptunterdeterminanten zu verhindern. In diesem Sinne sind dies notwendige Bedingungen dafür, daß die stationären Punkte lokale Minima im gesamten Feldraum aus (6.11) sein können. Zum Vergleich mit den entsprechenden stationären Punkten im Fall des Potentials im Higgs-Sektor des MSSM treten nur die Bedingungen an die sanften Massenparameter m_L^2 und m_E^2 hinzu.

Das Potential nimmt an all diesen stationären Punkten den Wert Null an. Wir werden sehen, daß in vielen anderen Fällen der Wert des Potentials an den gefundenen stationären Punkten negativ ist. Damit scheidet dieser stationäre Punkt als globales Minimum des Potentials in vielen Bereichen des Parameterraumes aus. Aber ganz vergessen darf man ihn nicht, denn sollte es einen Parameterbereich geben, in dem nur solche lokalen Minima von V_0 existieren, die einen positiven Potentialwert besitzen, so wäre dieser triviale stationäre Punkt in der Tat das globale Minimum des Potentials.
Aus phänomenologischer Sicht jedoch würde ein globales Minimum des Potentials in diesen stationären

Punkten keine Brechung der elektroschwachen Eichsymmetrie bewirken. Deshalb wären Parameterbereiche, in denen das globale Minimum des Potentials in diesen stationären Punkten angenommen wird, im Sinne eines konservativen Ansatzes auszuschließen, um die spontane Symmetriebrechung zu ermöglichen. In jedem Fall auszuschließen sind allerdings Parameterbereiche, in denen außer diesen stationären Punkten keine weiteren existieren, so daß das globale Minimum von V_0 zwangsläufig Null ist.

6.4.2 Fall 1) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{456}$

Die zu verwendenden ersten partiellen Ableitungen sind die nach den drei Beträgen der Higgs-Felder x_1, x_2, x_3. Für das System dieser drei nichtlinearen Gleichungen wurde - unter Berücksichtigung der bnu-Bedingung $g_2^2 > 0$, die hier auch erfüllt sein muß (vergleiche (6.12)) - im letzten Kapitel gezeigt, daß es keine Lösung besitzt, die ein lokales Minimum des Potentials innerhalb des Randbereiches $\partial\mathcal{F}_{456}$ liefert.

6.4.3 Fall 2) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{356}$

In diesem Fall sind alle elektromagnetisch geladenen Komponenten der Superfelder Null gesetzt, nur die ungeladenen Komponenten haben hier VEWe ungleich Null. Das bedeutet, daß eine solche Minimumstruktur die elektrische Ladung als Erhaltungsgröße respektiert.
Die Stationätsgleichungen in diesem Fall sind

$$2m_1^2 x_1 + 2\left|m_B^2\right| x_2 \cos\theta_1 + \frac{1}{2}\, g^2\left(x_1^2 - x_2^2 + x_4^2\right) x_1 = 0\,, \tag{6.16}$$

$$2m_2^2 x_2 + 2\left|m_B^2\right| x_1 \cos\theta_1 - \frac{1}{2}\, g^2\left(x_1^2 - x_2^2 + x_4^2\right) x_2 = 0\,, \tag{6.17}$$

$$2m_L^2 x_4 + \frac{1}{2}\, g^2\left(x_1^2 - x_2^2 + x_4^2\right) x_4 = 0\,, \tag{6.18}$$

$$2\left|m_B^2\right| x_1 x_2 \sin\theta_1 = 0\,. \tag{6.19}$$

Zur Bestimmung von $\cos\theta_1$ nehmen wir die Hesse-Matrix zu Hilfe und erhalten die Bedingung

$$\frac{\partial^2 V_0}{\left(\partial\theta_1\right)^2} = -2\left|m_B^2\right| x_1 x_2 \cos\theta_1 > 0\,,$$

aus der wir wegen (6.19) auf

$$\cos\theta_1 = -1 \tag{6.20}$$

schließen. Damit wird aus den Gleichungen (6.16) bis (6.19)

$$2m_1^2 - 2\left|m_B^2\right| \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{2}\, g^2\left(x_1^2 - x_2^2 + x_4^2\right) = 0\,,$$

$$2m_2^2 - 2\left|m_B^2\right| \frac{x_1}{x_2} - \frac{1}{2}\, g^2\left(x_1^2 - x_2^2 + x_4^2\right) = 0\,,$$

$$2m_L^2 + \frac{1}{2}\, g^2\left(x_1^2 - x_2^2 + x_4^2\right) = 0\,.$$

In diesen Gleichungen treten nur noch die Kombinationen $\frac{x_2}{x_1}$ und $x_1^2 - x_2^2 + x_4^2$ auf. Folglich muß eine zusätzliche Bedingung bestehen, welche die Lösbarkeit dieses Systems garantiert. Setzen wir die letzte Gleichung in die beiden oberen ein, so ergibt sich

$$z := \frac{x_2}{x_1} = \frac{m_1^2 - m_L^2}{|m_B^2|} = \frac{|m_B^2|}{m_2^2 + m_L^2} .$$

Für den Koeffizienten $|m_B^2|$ folgt

$$|m_B^2|^2 = \left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right) .$$

Dies ist nach der bnu-Bedingung (6.14) möglich, allerdings nach (6.15) nur in Verbindung mit

$$0 < m_1^2 - m_L^2 < m_2^2 + m_L^2 \iff |m_B^2| < m_2^2 + m_L^2 . \tag{6.21}$$

Die Lösung des Systems der ersten partiellen Ableitungen ergibt sich zusammengefaßt in der Form

$$|m_B^2| = \sqrt{(m_1^2 - m_L^2)(m_2^2 + m_L^2)} , \tag{6.22}$$

$$z = \sqrt{\frac{m_1^2 - m_L^2}{m_2^2 + m_L^2}} < 1 , \tag{6.23}$$

$$x_2^2 = z^2 x_1^2 , \tag{6.24}$$

$$x_4^2 = -4g^{-2} m_L^2 + \left(z^2 - 1\right) x_1^2 . \tag{6.25}$$

Wegen $z < 1$ folgt aus (6.25) notwendigerweise

$$m_L^2 < 0 \tag{6.26}$$

und

$$x_1^2 < -4g^{-2} m_L^2 \, \frac{m_2^2 + m_L^2}{m_2^2 - m_1^2 + 2m_L^2} , \tag{6.27}$$

weil sonst x_4^2 nicht positiv wäre. Weiterhin folgt aus (6.21)

$$m_2^2 > m_1^2 . \tag{6.28}$$

Diese stationären Punkte können demnach nur in Bereichen des Parameterraumes auftreten, in denen

(6.26) und (6.28) gelten.
Das Potential nimmt an den stationären Punkten den Wert

$$V_0\,(\,\text{Fall 2})\,) \;=\; -2g^{-2}m_L^4$$

an.
Die Berechnung der auf dieser Randuntermenge zu verwendenden Hauptunterdeterminanten der Hesse-Matrix, ausgewertet an den stationären Punkten, liefert in diesem Fall

$$\begin{aligned}
D_1 &= \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} \;=\; 2\left(m_1^2 - m_L^2\right) + g^2 x_1^2 \;>\; 0\,,\\
D_{12} &= \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2}\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_2)^2} - \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 \;=\; 2g^2\left|m_B^2\right| z^{-1} x_1^2 \left(z^2-1\right)^2 \;\geq\; 0\,,\\
D_{124} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Damit können die stationären Punkte auf $\partial\mathcal{F}_{356}$ lokale Minima auf dieser Randmenge liefern. Genauer ist dies aufgrund der verschwindenden Determinante D_3 nicht auszusagen.
Mit den anderen Elementen der Hesse-Matrix ist zu prüfen, ob es sich um ein lokales Minimum im gesamten Feldraum (6.11) handeln kann, wie es das in Anhang B beschriebene Vorgehen vorsieht. Wir haben es mit der folgenden Untermatrix der Hesse-Matrix an den stationären Punkten zu tun:

$$\begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3 \partial x_5} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3 \partial x_6}\\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3 \partial x_5} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_5)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_5 \partial x_6}\\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_5 \partial x_6} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_5 \partial x_6} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_6)^2}
\end{pmatrix} \tag{6.29}$$

mit den Einträgen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} &= 2m_2^2 + 2m_L^2 + g_2^2 x_1^2\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3 \partial x_5} &= g_2^2 x_2 x_4 \cos\theta_3\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3 \partial x_6} &= 2\left|m_e\right| x_4 \cos\left(\theta_2 - \theta_3 - \theta_e\right)\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_5)^2} &= \Big(2\left|y^e\right|^2 + g_2^2\left(z^2-1\right)\Big)\, x_1^2\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_5 \partial x_6} &= \left(-2\left|M_e\right|\cos\theta_2 + 2\left|m_e\right| z \cos\left(\theta_2 - \theta_e\right)\right) x_1\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_6)^2} &= 2m_E^2 + 4g^{-2}\,g_1^2\,m_L^2 - 8g^{-2}\left|y^e\right|^2\, m_L^2 + 2\left|y^e\right|^2\, z^2\, x_1^2\,.
\end{aligned}$$

Aufgrund der bnu-Bedingung (6.12) bzw. wegen (6.21) ist

$$\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} > 0 .$$

Für die zweite Hauptunterdeterminante finden wir

$$\begin{aligned} D_{35} &= x_1^2 \Big[g_2^2 x_1^2 \Big\{ 2\,|y^e|^2 + g_2^2\,(z^2-1)\,(1 - z^2\cos^2\theta_3) \Big\} \\ &\quad + 2\,(m_2^2 + m_L^2)\,\Big(2\,|y^e|^2 + g_2^2\,(z^2-1) \Big) + 4g^{-2} g_2^4 m_L^2 z^2 \cos^2\theta_3 \Big] . \end{aligned}$$

Die Bedingung $D_{35} \geq 0$ als notwendige Bedingung für ein lokales Minimum im gesamten Feldraum an diesen stationären Punkten hat keine einfache Form. Noch eine notwendige Bedingung ergibt sich aus der Determinante der ganzen Untermatrix aus (6.29): $D_{356} \geq 0$, die noch komplizierter ist. Wie an den oben aufgelisteten Elementen dieser Untermatrix zu sehen ist, taucht über den Parameter $|M_e|$ in dieser notwendigen Determinantenbedingung $D_{356} \geq 0$ der trilineare Parameter A^e auf. Diese Bedingung schränkt demnach seinen möglichen Wertebereich ein, falls die stationären Punkte auf dieser Randmenge lokale Minima im gesamten Feldraum darstellen soll.
Einfachere notwendige Bedingungen sind durch die Nicht-Negativität der Diagonalelemente gegeben: daraus erhalten wir die einfacheren Ungleichungen

$$|y^e|^2 > \frac{1}{2}\, g_2^2\, \frac{m_2^2 - m_1^2 + 2m_L^2}{m_2^2 + m_L^2} \tag{6.30}$$

und

$$x_1^2 > g^{-2}\,|y^e|^{-2}\, \frac{m_2^2 + m_L^2}{m_1^2 - m_L^2}\, \Big(-2m_L^2 \Big(2\,|y^e|^2 - g_1^2 \Big) - m_E^2 g^2 \Big) . \tag{6.31}$$

Diese beiden Ungleichungen stellen nur notwendige Bedingungen an die Parameter dar und garantieren nicht, daß wirklich lokale Minima im gesamten Feldraum an diesen stationären Punkten auf der Randuntermenge $\mathcal{F}_{356}$ vorliegen.

Zusammen mit (6.27) haben wir zumindest eine obere und untere Schranke für x_1^2 gefunden sowie mit (6.30) eine einfache notwendige Bedingung für die Parameter im Potential.

6.4.4 Fall 3) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{3456}$

Dieser Randbereich ist der, auf welchem das Potential im Higgs-Sektor des MSSM einen stationären Punkt besitzen kann, der im Fall seiner Existenz auch das globale Minimum darstellt. Dies hatten wir bei der Untersuchung von V_0 im Higgs-Sektor gefunden. Deshalb nennen wir den stationären Punkt auf dieser Randuntermenge den *stationären Punkt des Higgs-Falles*, der im Higgs-Sektor des MSSM das *Standard-Vakuum* liefert.

Die zwei Stationaritätsbedingungen auf dieser Randmenge sind die gleichen wie im Fall des reinen Higgs-Potentials und $x_3 = 0$. Deshalb können wir ihre Lösung aus dem vorigen Kapitel übernehmen:

$$x_1^2 = 4g^{-2}\left(1-z^2\right)^{-1}\left(\left|m_B^2\right| z - m_1^2\right), \tag{6.32}$$

$$x_2^2 = z^2\, x_1^2\,, \tag{6.33}$$

$$\cos\theta_1 = -1\,, \tag{6.34}$$

wobei $z = x_1^{-1} x_2$ die reelle und positive Lösung der quadratischen Gleichung

$$z^2 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{|m_B^2|}\, z + 1 = 0 \tag{6.35}$$

ist und folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

$$\frac{m_1^2}{|m_B^2|} < z < 1 \qquad \text{oder} \qquad 1 < z < \frac{m_1^2}{|m_B^2|} \tag{6.36}$$

sowie

$$m_1^2 m_2^2 - \left|m_B^2\right|^2 < 0\,. \tag{6.37}$$

Abhängig vom Größenverhältnis der Massenparameter m_1^2 und m_2^2 erhalten wir

$$m_1^2 > m_2^2 \implies z = \left(2\left|m_B^2\right|\right)^{-1}\left(m_1^2 + m_2^2 + \sqrt{\left(m_1^2+m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\right),$$

$$m_2^2 > m_1^2 \implies z = \left(2\left|m_B^2\right|\right)^{-1}\left(m_1^2 + m_2^2 - \sqrt{\left(m_1^2+m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\right),$$

mit den Potentialwerten

$$m_1^2 > m_2^2 : \quad V_0\,(\text{Fall } 3)) = -\left(2g^2\right)^{-1}\left(m_1^2 - m_2^2 - \sqrt{\left(m_1^2+m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\right)^2,$$

$$m_2^2 > m_1^2 : \quad V_0\,(\text{Fall } 3)) = -\left(2g^2\right)^{-1}\left(m_2^2 - m_1^2 - \sqrt{\left(m_1^2+m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\right)^2.$$

Wie schon im reinen Higgs-Fall sind die Hauptunterdeterminanten der relevanten Untermatrix der Hesse-Matrix am stationären Punkt alle positiv. Damit ist der stationäre Punkt ein lokales Minimum auf dem Randbereich $\partial\mathcal{F}_{3456}$.

Wir prüfen nun, ob und unter welchen Bedingungen es sich um ein lokales Minimum im gesamten Feldraum $\mathcal{F}$ aus (6.11) handelt. Gemäß des in Anhang B geschilderten Verfahrens betrachten wir zunächst die ersten partiellen Ableitungen nach den Randvariablen x_3, x_4, x_5 und x_6 am stationären Punkt. Sie sind alle gleich Null. Deshalb kommen wir zur Untersuchung der entsprechenden Untermatrix der Hesse-Matrix:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_4)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_5)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_5 \partial x_6} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_5 \partial x_6} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_6)^2} \end{pmatrix} .$$

Für die ersten beiden Einträge in der Hauptdiagonalen gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} &= 2\left|m_B^2\right| z^{-1} + g_2^2 x_1^2 \;>\; 0\,, \\ \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_4)^2} &> 0 \quad\Longleftrightarrow\quad z \;>\; \left|m_B^2\right|^{-1}\left(m_1^2 - m_L^2\right)\,. \end{aligned}$$

Dies bedeutet in den zwei zu unterscheidenden Fällen die folgenden notwendigen Bedingungen:

$$\begin{aligned} m_1^2 > m_2^2 :\quad \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_4)^2} \geq 0 \;&\Longleftrightarrow\; m_L^2 \;\geq\; \frac{1}{2}\left(m_1^2 - m_2^2 - \sqrt{\left(m_1^2+m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\right) \;>\; 0\,, \\ m_2^2 > m_1^2 :\quad \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_4)^2} \geq 0 \;&\Longleftrightarrow\; m_L^2 \;\geq\; -\frac{1}{2}\left(m_2^2 - m_1^2 - \sqrt{\left(m_1^2+m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\right)\,. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Weitere notwendige Bedingungen lauten:

$$\begin{aligned} m_1^2 > m_2^2 :&\quad \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_5)^2} \geq 0 \quad\Longleftrightarrow \\ m_L^2 &\geq \frac{1}{2}\left(m_2^2 - m_1^2 + w^2\right)\left(\frac{8g^{-2}\left|y^e\right|^2\left|m_B^2\right|^2}{4\left|m_B^2\right|^2 - \left(m_1^2+m_2^2\right)\left(m_1^2+m_2^2+w^2\right)} + 1 - 2\,\frac{g_1^2}{g^2}\right)\,, \\ m_2^2 > m_1^2 :&\quad \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_5)^2} \geq 0 \quad\Longleftrightarrow \\ m_L^2 &\geq \frac{1}{2}\left(m_2^2 - m_1^2 - w^2\right)\left(\frac{8g^{-2}\left|y^e\right|^2\left|m_B^2\right|^2}{4\left|m_B^2\right|^2 - \left(m_1^2+m_2^2\right)\left(m_1^2+m_2^2-w^2\right)} + 1 - 2\,\frac{g_1^2}{g^2}\right)\,, \end{aligned} \tag{6.39}$$

mit

$$w^2 \;:=\; \sqrt{\left(m_1^2+m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\,.$$

Aus der verbleibenden zweireihigen Unterdeterminante erhalten wir die Bedingung

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_5)^2}\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_6)^2} - \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_5 \partial x_6}\right)^2 \quad &\geq \quad 0 \qquad \Longleftrightarrow \\
0 \quad \leq \quad & \left\{2\left|y^e\right|^2 - g_1^2\left(1-z^2\right)\right)\left(2\left|y^e\right|^2 - g_2^2\left(1-z^2\right)\right\} x_1^4 \\
& + \left\{2m_E^2\left(2\left|y^e\right|^2 - g_2^2\left(1-z^2\right)\right) + \left(2m_L^2 - 2m_1^2 + 2\left|m_B^2\right| z\right)\left(2\left|y^e\right|^2 - g_1^2\left(1-z^2\right)\right)\right\} x_1^2 \\
& - \left(\left|M_e\right|\cos\theta_2 - \left|m_e\right| z \cos\left(\theta_2 - \theta_e\right)\right)^2 x_1^2 + 4m_E^2\left(m_L^2 - m_1^2 + \left|m_B^2\right| z\right) ,
\end{aligned} \tag{6.40}
$$

wobei noch der Ausdruck für x_1^2 am stationären Punkt aus (6.32) verwendet werden muß. Dann enthält diese Ungleichung außer der unbestimmten Phasenvariablen θ_2 nur noch Parameter des Potentials.
Verlangt man in den Ungleichungen (6.38), (6.39) und (6.40) anstelle des $\geq$ bzw. $\leq$ ein $>$ bzw. $<$, so werden diese Ungleichungen zu hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines lokalen Minimums im gesamten Feldraum an diesem stationären Punkt.

Für die phänomenologisch benötigte Situation, daß beide ungeladenen Higgs-Bosonen einen VEW ungleich Null annehmen, darüberhinaus aber kein weiteres Skalarfeld, ist es notwendig, daß der stationäre Punkt des Higgs-Falles, der das Standard-Vakuum liefert, ein lokales Minimum im erweiterten Feldraum $\mathcal{F}$ aus (6.11) ist. Dies wird durch die Ungleichungen in (6.38), (6.39) und (6.40) ausgedrückt. Die letzte dieser Ungleichungen enthält den trilinearen Parameter A^e in Form von $|M_e|$ und schränkt so dessen Wertebereich ein. Diese Einschränkungen sind aber nur notwendige, keine hinreichenden Bedingungen an den Parameter A^e.

6.4.5 Vergleich der Fälle 2) und 3)

Die stationären Punkte in diesen beiden Fällen sind durch VEW-Konstellationen ausgezeichnet, die nur elektrisch ungeladenen Feldern und beiden neutralen Higgs-Feldern VEWe ungleich Null zuweisen. Lieferte einer von ihnen das globale Minimum des Potentials, so wäre wunschgemäß die elektroschwache Symmetrie, nicht aber die Invarianz der elektrischen Ladung spontan gebrochen. Die stationären Punkte auf allen anderen Randuntermengen beinhalten VEWe ungleich Null für geladene skalare Felder oder aber keine VEWe für die ungeladenen Higgs-Felder. Aus phänomenologischer Sicht sind diese beiden Konstellationen besonders interessant, auch wenn einschränkend erwähnt werden muß, daß ein nichtverschwindender VEW für ein Sneutrino zumindest auch die Leptonenzahlerhaltung spontan verletzt. Wir wollen zunächst die stationären Punkte in diesen zwei Fällen und vor allem die zugehörigen Potentialwerte miteinander vergleichen.

In beiden Fällen haben wir unter gewissen Voraussetzungen an die Parameter des Potentials stationäre Punkte gefunden, die auch lokale Minima des Potentials V_0 im gesamten Feldraum sein könnten. Wir betrachten die Situation, in der die Bedingungen an die Parameter in beiden Fällen erfüllt sind und damit beide stationären Punkte existieren. Dazu fassen wir zunächst die Bedingungen in den einzelnen Fällen nochmals zusammen:

Fall 2) Hier gelten die Bedingungen (6.22),

$$\left|m_B^2\right|^2 = \left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right) ,$$

(6.21), (6.26) und (6.28), die wir als

$$m_2^2 - m_1^2 + 2m_L^2 \ > \ 0 \quad \text{und} \quad m_L^2 \ < \ 0 \quad \text{und} \quad m_2^2 \ > \ m_1^2$$

schreiben.

Fall 3) Zusätzlich zu den bnu-Bedingungen ist hier noch

$$m_1^2 m_2^2 - \left|m_B^2\right|^2 \ < \ 0$$

zu fordern. Setzen wir den Ausdruck für $\left|m_B^2\right|$ aus den Bedingungen des Falles 2) ein, so ergibt sich

$$m_L^2 \left(m_2^2 - m_1^2 + m_L^2\right) \ < \ 0$$

Von den beiden Konstellationen $m_2^2 > m_1^2$ und umgekehrt kommt nur die erste in Frage, denn der stationäre Punkt im Fall 2) existiert sonst gar nicht. Dies ist in (6.28) festgehalten. Im Fall $m_1^2 > m_2^2$ existiert nur der stationäre Punkt im Fall 3).

Im Fall $m_2^2 > m_1^2$, in dem beide stationären Punkte existieren, erhalten wir für den Wert des Potentials am stationären Punkt des reinen Higgs-Falles

$$V_0\,(\,\text{Fall } 3)\,) \ = \ -\left(2g^2\right)^{-1} \left(m_2^2 - m_1^2 - \left|m_2^2 - m_1^2 + 2m_L^2\right|\right)^2 \ ,$$

und wegen (6.21) folgt

$$V_0\,(\,\text{Fall } 2)\,) \ = \ V_0\,(\,\text{Fall } 3)\,) \ = \ -2g^{-2} m_L^4 \,.$$

Wenn beide stationären Punkte in den Fällen 2) und 3) vorliegen, so liefern beide den gleichen Potentialwert. Die zusätzlichen Bedingungen an die stationären Punkte in beiden Fällen, um lokale Minima im gesamten Feldraum zu liefern, sind bei diesem Vergleich nicht berücksichtigt worden.

6.4.6 Fall 4) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{34}$

Wir betrachten zunächst die Stationaritätsbedingungen für die Phasen θ_1 und θ_2:

$$-2\left|m_B^2\right| x_1 \sin\theta_1 - 2\left|m_e\right| x_5 x_6 \sin\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right) \ = \ 0\,, \tag{6.41}$$

$$2\left|M_e\right| x_1 \sin\theta_2 + 2\left|m_e\right| x_2 \sin\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right) \ = \ 0\,. \tag{6.42}$$

Aus $\sin\theta_1 = 0$ folgt $\sin\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right) = 0$ und hieraus wieder $\sin\theta_2 = 0$. Das liefert aber

$$
\begin{aligned}
0 &= \sin(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e) \\
&= \sin(\theta_2 - \theta_1)\,\cos\theta_e - \cos(\theta_2 - \theta_1)\,\sin\theta_e \\
&= -\cos\theta_1\,\cos\theta_2\,\sin\theta_e
\end{aligned}
$$

und deshalb $\sin\theta_e = \sin(\arg A^e - \arg B) = 0$. Analog folgert man von $\sin\theta_2 = 0$ bzw. von $\sin(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e) = 0$ ausgehend. Aus den betrachteten stationären Gleichungen folgt also:

$$
\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = \sin(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e) = 0 \quad \text{oder} \quad \sin\theta_1\,\sin\theta_2\,\sin(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e) \neq 0 \tag{6.43}
$$

Im ersten Fall erhalten wir für die Verhältnisse

$$
\begin{aligned}
y &:= \frac{x_5 x_6}{x_1}\,, \\
z &:= \frac{x_2}{x_1}
\end{aligned}
$$

aus den Gleichungen (6.41) und (6.42) keine Aussage, im zweiten Fall folgt

$$
y = -\frac{|m_B^2|}{|m_e|}\,\frac{\sin\theta_1}{\sin(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e)}\,, \tag{6.44}
$$

$$
z = -\frac{|M_e|}{|m_e|}\,\frac{\sin\theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e)}\,. \tag{6.45}
$$

Die restlichen vier Gleichungen des Systems für den stationären Punkt sind dann

$$
2m_1^2 - 2\,|m_B^2|\,z + 2\,|y^e|^2\,(x_5^2 + x_6^2) - 2\,|M_e|\,y + \frac{1}{2}\,g^2\,(x_1^2 - x_2^2 + x_5^2) - g_1^2 x_6^2 - g_2^2 x_5^2 = 0\,, \tag{6.46}
$$

$$
2m_2^2 - 2\,|m_B^2|\,z^{-1} - 2\,|m_e|\,y z^{-1} - \frac{1}{2}\,g^2\,(x_1^2 - x_2^2 + x_5^2) + g_1^2 x_6^2 + g_2^2 x_5^2 = 0\,, \tag{6.47}
$$

$$
\begin{aligned}
2m_L^2 + 2\,|y^e|^2\,(x_1^2 + x_6^2) - 2\,|M_e|\,y^{-1} x_6^2 - 2\,|m_e|\,z y^{-1} x_6^2 + \frac{1}{2}\,g^2\,(x_1^2 - x_2^2 + x_5^2) & \\
- g_1^2 x_6^2 + g_2^2\,(-x_1^2 + x_2^2) &= 0\,,
\end{aligned} \tag{6.48}
$$

$$
2m_E^2 + 2\,|y^e|^2\,(x_1^2 + x_5^2) - 2\,|M_e|\,y^{-1} x_5^2 - 2\,|m_e|\,z y^{-1} x_5^2 - g_1^2\,(x_1^2 - x_2^2 + x_5^2 - 2x_6^2) = 0\,. \tag{6.49}
$$

Die Gleichungen (6.46) bis (6.49) bilden ein lineares Gleichungssystem in x_1^2, x_2^2, x_5^2 und x_6^2, falls wir y und z als feste Variablen betrachten. Im ersten Fall aus (6.43) müssen wir die Lösung für jeden positiven Wert der Verhältnisse y und z in Betracht ziehen. Wir können keine dieser Lösungen ausschließen.

Im zweiten Fall aus (6.43) muß die Lösung dieses Systems jedoch die Beziehungen (6.44) und (6.45) zwischen den x-Variablen und y und z erfüllen. Wir erhalten durch Einsetzen der Lösungen des linearen Gleichungssystems der Gleichungen (6.46) bis (6.49) in (6.44) und (6.45) Konsistenzbedingungen für die Werte der Verhältnisse y und z. Also nicht für alle positiven Werte von y und z ergeben sich Lösungen der Stationaritäts gleichungen, sondern nur für diejenigen, die auch die Konsistenzbedingungen erfüllen. Dies liefert in diesem Fall erste Einschränkungen an die Parameter $\left|m_B^2\right|$, $|m_e|$, $|M_e|$ und $|y^e|$ des Potentials V_0.

Bleibt die Lösung des Gleichungssystems für x_1^2, x_2^2, x_5^2 und x_6^2 anzugeben. Die Formeln dieser Lösung besitzen einen solchen Umfang, daß es vollkommen ausweglos erscheint, auf analytische Weise diesen Fall weiter zu behandeln. Deshalb können wir nur prinzipiell das weitere Vorgehen angeben, aber eine Durchführung in der Hoffnung, nicht allzu komplizierte Bedingungsgleichungen für die Parameter zu erhalten, wird ein entäuschendes Ende nehmen.

Einschränkungen ergeben sich aus der Forderung, daß der stationäre Punkt auch ein lokales Minimum des Potentials auf dem Randbereich $\partial\mathcal{F}_{34}$ und sogar im gesamten Feldraum liefert. Hierzu müssen wir wieder die zweiten partiellen Ableitungen des Potentials betrachten.

Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen erhalten wir unter der Annahme der Existenz eines stationären Punktes als dortigen Potentialwert in beiden in (6.43) genannten Fällen:

$$\begin{aligned} V_0\,(\text{Fall 4})\,) \quad = \quad & |M_e|\, y\, x_1^2 \cos\theta_2 + |m_e|\, y\, z^{-1} x_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e) - |y^e|^2 \left(\left(x_1^2 + x_5^2\right) x_6^2 + x_1^2 x_5^2 \right) \\ & - \frac{1}{8} g_1^2 \left(x_1^2 - x_2^2 + x_5^2 - 2x_6^2\right)^2 - \frac{1}{8} g_2^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - x_5^2\right)^2 \,, \end{aligned}$$

wobei für x_1, x_2, x_5 und x_6 die Lösungen des Systems der Gleichungen (6.46) bis (6.49) und y und z für die Verhältnisse aus (6.41) und ($|refH + L : 4 - 2$) einzusetzen sind. Die auftretenden Phasenvariablen sind unbestimmt.

6.4.7 Fall 5) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{125}$

Aus den Stationaritätsbedingungen folgen die Gleichungen

$$2m_2^2 - 2\,|m_e|\,\frac{x_4 x_6}{x_3} - \left(\frac{1}{2} g^2 \left(-x_3^2 + x_4^2\right) - g_1^2 x_6^2 - g_2^2 x_4^2\right) = 0\,, \tag{6.50}$$

$$2m_L^2 - 2\,|m_e|\,\frac{x_3 x_6}{x_4} + 2\,|y^e|^2\, x_6^2 + \left(\frac{1}{2} g^2 \left(-x_3^2 + x_4^2\right) - g_1^2 x_6^2 + g_2^2 x_3^2\right) = 0\,, \tag{6.51}$$

$$2m_E^2 - 2\,|m_e|\,\frac{x_3 x_4}{x_6} + 2\,|y^e|^2\, x_4^2 - g_1^2 \left(-x_3^2 + x_4^2 - 2x_6^2\right) = 0\,, \tag{6.52}$$

$$\cos(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e) = 1\,, \tag{6.53}$$

wobei sich (6.53) wegen der Forderung der positiven Definitheit der Hesse-Matrix ergibt und schon in den ersten drei Gleichungen berücksichtigt wurde.
Unter Verwendung des Verhältnisses

$$y := \frac{x_3 x_4}{x_6} \tag{6.54}$$

stellen diese Gleichungen ein lineares Gleichungssystem in den Variablen x_3^2, x_4^2 und x_6^2 dar, wenn wir y als konstant ansehen. Die Lösung des Gleichungssystems lautet:

$$\begin{aligned} x_3^2 \;=\; & -y\Big(-2\,g_1^2\,y\,|m_e|^2 - y\,g_2^2\,g_1^2\,m_L^2 + 2\,|m_e|\,g_1^2\,m_E^2 - y\,g_2^2\,g_1^2\,m_E^2 + y^2 g_2^2\,g_1^2\,|m_e| \\ & + 4\,|y^e|^2\,y\,g_1^2\,m_2^2 + y\,g_2^2\,g_1^2\,m_2^2 + 4\,|m_e|\,g_1^2\,m_L^2 + 2\,g_1^2\,|y^e|^2\,y\,m_L^2 + 4\,|y^e|^2\,y\,|m_e|^2 \\ & + |y^e|^2\,y\,g_2^2\,m_E^2 - |y^e|^2\,y^2 g_2^2\,|m_e| - 4\,|y^e|^4\,y\,m_2^2 - |y^e|^2\,y\,g_1^2\,m_E^2 + |y^e|^2\,y^2 g_1^2\,|m_e| \\ & -4\,|y^e|^2\,m_E^2\,|m_e|\Big)/N\,, \end{aligned} \tag{6.55}$$

$$\begin{aligned} x_4^2 \;=\; & y\Big(|y^e|^2\,y\,g_2^2\,m_E^2 - 2\,g_1^2\,y\,|m_e|^2 - y\,g_2^2\,g_1^2\,m_L^2 - 4\,|m_e|\,g_1^2\,m_2^2 + 2\,|m_e|\,g_1^2\,m_E^2 \\ & - y\,g_2^2\,g_1^2\,m_E^2 + y^2 g_2^2\,g_1^2\,|m_e| - 2\,|y^e|^2\,y\,g_1^2\,m_2^2 + |y^e|^2\,y\,g_1^2\,m_E^2 - |y^e|^2\,y^2 g_1^2\,|m_e| \\ & - |y^e|^2\,y^2 g_2^2\,|m_e| + y\,g_2^2\,g_1^2\,m_2^2\Big)/N\,, \end{aligned} \tag{6.56}$$

$$\begin{aligned} x_6^2 \;=\; & \Big(-2\,g_1^2\,y^2\,|m_e|^2 - y^2 g_2^2\,g_1^2\,m_L^2 - 2\,|m_e|\,g_1^2\,m_2^2\,y + 2\,|m_e|\,g_1^2\,y\,m_E^2 - y^2 g_2^2\,g_1^2\,m_E^2 \\ & + y^3 g_2^2\,g_1^2\,|m_e| + |y^e|^2\,y^2 g_1^2\,m_2^2 + y^2 g_2^2\,g_1^2\,m_2^2 + 2\,|m_e|\,g_1^2\,y\,m_L^2 + y^2 g_2^2\,|y^e|^2\,m_L^2 \\ & + 4\,y\,|y^e|^2\,|m_e|\,m_2^2 - y^2 g_2^2\,|y^e|^2\,m_2^2 + g_1^2\,|y^e|^2\,y^2 m_L^2 + 4\,m_E^2\,|m_e|^2 - 2\,y\,g_2^2\,|m_e|\,m_E^2 \\ & -4\,y\,|m_e|^3 + 2\,y^2 g_2^2\,|m_e|^2\Big)/N\,. \end{aligned} \tag{6.57}$$

mit

$$N := -4\,g_1^2\,m_E^4 + 2\,y\,g_1^2\,g_2^2\,\Big(|m_e| + y\,|y^e|^2\Big) - 4\,|y^e|^2\,y\,g_1^2\,m_E^2 - |y^e|^4\,y^2 g^2\,.$$

Mit diesen Lösungen des Gleichungssystems in Abhängigkeit der Potentialparameter und y erhalten wir durch Einsetzen in (6.54) eine Konsistenzbedingung, die eine algebraische Gleichung in y ist. Nur für die reellen und positiven Lösungen dieser algebraischen Gleichung sind die Lösungen des linearen Gleichungssystems auch die Lösungen des Systems der Stationaritätsgleichungen. Hieraus folgen noch keine Einschränkungen an Parameter des Potentials, es sei denn die sich ergebende algebraische Gleichung in y besitzt positive Lösungen nur für bestimmte Parameterkonstellationen.

Damit ist der stationäre Punkt auf dieser Randuntermenge bestimmt, und es ist nun zu prüfen, ob es sich um eine Stelle eines lokalen Minimums auf diesem Randbereich oder sogar im gesamten Feldraum handeln kann. Zunächst betrachten wir die ersten partiellen Ableitungen nach den Randvariablen x_1, x_2 und x_5, die, am stationären Punkt ausgewertet, alle verschwinden. Somit kommen wir zur Untersuchung der Hesse-Matrix, und zwar zunächst zu der Untermatrix, die nur Ableitungen nach den Variablen x_3, x_4 und x_6 enthält, gemäß des in Anhang B angegebenen Vorgehens. Entsprechende Elemente der Hesse-Matrix, wobei x_3, x_4 und x_6 für die in (6.56), (6.57) und (6.58) angegebenen Ausdrücke als Lösung der

Stationaritätsgleichungen stehen, sind:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} &= g^2 x_3^2 + 2\,|m_e|\,\frac{x_4 x_6}{x_3} \;>\; 0\,, \\[2ex]
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\,\partial x_4} &= \left(2g_2^2 - g^2\right) x_3 x_4 - 2\,|m_e|\,x_6\,, \\[2ex]
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\,\partial x_6} &= 2g_1^2 x_3 x_6 - 2\,|m_e|\,x_4\,, \\[2ex]
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_4)^2} &= g^2 x_4^2 + 2\,|m_e|\,\frac{x_3 x_6}{x_4} \;>\; 0\,, \\[2ex]
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_4\,\partial x_6} &= 2\left(2\,|y^e|^2 - g_1^2\right) x_4 x_6 - 2\,|m_e|\,x_3\,, \\[2ex]
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_6)^2} &= 2\,|m_e|\,\frac{x_4 x_6}{x_3} + 4g_1^2 x_6^2 \;>\; 0\,.
\end{aligned}
$$

Für die Hauptunterdeterminanten ergeben sich

$$
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} = g^2 x_3^2 + 2\,|m_e|\,\frac{x_4 x_6}{x_3} \;>\; 0
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
D_{34} &:= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\,\partial x_4} \\[1ex] \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\,\partial x_4} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_4)^2} \end{vmatrix} \\[2ex]
&= 4g_1^2 g_2^2 x_3^2 x_4^2 + 2\,|m_e|^2\; y^{-1}\;\left(g_1^2\left(x_3^2 - x_4^2\right)^2 + g_2^2\left(x_3^2 + x_4^2\right)^2\right) \;>\; 0
\end{aligned}
$$

und

$$
D_{346} := \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\,\partial x_4} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\,\partial x_6} \\[1ex] \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\,\partial x_4} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_4)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_4\,\partial x_6} \\[1ex] \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\,\partial x_6} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_4\,\partial x_6} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_6)^2} \end{vmatrix}\,,
$$

$$
\begin{aligned}
D_{346} \;=\; & 16\,|m_e|^2\left(g_2^2-g_1^2\right)x_3^2x_4^2+32\,|m_e|^2\,g_1^2x_3^2x_6^2+16\,|m_e|^2\left(4g_1^2-2\,|y^e|^2\right)x_4^2x_6^2 \\
& +8\,|m_e|\left(-g^2\,|y^e|^2+3g_1^4+g_1^2g_2^2\right)x_3^3x_4x_6 \\
& +8\,|m_e|\left(|y^e|^2\left(g_2^2-g_1^2\right)+3g_1^4-g_1^2g_2^2\right)x_3x_4^3x_6 \\
& +16\,|m_e|\,g_1^2\left(|y^e|^2-3g_1^2+g_2^2\right)x_3x_4x_6^3-32\,|m_e|^3\,x_3x_4x_6 \\
& +8\,|m_e|\,g_1^2g_2^2x_3^3x_4^{-1}x_6^3+\left(-16\,|y^e|^4\,g^2+32\,|y^e|^2\,g_1^2g_2^2+8g_1^4g^2\right)x_3^2x_4^2x_6^2 \\
& +8\,|m_e|\left(-|y^e|^4+g_1^2\left(4\,|y^e|^2-3g_1^2+g_2^2\right)\right)x_3^{-1}x_4^3x_6^3-2\,|m_e|\left(g_1^2-g_2^2\right)^2x_3^3x_4^3x_6^{-1}\,.
\end{aligned}
$$

Ist diese letzte angegebene Hauptunterdeterminante positiv, so liefert der stationäre Punkt nach dem verwendeten hinreichenden Kriterium aus Anhang B zumindest ein lokales Minimum auf dem Randbereich $\partial\mathcal{F}_{125}$.

Damit der stationäre Punkt ein lokales Minimum im gesamten Feldraum darstellt, müssen wir auch noch die anderen Elemente der Hesse-Matrix betrachten:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} &= 2m_1^2-2m_L^2+2\,|m_e|\,\frac{x_3x_6}{x_4}\,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\,\partial x_2} &= 2\left|m_B^2\right|\cos\theta_1\,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\,\partial x_5} &= -2\,|M_e|\,x_6\cos\theta_2\,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_2)^2} &= 2\,|m_e|\,\frac{x_4x_6}{x_3}+g_2^2x_4^2 \;>\; 0\,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2\,\partial x_5} &= -2\,|m_e|\,x_6\cos\left(\theta_2-\theta_1-\theta_e\right)\,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_5)^2} &= 2\,|m_e|\,\frac{x_3x_6}{x_4}-g_2^2x_3^2\,.
\end{aligned}
$$

Notwendig ist, daß die Hauptunterdeterminanten dieser Untermatrix nicht negativ sind. Sind sie alle positiv, so liefert der stationäre Punkt eine Stelle eines lokalen Minimums im gesamten Feldraum, falls er eine solche Stelle auf dem Randbereich selbst darstellt. Aus der ersten Unterdeterminante ergibt sich die notwendige Bedingung

$$
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} \;\geq\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |m_e|\,\frac{x_3x_6}{x_4} \;\geq\; m_L^2-m_1^2\,.
$$

Die weiteren Hauptunterdeterminanten sind durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

$$
\begin{aligned}
D_{12} \quad &:= \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\, \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\, \partial x_2} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_2)^2} \end{vmatrix} \\
&= \quad 2\left(m_1^2 - m_L^2\right) g_2^2 x_4^2 + 4\,|m_e|^2\, x_6^2 + g_2^2\,|m_e|\, x_3 x_4 x_6 \\
&\qquad + 4\,|m_e|\left(m_1^2 - m_L^2\right) \frac{x_4 x_6}{x_3} - 4\left|m_B^2\right|^2 \cos^2\theta_1
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
D_{123} \quad &:= \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\, \partial x_2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\, \partial x_5} \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\, \partial x_2} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_2)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2\, \partial x_5} \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\, \partial x_5} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2\, \partial x_5} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_5)^2} \end{vmatrix} \\
&= \quad -2\left(m_1^2 - m_L^2\right) g_2^4 x_3^2 x_4^2 - 4\,|M_e|^2\, g_2^2 x_4^2 x_6^2 \cos^2\theta_2 \\
&\qquad - 2\,|m_e|\, g_2^4 x_3^3 x_4 x_6 + 4\left|m_B^2\right|^2 g_2^2 x_3^2 \cos^2\theta_1 \\
&\qquad + 8\left(m_1^2 - m_L^2\right) |m_e|^2\; x_6^2\, \sin^2\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right) \\
&\qquad + 8\,|m_e|^3\, x_3 x_4^{-1}\, x_6\, \sin^2\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right) \\
&\qquad - 8\,|m_e|\left|m_B^2\right|^2 x_3 x_4^{-1} x_6 \cos^2\theta_1 - 8\,|M_e|^2\,|m_e|\, x_3^{-1} x_4 x_6^3 \cos^2\theta_2 \\
&\qquad + 16\,|M_e|\,|m_e|\left|m_B^2\right| \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right)\ .
\end{aligned}
$$

Hieraus erhält man die entsprechenden hinreichenden oder notwendigen Bedingungen für die Parameter des Potentials.
Das Potential besitzt am gefundenen stationären Punkt den Wert

$$
V_0\,(\,\text{Fall } 5)\,) \;=\; |m_e|\, y\, x_6^2 - |y^e|^2\; x_4^2 x_6^2 - \frac{1}{8}\, g_1^2\left(-x_3^2 + x_4^2 - 2x_6^2\right)^2 - \frac{1}{8}\, g_2^2\left(x_3^2 + x_4^2\right)^2\ .
$$

Hierin stehen x_3, x_4, x_6 für die Werte der Lösung der Stationaritätsbedingungen aus den Gleichungen (6.56) bis (6.58) und y ist das Verhältnis aus (6.54), dessen Wert durch die Konsistenzbedingung festgelegt ist.

In keiner der oben angegeben Formeln und Ungleichungen war es möglich, die Lösung der Stationaritätsgleichungen einzusetzen, ohne daß die Ausdrücke unüberschaubare Länge angenommen hätten. Falls man aber doch die Werte von x_3, x_4 und x_6 am stationären Punkt einsetzt, so werden wie schon im Fall der oben angegebenen Hauptunterdeterminanten die Ausdrücke so kompliziert, daß mit analytischen Mitteln nur mit sehr großem Aufwand Bedingungen an die Parameter des Potentials abgeleitet werden können. Wie in Fall 4) zuvor ist die Komplexität der Ausdrücke in (6.56), (6.57) und (6.58) die Ursache für praktisch nicht verwertbare Bedingungen an die Parameter des Modells. Dieser Fall wird genauso wie der Fall 4) zwar mit in die abschließende Diskussion mit aufgenommen, allerdings sind alle Aussagen unter dem Vorbehalt der Situation auf diesen beiden Randuntermengen $\partial\mathcal{F}_{34}$ und $\partial\mathcal{F}_{125}$ zu sehen.

6.4.8 Fall 6) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{1246}$

Die Gleichungen für stationäre Punkte für die nichtverschwindenden Variablen x_3 und x_5 lauten

$$\begin{aligned} 2m_2^2 x_3 - \frac{1}{2} g^2 \left(-x_3^2 + x_5^2\right) x_3 &= 0\,, \\ 2m_L^2 x_5 + \frac{1}{2} g^2 \left(-x_3^2 + x_5^2\right) x_5 &= 0\,, \end{aligned}$$

und aus ihnen folgt sofort

$$m_2^2 + m_L^2 = 0$$

im Widerspruch zu der bnu-Bedingung (6.13). Somit kann auf dieser Randuntermenge kein stationärer Punkt existieren, und wir brauchen diesen Randbereich nicht weiter zu betrachten.

6.4.9 Fall 7) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{1236}$

Wir erhalten nur eine Stationaritätsgleichung

$$2m_L^2 + \frac{1}{2} g^2 \left(x_4^2 + x_5^2\right) = 0$$

mit der Lösung

$$x_4^2 + x_5^2 = -4g^{-2} m_L^2\,,$$

falls $m_L^2 < 0$, die folgenden Wert des Potentials an diesen Punkten liefert:

$$V_0\,(\text{Fall 7)}) = -2g^{-2} m_L^4 = V_0\,(\text{Fall 2)})\,.$$

Auch die notwendige Negativität von m_L^2 ist beiden Fällen gemeinsam.

Aus der Gestalt der relevanten Untermatrix der Hesse-Matrix ergeben sich keine Bedingungen, die den stationären Punkt zu einem lokalen Minimum auf diesem Randbereich machen, denn es ist:

$$\frac{\partial^2 V_0}{\left(\partial x_4\right)^2} = \frac{\partial^2 V_0}{\left(\partial x_5\right)^2} > 0$$

und

$$D_{45} \;:=\; \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_4)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_4\, \partial x_5} \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_4\, \partial x_5} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_5)^2} \end{vmatrix} \;=\; 0\,.$$

Die notwendigen Bedingungen dafür, daß dieser stationäre Punkt ein lokales Minimum des Potentials im gesamten Feldraum liefert, ergeben sich aus der verbleibenden Untermatrix der Hesse-Matrix, die die partiellen Ableitungen nach den Randvariablen enthält:

$$2m_1^2 - 2m_L^2 + \left(2\,|y^e|^2 - g_2^2\right) x_5^2 \;\;\geq\;\; 0\,,$$

$$\begin{aligned} & 4\left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right) - 4\left|m_B^2\right|^2 \cos^2\theta_1 \\ & +2\left\{g_2^2\left(m_1^2 - m_L^2\right) + \left(2\,|y^e|^2 - g_2^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right)\right\} x_5^2 + g_2^2\left(2\,|y^e|^2 - g_2^2\right) x_5^4 \;\;\geq\;\; 0\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 8\left(m_2^2 + m_L^2\right)\left\{\left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right) - \left|m_B^2\right|^2 \cos^2\theta_1\right\} \\ & + \left(g_2^4\left(1 - \cos^2\theta_3\right) x_4^2 x_5^2 - 8g^{-2} g_2^2 m_L^2\left(m_2^2 + m_L^2\right)\right)\left(2m_1^2 - 2m_L^2 + \left(2\,|y^e|^2 - g_2^2\right) x_5^2\right) \;\;\geq\;\; 0 \end{aligned}$$

und

$$D_{1236} \;:=\; \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\, \partial x_2} & 0 & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\, \partial x_6} \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\, \partial x_2} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_2)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2\, \partial x_3} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2\, \partial x_6} \\ 0 & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2\, \partial x_3} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\, \partial x_6} \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\, \partial x_6} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2\, \partial x_6} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\, \partial x_6} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_6)^2} \end{vmatrix} \;\geq\; 0$$

Auch hier gilt, daß die Ersetzung der $\geq$ durch $>$ aus den notwendigen hinreichende Bedingungen für ein lokales Minimum an diesem stationären Punkt im gesamten Feldraum werden läßt (vorausgesetzt, daß es sich um ein lokales Minimum auf dem Randbereich handelt).

6.4.10 Fall 8) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{12456}$

Wir erhalten als Lösung der Stationaritätsbedingungen für $m_2^2 \,<\, 0$

$$x_3^2 \;=\; -4g^{-2} m_2^2\,.$$

Die Werte der Phasenvariablen, speziell von θ_1, werden durch die Stationaritätsbedingungen nicht bestimmt und sind beliebig. Im Fall dieser stationären Punkte argumentieren wir genau wie bei der Untersuchung des Potentials im Higgs-Sektor des MSSM und dem entsprechenden stationären Punkt (Fall 2) im vorigen Kapitel). Dazu betrachten wir die folgende Untermatrix der Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_2} & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} &= 2m_1^2 + 2m_2^2 + g_2^2 x_3^2 \,, \\ \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_2} &= 2\left|m_B^2\right| \cos\theta_1 \end{aligned}$$

und negativer Unterdeterminante. Die Positivität des Elementes in der linken oberen Ecke der Matrix folgt aus den bnu-Bedingungen (6.12) und (6.14). Die Untermatrix besitzt also eine negativen und einen positiven Eigenwert und dazugehörige Eigenvektoren. Weil die stationären Punkte $\vec{x}_s$ auf dieser Randmenge keine θ_1-Abhängigkeit besitzen, wählen wir θ_1 so, daß $\cos\theta_1 < 0$ wird. Dann liegt der Eigenvektor zum negativen Eigenwert der Untermatrix im Feldraum. Nach den Überlegungen über Randminima aus Anhang B haben wir damit eine Richtung gefunden, entlang der das Potential kleinere Werte annimmt als an den stationären Punkten. Deshalb liefern die stationären Punkte auf diesem Randbereich nicht das globale Minimum des Potentials, und wir brauchen sie nicht weiter zu berücksichtigen.

6.4.11 Fall 9) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{12356}$

Unter der Bedingung

$$m_L^2 < 0$$

finden wir als Lösung der Stationaritätsgleichung

$$x_4^2 = -4g^{-2}m_L^2 \,.$$

Es gilt

$$\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_4)^2} = g^2 x_4^2 > 0 \,.$$

Da die Werte der Phasenvariablen an diesem stationären Punkt beliebig (weil durch die Stationaritätsgleichungen nicht vorgeschrieben) sind, erhalten wir verschwindende Unterdeterminanten im Phasen-Sektor der Hesse-Matrix. Dennoch gilt, daß in jeder Umgebung der gefundenen stationären Punkte (mit beliebigen Werten für θ_1, θ_2 und θ_3), die ganz innerhalb der Randuntermenge $\partial\mathcal{F}_{12356}$ liegt, die stationären Punkte diejenigen Punkte mit den kleinsten Potentialwerten darstellen. Deshalb können wir bei diesen stationären Punkten von lokalen Minimalstellen auf $\partial\mathcal{F}_{12356}$ sprechen.

Um zu prüfen, ob diese stationären Punkte lokale Minima in ganz $\mathcal{F}$ liefern können, betrachten wir erst die ersten partiellen Ableitungen nach den Randvariablen (alle außer x_4). An den stationären Punkten ausgewertet sind sie alle Null. Deshalb wenden wir uns der entsprechenden Untermatrix der Hesse-Matrix zu. Nichtverschwindende Elemente dieser Untermatrix sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} &= 2m_1^2 - 2m_L^2\,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\,\partial x_2} &= 2\left|m_B^2\right|\cos\theta_1\,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_2)^2} &= 2m_2^2 + 2m_L^2 \;>\; 0\,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} &= 2m_2^2 + 2m_L^2 + g_2^2 x_4^2 \;>\; 0\,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\,\partial x_6} &= -2\left|m_e\right| x_4 \cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e\right)\,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_6)^2} &= 2m_E^2 - 4\left(2\left|y^e\right|^2 - g_1^2\right) g^{-2} m_L^2\,.
\end{aligned}$$

Sind alle Hauptunterdeterminanten der Hesse-Matrix, ausgewertet an einem der stationären Punkte, positiv, so liefert dieser Punkt ein lokales Minimum im Feldraum. Aufgrund der Struktur der Hesse-Matrix ergeben sich folgende notwendige Bedingungen:

$$\begin{aligned}
m_1^2 - m_L^2 &\geq 0\,, \\
\left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right) - \left|m_B^2\right|^2 \cos^2\theta_1 &\geq 0\,, \\
\left(m_2^2 + m_L^2\right) g^4 m_E^2 + 4\left(2\left|y^e\right|^2 - g_1^2\right) g_2^2 m_L^4 & \\
-2m_L^2 g^2\left(g_2^2 m_E^2 + \left(2\left|y^e\right|^2 - g_1^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right) - 2\left|m_e\right|^2 \cos^2\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e\right)\right) &\geq 0\,.
\end{aligned}$$

Ersetzt man hier alle $\geq$ durch $>$, so erhält man hinreichende Bedingungen dafür, daß der jeweilige stationäre Punkt auf dieser Randmenge ein lokales Minimum des Potentials im ganzen Feldraum liefert.

6.4.12 Fall 10) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{12346}$

Nur für $m_L^2 < 0$ ergibt sich mit

$$x_5^2 = -4g^{-2}m_L^2$$

eine Lösung der Stationaritätsgleichung. Genau wie im vorherigen Fall sind die Werte von θ_1, θ_2 und θ_3 beliebig, so daß wir unendlich viele stationäre Punkte auf dieser Randmenge gefunden haben. Es gilt

$$\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_5)^2} \;=\; g^2 x_5^2 \;>\; 0\,,$$

und analog zu der obigen Argumentation im Fall 9) dürfen wir folgern, daß die stationären Punkte lokale Minima des Potentials auf der Randmenge $\partial\mathcal{F}_{12346}$ darstellen, die alle den gleichen Wert des Potentials liefern, nämlich den gleichen wie in den Fällen 7) und 9).
Genau wie im Fall 9) ist zu testen, ob und unter welchen Bedingungen dieser stationäre Punkt ein lokales Minimum im gesamten Feldraum liefern kann. Die ersten partiellen Ableitungen nach den Randvariablen verschwinden alle an den stationären Punkten, so daß wir die Untermatrix der Hesse-Matrix an den stationären Punkten betrachten müssen, die alle zweiten Ableitungen nach den Randvariablen enthält. Die nichtverschwindenden Elemente dieser Matrix sind die folgenden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} &= 2m_1^2 - 2\left(4\,|y^e|^2 + g^2 - 2g_2^2\right) g^{-2} m_L^2\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\,\partial x_2} &= 2\left|m_B^2\right| \cos\theta_1\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\,\partial x_6} &= -2\,|M_e|\, x_5 \cos\theta_2\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_2)^2} &= 2m_2^2 + 2m_L^2 + g_2^2 x_5^2 \;>\; 0\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2\,\partial x_6} &= -2\,|m_e|\, x_5 \cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right)\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} &= 2m_2^2 + 2m_L^2 \;>\; 0\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_6)^2} &= 2m_E^2 + \left(2\,|y^e|^2 - g_1^2\right) x_5^2\,.
\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich folgende notwendige Bedingungen, um lokale Minima an diesen stationären Punkten zu garantieren:

$$\left(4\,|y^e|^2 + g_1^2 - g_2^2\right)\left(\left(g_2^2 - g_1^2\right) m_L^4 - g^2\, m_2^2\, m_L^2\right) + g^4 \left(m_1^2\left(m_2^2 + m_L^2\right) - \left|m_B^2\right|^2 \cos^2\theta_1\right) \;\geq\; 0$$

und

$$D_{126} \;:=\; \begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\,\partial x_6}\\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\,\partial x_2} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_2)^2} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2\,\partial x_6}\\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\,\partial x_6} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2\,\partial x_6} & \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_6)^2}
\end{vmatrix} \;\geq\; 0\,.$$

Wie schon in den vorangegangen Fällen gilt auch hier, daß durch eine Ersetzung der $\geq$ durch $>$ aus den notwendigen Bedingungen hinreichende werden.

6.4.13 Fall 11) V_0 auf $\partial\mathcal{F}_{12345}$

Die Lösung der Stationaritätsbedingung für $m_E^2 < 0$ lautet für beliebige Werte von θ:

$$x_6^2 \;=\; -g_1^{-2} m_E^2 \,.$$

Wegen

$$\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_6)^2} \;=\; -6 m_E^2 \;>\; 0$$

ist der stationäre Punkt ein lokale Minimalstelle auf dem betrachteten Randbereich.
Erneut haben wir zu untersuchen, ob es sich bei diesem stationären Punkt nicht auch um die Stelle eines lokalen Minimums im gesamten Feldraum handeln kann. Die ersten partiellen Ableitungen des Potentials nach den Randvariablen liefern bei Auswertung am stationären Punkt alle Null, so daß wir erneut die Untermatrix der Hesse-Matrix berücksichtigen müssen. Deren Elemente am stationären Punkt sind durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_1)^2} &= 2m_1^2 + \left(2\,|y^e|^2 - g_1^2\right) x_6^2 \,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\,\partial x_2} &= 2\,\left|m_B^2\right| \cos\theta_1 \,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1\,\partial x_5} &= -2\,|M_e|\, x_6 \cos\theta_2 \,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_2)^2} &= 2m_2^2 - m_E^2 \,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2\,\partial x_5} &= -2\,|m_e|\, x_6 \cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right) \,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} &= 2m_2^2 - m_E^2 \,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\,\partial x_4} &= 2\,|m_e|\, x_6 \cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e\right) \,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_4)^2} &= 2m_L^2 + \left(2\,|y^e|^2 - g_1^2\right) x_6^2 \,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_5)^2} &= 2m_L^2 + \left(2\,|y^e|^2 - g_1^2\right) x_6^2
\end{aligned}$$

gegeben. Die notwendigen Bedingungen (die positive Definitheit der Hesse-Matrix in diesem stationären Punkt) lauten mit

$$a\,(m) \;:=\; g_1^2\, m - \left(2\,|y^e|^2 - g_1^2\right) m_E^2$$

wie folgt:

$$\begin{aligned}
a\left(m_1^2\right) &\geq 0\,,\\
\left(2m_2^2 - m_E^2\right)\, a\left(m_1^2\right) + 4\left|m_B^2\right|^2\, g_1^2\, \cos^2\theta_1 &\geq 0\,,\\
2m_2^2 - m_E^2 &\geq 0\,,\\
\left(2m_2^2 - m_E^2\right)\, a\left(m_L^2\right) + 4\,|m_e|^2\, g_1^2\, \cos^2\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e\right) &\geq 0\,,\\
-16 g_1^2\, \left|m_B^2\right|\, |M_e|\, |m_e|\, m_E^2\, \cos\theta_1\, \cos\theta_2\, \cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right) &\\
-4\, a\left(m_1^2\right)\, |m_e|^2\, m_E^2 \cos^2\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right) - 4 g_1^2 \left(2m_2^2 - m_E^2\right) |M_e|^2\, m_E^2\, \cos^2\theta_2 &\\
+ \left(2m_2^2 - m_E^2\right)\, a\left(m_1^2\right)\, a\left(m_L^2\right) - 4\, a\left(m_L^2\right)\, g_1^2\, \left|m_B^2\right|^2 \cos^2\theta_1 &\geq 0\,.
\end{aligned}$$

Das Potential besitzt am stationären Punkt den Wert

$$V_0\,(\,\text{Fall } 11)\,) \;=\; -\frac{1}{2}\, g_1^{-2} m_E^4\,.$$

6.4.14 Fall 12) V_0 auf $\overset{o}{\mathcal{F}}$

Hier bilden alle ersten partiellen Ableitungen das System der Stationaritätsgleichungen:

$$\begin{aligned}
&2m_1^2 x_1 + 2\left|m_B^2\right| x_2 \cos\theta_1 + 2\,|y^e|^2 \left(x_5^2 + x_6^2\right) x_1 - 2\,|M_e|\, x_5 x_6 \cos\theta_2\\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\, g^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2\right) - g_1^2 x_6^2 + g_2^2 \left(x_3^2 - x_5^2\right)\right) x_1 \;=\; 0\,,\\
&2m_2^2 x_2 + 2\left|m_B^2\right| x_1 \cos\theta_1 - 2\,|m_e|\, x_5 x_6 \cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right) + g_2^2 x_3 x_4 x_5 \cos\theta_3\\
&\quad - \left(\frac{1}{2}\, g^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2\right) - g_1^2 x_6^2 - g_2^2 x_5^2\right) x_2 \;=\; 0\,,\\
&2m_2^2 x_3 - 2\,|m_e|\, x_4 x_6 \cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e\right) + g_2^2 x_2 x_4 x_5 \cos\theta_3\\
&\quad - \left(\frac{1}{2}\, g^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2\right) - g_1^2 x_6^2 - g_2^2 \left(x_1^2 + x_4^2\right)\right) x_3 \;=\; 0\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2m_L^2 x_4 + 2\left|y^e\right|^2 x_4 x_6^2 - 2\left|m_e\right| x_3 x_6 \cos\left(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e\right) + g_2^2 x_2 x_3 x_5 \cos\theta_3 & \\
+ \left(\frac{1}{2}\, g^2\left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2\right) - g_1^2 x_6^2 + g_2^2 x_3^2\right) x_4 &= 0\,, \\
2m_L^2 x_5 + 2\left|y^e\right|^2\left(x_1^2 + x_6^2\right) x_5 - 2\left|M_e\right| x_1 x_6 \cos\theta_2 - 2\left|m_e\right| x_2 x_6 \cos\left(\theta_2-\theta_1-\theta_e\right) & \\
+ \left(\frac{1}{2}\, g^2\left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2\right) - g_1^2 x_6^2 + g_2^2\left(-x_1^2 + x_2^2\right)\right) x_5 + g_2^2 x_2 x_3 x_4 \cos\theta_3 &= 0\,, \\
2m_E^2 x_6 + 2\left|y^e\right|^2\left(x_1^2 + x_4^2 + x_5^2\right) x_6 - 2\left|M_e\right| x_1 x_5 \cos\theta_2 - 2\left|m_e\right| x_3 x_4 \cos\left(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e\right) & \\
- 2\left|m_e\right| x_2 x_5 \cos\left(\theta_2-\theta_1-\theta_e\right) - g_1^2\left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 2x_6^2\right) x_6 &= 0\,, \\
-2\left|m_B^2\right| x_1 x_2 \sin\theta_1 - 2\left|m_e\right| x_3 x_4 x_6 \sin\left(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e\right) & \\
- 2\left|m_e\right| x_2 x_5 x_6 \sin\left(\theta_2-\theta_1-\theta_e\right) &= 0\,, \\
2\left|M_e\right| x_1 x_5 x_6 \sin\theta_2 - 2\left|m_e\right| x_3 x_4 x_6 \sin\left(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e\right) & \\
+ 2\left|m_e\right| x_2 x_5 x_6 \sin\left(\theta_2-\theta_1-\theta_e\right) &= 0\,, \\
-g_2^2 x_2 x_5 \sin\theta_3 - 2\left|m_e\right| x_6 \sin\left(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e\right) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen erlauben keine einfache Lösung. Wir nehmen an, daß dieser Fall andere als rein analytischen Methoden erfordert, falls überhaupt die Lösung dieses höchst nicht-trivialen und nichtlinearen Gleichungssystem gelingt.

Wir können durch eine rein analytische Untersuchung des Innern des Feldraumes keine Aussagen über stationäre Punkte oder lokale Minima machen. Einzig ist zu sagen, daß aus phänomenologischer Sicht ein lokales Minimum im Innern des Feldraumes unerwünscht ist, denn an diesem Minimum besäßen das geladene Higgs- und Sleptonfeld jeweils nichtverschwindende VEWe, die zur spontanen Brechung der Ladungsinvarianz führten. Dies könnte sich durch entsprechende Bedingungen an die Parameter vermeiden lassen.

6.5 Vergleich der Potentialwerte an den verschiedenen stationären Punkten

Wir haben stationäre Punkte des Potentials auf verschiedenen Untermengen des Feldraumes bestimmt. Nun steht der Vergleich der zugehörigen Werte des Potentials an, um das globale Minimum von V_0 auf dem Feldraum zu erhalten. Von den insgesamt elf Fällen von Randbereichen und zusätzlich dem Innern des Feldraumes existiert in den Fällen 1) und 6) keine Lösung des Systems der Stationaritätsgleichungen. Der Fall 8) konnte ausgeschlossen werden, weil der stationäre Punkt kein lokales Minimum im Feldraum liefert. Die Situation im Innern des Feldraumes ist noch unbekannt. Von den restlichen acht verschiedenen Fällen sind mit Ausnahme der Fälle 4) und 5) sowohl notwendige Bedingungen für die Existenz eines stationären Punktes als auch der Wert des Potentials am stationären Punkt bekannt. Diese geben wir hier nochmals in kompakter Form an.

Der stationäre Punkt im Fall 2) existiert, falls zusätzlich zu den bnu-Bedingungen (6.15) die folgenden Relationen erfüllt sind:

$$m_L^2 \; < \; 0$$

und

$$\left|m_B^2\right|^2 \; = \; \left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right) \qquad \text{und} \qquad m_2^2 \; > \; m_1^2 \,. \tag{6.58}$$

Das Potential an diesem stationären Punkt ist

$$V_0\,(\,\text{Fall 3})\,) \; = \; -2g^{-2}m_L^4 \,.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung (6.37) für die Existenz des stationären Punktes im Fall 3) lautet:

$$m_1^2\, m_2^2 - \left|m_B^2\right|^2 \; < \; 0\,.$$

In Abhängigkeit des Größenverhältnisses der Parameter m_1^2 und m_2^2 ist das Potential wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} m_1^2 > m_2^2 \; : \quad V_0\,(\,\text{Fall 3})\,) \; &= \; -\left(2g^2\right)^{-1}\left(m_1^2 - m_2^2 - \sqrt{\left(m_1^2+m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\,\right)^2 , \\ m_2^2 > m_1^2 \; : \quad V_0\,(\,\text{Fall 3})\,) \; &= \; -\left(2g^2\right)^{-1}\left(m_2^2 - m_1^2 - \sqrt{\left(m_1^2+m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\,\right)^2 , \end{aligned} \tag{6.59}$$

wobei jeweils die Ausdrücke in den großen Klammern positiv sind als Folge von (6.37). Weiterhin hatten wir schon gesehen, daß auch

$$V_0\,(\,\text{Fall 2})\,) \; = \; V_0\,(\,\text{Fall 3})\,)$$

gilt, falls die stationären Punkte in beiden Fällen existieren.
In den Fällen 7), 9) und 10) ist stets

$$m_L^2 \; < \; 0$$

notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des stationären Punktes. In allen drei Fällen hat das Potential ferner am jeweiligen stationären Punkt den Wert

$$V_0\,(\,\text{Fall 7})\,) \; = \; V_0\,(\,\text{Fall 9})\,) \; = \; V_0\,(\,\text{Fall 10})\,) \; = \; -2g^{-2}\,m_L^4 \,. \tag{6.60}$$

Der stationäre Punkt des Falles 11) schließlich existiert genau dann, wenn

$$m_E^2 \; < \; 0$$

und liefert

$$V_0\,(\,\text{Fall } 11)\,) \;=\; -\frac{1}{2}\,g_1^{-2}\,m_E^4\,. \tag{6.61}$$

6.6 Klassifikation einzelner Parameterbereiche des Parameterraumes des MSSM

Wir fassen die Situation in den verschiedenen Bereichen des Parameterraumes zusammen:

- Der Parameterbereich mit $m_2^2 < 0$, $m_L^2 < 0$ ist wegen der bnu-Bedingung (6.13) nicht sinnvoll.
- In den Parameterbereichen $m_2^2 < 0$, $m_L^2 > 0$, $m_E^2 < 0$ und $m_2^2 > 0$, $m_L^2 > 0$, $m_E^2 < 0$ müssen wir nur die Fälle 3) und 11) betrachten.
- In den Parameterbereichen $m_2^2 < 0$, $m_L^2 > 0$, $m_E^2 > 0$ und $m_2^2 > 0$, $m_L^2 > 0$, $m_E^2 > 0$ brauchen wir nur den Fall 3) zu berücksichtigen.
- Im Parameterbereich mit $m_2^2 > 0$, $m_L^2 < 0$, $m_E^2 > 0$ kommen nur die stationären Punkte der Fälle 2), 3), 7), 9) und 10) in Frage.
- Im Parameterbereich mit $m_2^2 > 0$, $m_L^2 < 0$, $m_E^2 < 0$ müssen wir die Fälle 2), 3), 7), 9), 10) und 11) miteinander vergleichen.

Bei dieser Aufzählung sind bewußt die Fälle 4), 5) und 12) weggelassen worden, weil keinerlei Aussagen über die möglicherweise in diesen Bereichen des Feldraumes existierenden stationären Punkten gemacht werden konnten.

6.6.1 Der Parameterbereich $m_2^2 < 0$, $m_L^2 > 0$, $m_E^2 < 0$

In diesem Parameterbereich sind die stationären Punkte der Fälle 3) und 11) möglich. Der stationäre Punkt im Fall 3), der im reinen Higgs-Fall das Standard-Vakuum liefert, existiert wegen $m_2^2 < 0$ (und daraus folgend $m_1^2 > 0$) aufgrund der bnu-Bedingung (6.15). Beim stationären Punkt des Falles 11) nimmt einzig das Slepton-Singlett-Feld einen nichtverschwindenden VEW an.
Die Potentialwerte an den stationären Punkten sind in (6.59) und (6.61) gegeben. Weiterführende notwendige bzw. hinreichende Bedingungen dafür, daß die jeweiligen stationären Punkte auch lokale Minima im gesamten Feldraum darstellen, finden sich bei der Untersuchung der entsprechenden Randbereiche oben. Sie sollen hier nicht mehr angegeben werden.
Der Vergleich der Potentialwerte an den stationären Punkten liefert:

$$V_0\,(\,\text{Fall } 3)\,) \;<\; V_0\,(\,\text{Fall } 11)\,) \quad \Longleftrightarrow$$

$$g^2 g_1^2\, m_E^4 + 2\sqrt{g^2 g_1^2}\, m_E^2\left(m_1^2 - m_2^2\right) \quad > \quad 4 g_1^2\left(m_1^2 m_2^2 - \left|m_B^2\right|^2\right)\,. \tag{6.62}$$

6.6.2 Der Parameterbereich $m_2^2 > 0$, $m_L^2 > 0$, $m_E^2 < 0$

Hier existiert der stationäre Punkt im Fall 11), aber der stationäre Punkt im Fall 3) nur dann, wenn (6.37) erfüllt ist. Daraus resultiert die Unterscheidung in zwei Fälle:

Fall i: Es existiert nur der stationäre Punkt des Falles 11).

> Das bedeutet, daß (6.37) nicht erfüllt ist. Dann ist aber der stationäre Punkt im Fall 11) auch der einzige stationäre Punkt im gesamten Feldraum. Liefert er ein lokales Minimum im gesamten Feldraum, so ist dies gleichzeitig das globale Minimum von V_0.

Fall ii: Es existieren beide stationären Punkte.

> Hier müssen wir erneut unterscheiden zwischen den beiden Möglichkeiten $m_1^2 > m_2^2$ und umgekehrt, weil das Potential am stationären Punkt hiervon abhängt.
> Sei $m_1^2 > m_2^2 > 0$: Dann erhalten wir erneut die Aussage (6.62).
> Im Fall $m_2^2 > m_1^2$ sind in (6.62) einfach die Parameter m_1^2 und m_2^2 miteinander zu vertauschen.

6.6.3 Der Parameterbereich $m_2^2 < 0$, $m_L^2 > 0$, $m_E^2 > 0$

In diesem Parameterbereich existiert der stationäre Punkt des Falles 3), des reinen Higgs-Falles, weil wegen $m_2^2 < 0$ und (6.15) auch (6.37) gilt. Weitere stationäre Punkte treten im Feldraum nicht auf. Hier ist anhand der Bedingungen (6.38), (6.39) und (6.40) zu prüfen, ob dieser stationäre Punkt wirklich ein lokales Minimum im gesamten Feldraum darstellt und damit das Standard-Vakuum auch hier das globale Minimum des Potentials V_0 im erweiterten Feldraum ist.

6.6.4 Der Parameterbereich $m_2^2 > 0$, $m_L^2 > 0$, $m_E^2 > 0$

In diesem Parameterbereich ist zu unterscheiden, ob (6.37) gilt oder nicht, ob also der stationäre Punkt des Falles 3) auf der Randuntermenge $\partial\mathcal{F}_{3456}$ überhaupt existiert. Existiert er nicht, so bleiben nur die Fälle 4), 5) und 12) als Bereiche des Feldraumes übrig, in denen stationäre Punkte existieren können.
Ist (6.37) erfüllt, so haben wir mit diesem stationären Punkt einen Kandidaten für ein lokales Minimum von V_0. Hierfür sind dann die Bedingungen an den stationären Punkt im Fall 3) zu prüfen. Damit ist entscheidbar, ob in diesem Parameterbereich des Parameterraumes das Standard-Vakuum das globale Minimum des Potentials darstellt.

6.6.5 Der Parameterbereich $m_2^2 > 0$, $m_L^2 < 0$, $m_E^2 > 0$

Wir haben es hier aufgrund zusätzlicher Bedingungen für die Existenz der einzelnen stationären Punkte mit verschiedenen Unterfällen in entsprechenden Unterbereichen dieses Parameterbereiches zu tun:

i) nur die stationären Punkte der Fälle 7), 9) und 10) existieren,

ii) die stationären Punkte in den Fällen 2), 7), 9) und 10) existieren,

iii) die stationären Punkte in den Fällen 3), 7), 9) und 10) existieren,

iv) die stationären Punkte in den Fällen 2), 3), 7), 9) und 10) existieren alle.

Zunächst zum Unterfall i):

> Hier gilt zusätzlich zu $m_2^2 > 0$, $m_L^2 < 0$ und $m_E^2 > 0$ die Negation von (6.37),

$$m_1^2 m_2^2 - \left|m_B^2\right|^2 \;\geq\; 0\,,$$

und die Negation von (6.58),

$$\left|m_B^2\right|^2 \;\neq\; \left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right) \qquad \text{oder} \qquad m_1^2 \;\geq\; m_2^2\,.$$

Die Potentialwerte der existierenden stationären Punkte in den Fällen 7), 9) und 10) sind alle gleich und durch (6.60) gegeben.

Unterfall ii):

In diesem Unterfall ist die Beziehung (6.37) zwischen den Parametern nicht erfüllt, aber dafür (6.58). Auch hier liefern die bestehenden stationären Punkte den gleichen Wert des Potentials V_0, nämlich

$$V_0\,(\,\text{Fall } 2)\,) \;=\; V_0\,(\,\text{Fall } 7)\,) \;=\; V_0\,(\,\text{Fall } 9)\,) \;=\; V_0\,(\,\text{Fall } 10)\,) \;=\; -2g^{-2}m_L^4\,.$$

Unterfall iii):

Hier gelten folgenden zusätzliche Relationen:

$$\left|m_B^2\right|^2 \;\neq\; \left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right) \qquad \text{oder} \qquad m_1^2 \;>\; m_2^2 \tag{6.63}$$

und stets (6.37), damit genau die stationären Punkte der Fälle 3), 7), 9) und 10) existieren. Hier ist erneut eine Fallunterscheidung erforderlich: sei zunächst (6.37) gültig und nur die erste Bedingung in (6.63) erfüllt und die zweite nicht, also

$$\left|m_B^2\right|^2 \;\neq\; \left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right) \qquad \text{und} \qquad m_1^2 \;<\; m_2^2\,.$$

Die Gleichheit von m_1^2 und m_2^2 ist durch die Existenz des stationären Punktes im Fall 3) auch sofort ausgeschlossen. Dies hatten wir schon bei der Betrachtung der entsprechenden Randmenge gesehen. Wir erhalten folgende Aussage:

$$\begin{aligned} V_0\,(\,\text{Fall } 3)\,) \;<\; V_0\,(\,\text{Fall } 7)\,) \quad &\Longleftrightarrow \quad m_2^2 - m_1^2 - \sqrt{\left(m_1^2 + m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2} \;>\; -2m_L^2 \;>\; 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad m_L^2\left(m_2^2 - m_1^2 - m_L^2\right) \;<\; \left|m_B^2\right|^2 - m_1^2 m_2^2\,. \end{aligned}$$

Wegen $m_L^2 < 0$ und $m_2^2 > m_1^2$ ist die linke Seite der Ungleichung negativ, während nach der obigen Bedingung die rechte Seite positiv ist. Folglich ist die Aussage richtig und wir erhalten, daß in diesem Parameterbereich mit $m_2^2 > m_1^2$ und (6.37)

$$V_0\,(\,\text{Fall 3})\,) \;<\; V_0\,(\,\text{Fall 7})\,) \;=\; V_0\,(\,\text{Fall 9})\,) \;=\; V_0\,(\,\text{Fall 10})\,) \tag{6.64}$$

ist. Damit liefert der stationäre Punkt des Falles 3), also derjenige, der das globale Minimum des Potentials im Higgs-Sektor des MSSM bestimmte, in diesem Bereich des Parameterraumes ein lokales Minimum, das tiefer ist als das der anderen stationären Punkte in den Fällen 7), 9) und 10).

Sei nun konträr zu (6.63)

$$\left|m_B^2\right|^2 \;=\; \left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right) \qquad \text{und} \qquad m_1^2 \;>\; m_2^2$$

und erneut (6.37) gültig. Dann folgt wegen $m_L^2 < 0$

$$m_1^2 m_2^2 - \left|m_B^2\right|^2 \;=\; m_L^2\left(m_2^2 - m_1^2 + m_L^2\right) \;>\; 0\,,$$

welches im Widerspruch zu (6.37) steht. Diese Parameterkonstellation kann überhaupt nicht eintreten.

Bleibt noch der Fall übrig, daß die Relationen

$$\left|m_B^2\right|^2 \;=\; \left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right) \qquad \text{und} \qquad m_1^2 \;<\; m_2^2$$

und (6.37) gelten. Durch Einsetzen des gegebenen Wertes von $\left|m_B^2\right|$ erhalten wir eine weitere Bedingung, nämlich

$$m_2^2 - m_1^2 + m_L^2 \;>\; 0\,.$$

In diesem Fall folgt

$$V_0\,(\,\text{Fall 3})\,) \;=\; V_0\,(\,\text{Fall 7})\,) \;=\; V_0\,(\,\text{Fall 9})\,) \;=\; V_0\,(\,\text{Fall 10})\,)\;.$$

Unterfall iv):

In diesem letzten Unterfall existieren alle stationären Punkte der Fälle 2), 3), 7), 9) und 10). Wie wir schon beim Vergleich der stationären Punkte der Fälle 2) und 3) gesehen hatten, gilt

$$V_0\,(\,\text{Fall 2})\,) \;=\; V_0\,(\,\text{Fall 3})\,) \;=\; V_0\,(\,\text{Fall 7})\,) \;=\; V_0\,(\,\text{Fall 9})\,) \;=\; V_0\,(\,\text{Fall 10})\,)$$

falls die stationären Punkte der Fälle 2) und 3) existieren. Das ist das Resultat in diesem Unterbereich des Parameterraumes.

6.6.6 Der Parameterbereich $m_2^2 > 0$, $m_L^2 < 0$, $m_E^2 < 0$

Im Unterbereich $m_1^2 > m_2^2$ dieses Bereiches des Parameterraumes vergleichen wir den Wert des Potentials an den stationären Punkte der Fälle 3), 7), 9), 10) und 11) miteinander. Wegen $m_L^2 < 0$ existieren die stationären Punkte in den Fällen 7), 9) und 10) und wegen $m_E^2 < 0$ auch derjenige im Fall 11). Es ergeben sich zwei Unterfälle:

Unterfall i: der stationäre Punkt im Fall 3) existiert nicht, das heißt (6.37) gilt nicht.

Wir finden

$$V_0\,(\,\text{Fall }7)\,)\;=\;V_0\,(\,\text{Fall }9)\,)\;=\;V_0\,(\,\text{Fall }10)\,)\;<\;V_0\,(\,\text{Fall }11)\,)\quad\Longleftrightarrow\quad m_L^2\;<\;\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g^2}{g_1^2}}\,m_E^2\,. \tag{6.65}$$

Unterfall ii: (6.37) ist erfüllt.

Dann haben wir erneut zwischen $m_1^2 > m_2^2$ und umgekehrt zu unterscheiden. Wir wählen zunächst $m_1^2 > m_2^2$. Der Vergleich der Potentialwerte an den stationären Punkten der Fälle 3) und 7) ist schon weiter oben durchgeführt worden und lieferte (6.64). Der Vergleich der Potentialwerte in den Fällen 3) und 11) findet sich in (6.62).
Gilt nun $m_2^2 > m_1^2$, so vertauscht man gerade in der angegebenen Aussage (6.62) diese beiden Parameter miteinander. Davon unberührt bleiben (6.64) und (6.65).

6.7 Zusammenfassung der Untersuchung des Potentials im Higgs-Slepton-Sektor des MSSM

Wir haben in diesem Kapitel das Potential V_0 im MSSM mit Higgs- und Slepton-Feldern betrachtet und dessen allgemeine Form angegeben. Speziell für den Fall einer Leptonengeneration haben wir die Minimumstruktur von V_0 untersucht.

Die Ergebnisse sind in der obigen Klassifikation der verschiedenen Parameterbereiche enthalten. Es ist zu beachten, daß diese Klassifikation nur modulo der nicht betrachteten Fälle 4), 5) und 12) vollständig ist. Damit sind die dort gemachten Aussagen zu relativieren, weil wir in diesen drei Fällen durch unsere analytischen Untersuchungen keine Informationen über eventuelle stationäre Punkte oder lokale Minima erhalten haben.

Auf jeden Fall gibt es einen prinzipiellen Unterschied zu der Situation des Potentials im Higgs-Sektor des MSSM. Dort konnten nur der Ursprung oder der stationäre Punkt mit $H_1^0 H_2^0 \neq 0$ lokale Minima sein und damit das globale Minimum von V_0 liefern. Genauer gesagt: sobald der nichttriviale stationäre Punkt existiert, liefert er auch das globale Minimum des Potentials.

Hier gibt es viele Parameterbereiche, in denen der stationäre Punkt des Higgs-Falles (der stationäre Punkt in Fall 3)) nicht existiert, weil die entscheidende Bedingung (6.37) nicht erfüllt ist. Es ist allerdings in keiner Weise auszuschließen, daß dort nicht andere stationäre Punkte existieren, welche das globale Minimum (oder auch nur lokale Minima) des Potentials liefern. Diese anderen VEW-Konstellationen bedeuten in jedem Fall weitere spontane Symmetriebrechungen zusätzlich zur Brechung der elektroschwachen Eichsymmetrie, was aus phänomenologischen Gründen nicht erwünscht ist.

Genauso ist es möglich, daß der stationäre Punkt des reinen Higgs-Falles zwar existiert (und möglicherweise auch ein lokales Minimum von V_0 liefert), daß aber das globale Minimum durch einen anderen stationären Punkt gegeben ist. Auch in diesem Fall folgen aufgrund der VEW-Konstellation am globalen Minimum des Potentials weitere spontane Symmetriebrechungen.

Schließlich könnte es sein, daß verschiedene stationäre Punkte, die alle lokale Minima von V_0 sind, den gleichen Potentialwert liefern. Die globale Minimalstelle des Potentials ist dann nicht eindeutig. Unter diesen Punkten kann sich auch der stationäre Punkt des Higgs-Falles befinden. In dieser Situation ist es nicht eindeutig, welcher dieser Punkte das Minimum des Potentials und damit den Vakuumzustand des MSSM liefert. Hier muß ein anderer Mechanismus greifen, der aus den verschieden möglichen Vakua das wirkliche Vakuum bestimmt.

Nicht ausgeschlossen ist zum Schluß die phänomenologisch attraktivste Situation, in der stationäre Punkt des Higgs-Falles das globale Minimum des Potentials V_0 auch im Higgs-Slepton-Sektor des MSSM mit einer Leptonengeneration bildet, also eine VEW-Konstellation vorliegt, bei der nur die ungeladenen Higgs-Felder VEWe ungleich Null annehmen während alle anderen Felder einschließlich der Sleptonen keinen VEW besitzen. Dies kann allerdings nur unter weiteren Auflagen an die Parameter geschehen. Die zusätzlichen Bedingungen sind in den Gleichungen (6.38), (6.39) und (6.40) formuliert. Die letzte dieser Ungleichungen stellt eine Einschränkung an den Wertebereich des Parameters A^e aus den sanften Brechungstermen in der Lagrange-Dichte dar. Auch hierbei ist zu bedenken, daß die Fälle 4), 5) und 12) noch nicht behandelt sind, so daß durchaus weitere Bedingungen hinzukommen könnten, um diese gewünschte Situation eintreten zu lassen.

Kapitel 7

Untersuchung des Potentials für Higgs-, Slepton- und Squark-Felder

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Potential im MSSM mit Beiträgen der Higgs-, Slepton und Squark-Felder. Wir werden die Beiträge des Potentials für den allgemeinen Fall angeben und danach Vereinfachungen vornehmen. Ebenso untersuchen wir die Einschränkungen an die Parameter, die sich aus der Forderung der Beschränktheit des Potentials nach unten ergeben. Zum Schluß finden wir zusätzliche Bedingungen dafür, daß das Standard-Vakuum im Higgs-Sektor des MSSM im gesamten Feldraum ein lokales Minimum liefern kann.

7.1 Das Potential für Higgs-, Slepton- und Squark-Felder

Das Superpotential bildet die Grundlage für das Potential im MSSM, welches nur skalare Komponenten der auftretenden Superfelder enthält. Wenn wir alle chiralen Superfelder des MSSM in Betracht ziehen, erhalten wir für das Superpotential W des MSSM unter der Annahme der Erhaltung der R-Parität folgende Form:

$$\begin{aligned} W &= \mu\, \mathbf{H}_1^T\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_2 + \sum_{i,j=1}^{3} y^e_{ij}\,\mathbf{L}_i^T\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_1\mathbf{E}_j \\ &\quad + \sum_{i,j,A=1}^{3}\left(y^d_{ij}\,\mathbf{Q}^T_{iA}\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_1\mathbf{D}^A_j + y^u_{ij}\,\mathbf{Q}^T_{iA}\,(i\tau_2)\,\mathbf{H}_2\mathbf{U}^A_j\right)\ . \end{aligned} \tag{7.1}$$

Die Indizes i, j sind Generationenindizes und laufen von 1 bis 3, der Index A ist ein $SU(3)$-Index, der auch drei verschiedene Werte annehmen kann (hier ebenfalls mit 1 bis 3 bezeichnet). Die Higgs Superfelder $\mathbf{H}_1$ und $\mathbf{H}_2$ sind $SU(2)$-Dubletts, das leptonische Superfeld $\mathbf{L}_i$ ebenso, wohingegen das andere leptonische Superfeld $\mathbf{E}_j$ trivial unter der $SU(2)$ transformiert. Alle diese Superfelder bilden darüber hinaus Singlett-Zustände bezüglich der $SU(3)$-Eichgruppe der starken Wechselwirkung. Von den Quark Superfeldern $\mathbf{Q}_{iA}$, $\mathbf{D}^A_j$ und $\mathbf{U}^A_j$ besitzen nur die $\mathbf{Q}_{iA}$ $SU(2)$-Struktur, die anderen sind ebenso wie $\mathbf{E}_j$ Singletts. Der tiefgestellte $SU(3)$-Index A soll andeuten, daß das entsprechende Superfeld zur 3-Darstellung der $SU(3)$ gehört; ist der Index oben, so ist das entsprechende Superfeld in der dazu konjugiert komplexen Darstellung, der $\overline{3}$ der $SU(3)$. Die Matrizen y^e, y^d und y^u sind Matrizen im Generationenraum und berücksichtigen die Tatsache, daß Masseneigenzustände und Eicheigenzustände nicht notwendigerweise übereinstimmen müssen, was sich in der Mischung der Teilchen verschiedender Teilchengenerationen widerspiegelt. Die Matrix $i\tau_2$ ist gegeben durch

$$i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Wir listen im folgenden die niedrigsten Komponenten aller Superfelder auf:

$$\begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L_i^0 \\ L_i^- \end{pmatrix}, \quad (E_i^+) , \quad \begin{pmatrix} Q_{iA}^+ \\ Q_{iA}^- \end{pmatrix}, \quad (D_i^{A+}) , \quad (U_i^{A-}) .$$

Die niedrigste Komponente des Superpotentials ist mit diesen Bezeichnungen in der Form

$$\begin{aligned} W|_{\theta=\bar\theta=0} &= \mu \left(H_1^0 H_2^0 - H_1^- H_2^+ \right) + \sum_{i,j=1}^{3} y_{ij}^e \left(L_i^0 H_1^- - L_i^- H_1^0 \right) E_j^+ \\ &+ \sum_{i,j,A=1}^{3} \left(y_{ij}^d \left(Q_{iA}^+ H_1^- - Q_{iA}^- H_1^0 \right) D_j^{A+} + y_{ij}^u \left(Q_{iA}^+ H_2^0 - Q_{iA}^- H_2^+ \right) U_j^{A-} \right) \end{aligned} \tag{7.2}$$

gegeben.
Das Potential setzt sich aus Beiträgen der F-Terme, D-Terme und einem die Supersymmetrie sanft brechenden Anteil zusammen:

$$V_0 = V_F + V_D + V_{sanft} \tag{7.3}$$

mit

$$\begin{aligned} V_F &= \sum_{\phi} \left| \frac{\partial}{\partial \phi} W|_{\theta=\bar\theta=0} \right|^2 , \\ V_D &= \frac{1}{2} \sum_G g_G^2 V_G \qquad \text{mit} \qquad V_G = \sum_{a=1}^{\dim G} \left(\sum_{\phi} \phi^+ T_a \phi \right)^2 , \\ V_{sanft} &= \sum_{\phi} m_\phi^2 |\phi|^2 + \left(B\mu \, \mathbf{H}_1^T (i\tau_2) \mathbf{H}_2 + \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}^e y_{ij}^e \mathbf{L}_i^T (i\tau_2) \mathbf{H}_1 \mathbf{E}_j + h.c. \right) \Big|_{\theta=\bar\theta=0} \\ &+ \left(\sum_{i,j,A=1}^{3} \left(A_{ij}^d y_{ij}^d \mathbf{Q}_{iA}^T (i\tau_2) \mathbf{H}_1 \mathbf{D}_j^A + A_{ij}^u y_{ij}^u \mathbf{Q}_{iA}^T (i\tau_2) \mathbf{H}_2 \mathbf{U}_j^A + h.c. \right) \right) \Big|_{\theta=\bar\theta=0} . \end{aligned}$$

Die F-Terme werden mittels (7.2) berechnet und liefern den folgenden Beitrag zum Potential:

$$
\begin{aligned}
V_F \;=\; & \left| -\mu H_2^+ + \sum_{i,j=1}^{3} y_{ij}^e\, L_i^0 E_j^+ + \sum_{i,j,A=1}^{3} y_{ij}^d\, Q_{iA}^+ D_j^{A+} \right|^2 + \left| -\mu H_1^- - \sum_{i,j,A=1}^{3} y_{ij}^u\, Q_{iA}^- U_j^{A-} \right|^2 \\
& + \left| \mu H_2^0 - \sum_{i,j=1}^{3} y_{ij}^e\, L_i^- E_j^+ - \sum_{i,j,A=1}^{3} y_{ij}^d\, Q_{iA}^- D_j^{A+} \right|^2 + \left| \mu H_1^0 + \sum_{i,j,A=1}^{3} y_{ij}^u\, Q_{iA}^+ U_j^{A-} \right|^2 \\
& + \sum_{i=1}^{3} \left(\left| \sum_{j=1}^{3} y_{ij}^e\, H_1^- E_j^+ \right|^2 + \left| - \sum_{j=1}^{3} y_{ij}^e\, H_1^0 E_j^+ \right|^2 + \left| \sum_{j=1}^{3} y_{ji}^e \left(L_j^0 H_1^- - L_j^- H_1^0 \right) \right|^2 \right) \\
& + \sum_{i,A=1}^{3} \left(\left| \sum_{j=1}^{3} \left(y_{ij}^d\, H_1^- D_j^{A+} + y_{ij}^u\, H_2^0 U_j^{A-} \right) \right|^2 + \left| \sum_{j=1}^{3} \left(y_{ij}^d\, H_1^0 D_j^{A+} + y_{ij}^u\, H_2^+ U_j^{A-} \right) \right|^2 \right) \\
& + \sum_{i,A=1}^{3} \left(\left| \sum_{j=1}^{3} y_{ji}^d \left(Q_{jA}^+ H_1^- - Q_{jA}^- H_1^0 \right) \right|^2 + \left| \sum_{j=1}^{3} y_{ji}^u \left(Q_{jA}^+ H_2^0 - Q_{jA}^- H_2^+ \right) \right|^2 \right) .
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

Die D-Terme unterteilen wir in die Beiträge der auftretenden Eichgruppen: für die Eichgruppe $U(1)$ erhalten wir unter Berücksichtigung der Eigenwerte der Superfelder

$$
\begin{aligned}
V_{U(1)} \;=\; & \frac{1}{4} \Bigg(- \left|H_1^0\right|^2 - \left|H_1^-\right|^2 + \left|H_2^0\right|^2 + \left|H_2^+\right|^2 - \sum_{i=1}^{3} \left(\left|L_i^0\right|^2 + \left|L_i^-\right|^2 - 2\left|E_i^+\right|^2 \right) \\
& + \sum_{i,A=1}^{3} \left(\frac{1}{3} \left|Q_{iA}^+\right|^2 + \frac{1}{3} \left|Q_{iA}^-\right|^2 + \frac{2}{3} \left|D_i^{A+}\right|^2 - \frac{4}{3} \left|U_i^{A-}\right|^2 \right) \Bigg)^2
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

und für die $SU(2)$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
V_{SU(2)} \;=\; & \frac{1}{4} \left(\left|H_1^0\right|^2 - \left|H_1^-\right|^2 + \left|H_2^+\right|^2 - \left|H_2^0\right|^2 + \sum_{i=1}^{3} \left(\left|L_i^0\right|^2 - \left|L_i^-\right|^2 \right) + \sum_{i,A=1}^{3} \left(\left|Q_{iA}^+\right|^2 - \left|Q_{iA}^-\right|^2 \right) \right)^2 \\
& + \left| \overline{H_1^0} H_1^- + \overline{H_2^+} H_2^0 + \sum_{i=1}^{3} \overline{L_i^0} L_i^- + \sum_{i,A=1}^{3} \overline{Q_i^{A+}} Q_{iA}^- \right|^2 ,
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

oder nach Auswertung des Betragsquadrates

$$
\begin{aligned}
V_{SU(2)} \;=\;& \frac{1}{4}\left(\left|H_1^0\right|^2+\left|H_1^-\right|^2-\left|H_2^0\right|^2-\left|H_2^+\right|^2+\sum_{i=1}^{3}\left(\left|L_i^0\right|^2+\left|L_i^-\right|^2\right)+\sum_{i,A=1}^{3}\left(\left|Q_{iA}^+\right|^2+\left|Q_{iA}^-\right|^2\right)\right)^2 \\
&+\left|H_1^0\right|^2\left|H_2^+\right|^2+\left|H_1^-\right|^2\left|H_2^0\right|^2-\left(\left|H_1^-\right|^2-\left|H_2^+\right|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\left|L_i^0\right|^2+\sum_{j,A=1}^{3}\left|Q_{jA}^+\right|^2\right) \\
&-\left(\left|H_1^0\right|^2-\left|H_2^0\right|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3}\left|L_i^-\right|^2+\sum_{j,A=1}^{3}\left|Q_{jA}^-\right|^2\right)-\sum_{i\neq j}\left|L_i^0\right|^2\left|L_j^-\right|^2 \\
&-\sum_{i,j,A=1}^{3}\left(\left|L_i^0\right|^2\left|Q_{jA}^-\right|^2+\left|L_i^-\right|^2\left|Q_{jA}^+\right|^2\right)-\sum_{(iA)\neq(jB)}\left|Q_{iA}^+\right|^2\left|Q_{jB}^-\right|^2 \qquad (7.7)\\
&+2\,\mathrm{Re}\left\{\overline{H_1^0}H_1^-H_2^+\overline{H_2^0}+\sum_{i=1}^{3}\left(\overline{H_1^0}H_1^-L_i^0\overline{L_i^-}+\overline{H_2^+}H_2^0L_i^0\overline{L_i^-}\right)+\sum_{i<j}\overline{L_i^0}L_i^-L_j^0\overline{L_j^-}\right\} \\
&+2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{i,A=1}^{3}\left(\overline{H_1^0}H_1^-Q_{iA}^+\overline{Q_i^{A-}}+\overline{H_2^+}H_2^0Q_{iA}^+\overline{Q_i^{A-}}\right)+\sum_{i,j,A=1}^{3}\overline{L_i^0}L_i^-Q_{jA}^+\overline{Q_j^{A-}}\right\} \\
&+\mathrm{Re}\left\{\sum_{(iA)\neq(jB)}Q_{iA}^-\overline{Q_i^{A+}}Q_{jB}^+\overline{Q_j^{B-}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Schließlich die D-Terme der Eichgruppe $SU(3)$:

$$
\begin{aligned}
V_{SU(3)} \;=\;& \left(\sum_{i=1}^{3}\mathrm{Re}\left\{\overline{Q_i^{1+}}Q_{i2}^++\overline{Q_i^{1-}}Q_{i2}^-+D_i^{1+}\overline{D_{i2}^+}+U_i^{1+}\overline{U_{i2}^+}\right\}\right)^2 \\
&+\left(\sum_{i=1}^{3}\mathrm{Im}\left\{\overline{Q_i^{1+}}Q_{i2}^++\overline{Q_i^{1-}}Q_{i2}^-+D_i^{1+}\overline{D_{i2}^+}+U_i^{1+}\overline{U_{i2}^+}\right\}\right)^2 \\
&+\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{3}\left(\left|Q_{i1}^+\right|^2-\left|Q_{i2}^+\right|^2+\left|Q_{i1}^-\right|^2-\left|Q_{i2}^-\right|^2+\left|D_i^{1+}\right|^2-\left|D_i^{2+}\right|^2+\left|U_i^{1+}\right|^2-\left|U_i^{2+}\right|^2\right)\right)^2 \\
&+\left(\sum_{i=1}^{3}\mathrm{Re}\left\{\overline{Q_i^{1+}}Q_{i3}^++\overline{Q_i^{1-}}Q_{i3}^-+D_i^{1+}\overline{D_{i3}^+}+U_i^{1+}\overline{U_{i3}^+}\right\}\right)^2 \qquad (7.8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left(\sum_{i=1}^{3} \mathrm{Im} \, \left\{ \overline{Q_i^{1+}} Q_{i3}^{+} + \overline{Q_i^{1-}} Q_{i3}^{-} + D_i^{1+} \overline{D_{i3}^{+}} + U_i^{1+} \overline{U_{i3}^{+}} \right\} \right)^2 \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{3} \mathrm{Re} \, \left\{ \overline{Q_i^{2+}} Q_{i3}^{+} + \overline{Q_i^{2-}} Q_{i3}^{-} + D_i^{2+} \overline{D_{i3}^{+}} + U_i^{2+} \overline{U_{i3}^{+}} \right\} \right)^2 \\
&+ \left(\sum_{i=1}^{3} \mathrm{Im} \, \left\{ \overline{Q_i^{2+}} Q_{i3}^{+} + \overline{Q_i^{2-}} Q_{i3}^{-} + D_i^{2+} \overline{D_{i3}^{+}} + U_i^{2+} \overline{U_{i3}^{+}} \right\} \right)^2 \\
&+ \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^{3} \left(\left|Q_{i1}^{+}\right|^2 + \left|Q_{i2}^{+}\right|^2 - 2\left|Q_{i3}^{+}\right|^2 + \left|Q_{i1}^{-}\right|^2 + \left|Q_{i2}^{-}\right|^2 - 2\left|Q_{i3}^{-}\right|^2 \right) \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{i=1}^{3} \left(\left|D_i^{1+}\right|^2 + \left|D_i^{2+}\right|^2 - 2\left|D_i^{3+}\right|^2 + \left|U_i^{1+}\right|^2 + \left|U_i^{2+}\right|^2 - 2\left|U_i^{3+}\right|^2 \right) \right)^2 .
\end{aligned}
$$

Der Beitrag der D-Terme ist damit bestimmt. Bleibt noch der Anteil der sanft brechenden Terme übrig:

$$
\begin{aligned}
V_{sanft} \;=\;& m_{H_1}^2 \left(\left|H_1^0\right|^2 + \left|H_1^-\right|^2 \right) + m_{H_2}^2 \left(\left|H_2^+\right|^2 + \left|H_2^0\right|^2 \right) + \sum_{i=1}^{3} \left(m_{L_i}^2 \left(\left|L_i^0\right|^2 + \left|L_i^-\right|^2 \right) + m_{E_i^+}^2 \left|E_i^+\right|^2 \right) \\
& + \sum_{i,A=1}^{3} \left(m_{Q_i}^2 \left(\left|Q_{iA}^+\right|^2 + \left|Q_{iA}^-\right|^2 \right) + m_{D_i^+}^2 \left|D_i^{A+}\right|^2 + m_{U_i^-}^2 \left|U_i^{A-}\right|^2 \right) \\
& + \left(B\mu \left(H_1^0 H_2^0 - H_1^- H_2^+ \right) + \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}^e \, y_{ij}^e \left(L_i^0 H_1^- - L_i^- H_1^0 \right) E_j^+ + h.c. \right) \\
& + \sum_{i,j,A=1}^{3} \left(A_{ij}^d \, y_{ij}^d \left(Q_{iA}^+ H_1^- - Q_{iA}^- H_1^0 \right) D_j^{A+} + A_{ij}^u \, y_{ij}^u \left(Q_{iA}^+ H_2^0 - Q_{iA}^- H_2^+ \right) U_j^{A-} + h.c. \right) .
\end{aligned} \tag{7.9}
$$

Hierin sind die Massenterme der skalaren Felder so gewählt, daß die inneren Symmetrien $SU(2)$ und $SU(3)$ nicht gebrochen werden. Durch die Summe der Terme in den Gleichungen (7.4), (7.5), (7.7), (7.8) und (7.9) ist das Potential für dieses Modell in voller Allgemeinheit gegeben.

7.2 Das Potential für eine Teilchengeneration und der Feldraum

Wir werden im folgenden das Modell einschränken und nur noch eine Generation von Elementarteilchen betrachten, damit das Potential V_0 aus (7.3) eine einfachere Gestalt erhält. Dann entfallen in den oben angegebenen Gleichungen jeweils die Summationen über die verschiedenen Generationen mit den Indizes i und j. Mit den Abkürzungen

$$
\begin{array}{llllll}
L^0 := L_1^0\,, & L^- := L_1^-\,, & Q_A^+ := Q_{1A}^+\,, & Q_A^- := Q_{1A}^-\,, & U^{A-} := U_1^{A-}\,, & D^{A+} := D_1^{A+}\,, \\
E^+ := E_1^+\,, & y^e := y_{11}^e\,, & y^u := y_{11}^u\,, & y^d := y_{11}^d\,, & A^u := A_{11}^u\,, & A^d := A_{11}^d\,, \\
A^e := A_{11}^e\,, & m_E^2 := m_{E_1}^2\,, & m_L^2 := m_{L_1}^2\,, & m_Q^2 := m_{Q_1}^2\,, & m_D^2 := m_{D_1}^2\,, & m_U^2 := m_{U_1}^2
\end{array}
$$

ergeben sich die Beiträge der F-Terme zum Potential zu

$$
\begin{aligned}
V_F \;=\; & \left| -\mu H_2^+ + y^e\, L^0 E^+ + \sum_{A=1}^{3} y^d\, Q_A^+ D^{A+} \right|^2 + \left| -\mu H_1^- - \sum_{A=1}^{3} y^u\, Q_A^- U^{A-} \right|^2 \\
& + \left| \mu H_2^0 - y^e\, L^- E^+ - \sum_{A=1}^{3} y^d\, Q_A^- D^{A+} \right|^2 + \left| \mu H_1^0 + \sum_{A=1}^{3} y^u\, Q_A^+ U^{A-} \right|^2 \\
& + \left| y^e\, H_1^- E^+ \right|^2 + \left| -y^e\, H_1^0 E^+ \right|^2 + \left| y^e \left(L^0 H_1^- - L^- H_1^0 \right) \right|^2 \\
& + \sum_{A=1}^{3} \left(\left| y^d\, H_1^- D^{A+} + y^u\, H_2^0 U^{A-} \right|^2 + \left| y^d\, H_1^0 D^{A+} + y^u\, H_2^+ U^{A-} \right|^2 \right) \\
& + \sum_{A=1}^{3} \left(\left| y^d \left(Q_A^+ H_1^- - Q_A^- H_1^0 \right) \right|^2 + \left| y^u \left(Q_A^+ H_2^0 - Q_A^- H_2^+ \right) \right|^2 \right) .
\end{aligned} \tag{7.10}
$$

Die D-Terme gliedern wir den drei auftretenden Eichgruppen entsprechend und erhalten

$$
\begin{aligned}
V_{U(1)} \;=\; & \frac{1}{4} \Bigg(- \left|H_1^0\right|^2 - \left|H_1^-\right|^2 + \left|H_2^0\right|^2 + \left|H_2^+\right|^2 - \left|L^0\right|^2 - \left|L^-\right|^2 + 2\left|E^+\right|^2 \\
& + \sum_{A=1}^{3} \left(\frac{1}{3}\left|Q_A^+\right|^2 + \frac{1}{3}\left|Q_A^-\right|^2 + \frac{2}{3}\left|D^{A+}\right|^2 - \frac{4}{3}\left|U^{A-}\right|^2 \right) \Bigg)^2 ,
\end{aligned} \tag{7.11}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{SU(2)} \;=\; & \frac{1}{4} \left(\left|H_1^0\right|^2 - \left|H_1^-\right|^2 + \left|H_2^+\right|^2 - \left|H_2^0\right|^2 + \left|L^0\right|^2 - \left|L^-\right|^2 + \sum_{A=1}^{3} \left(\left|Q_A^+\right|^2 - \left|Q_A^-\right|^2 \right) \right)^2 \\
& + \left| \overline{H_1^0} H_1^- + \overline{H_2^+} H_2^0 + \overline{L^0} L^- + \sum_{A=1}^{3} \overline{Q^{A+}} Q_A^- \right|^2 ,
\end{aligned} \tag{7.12}
$$

oder nach Auswertung des Betragsquadrates

$$
\begin{aligned}
V_{SU(2)} \; = \; & \frac{1}{4}\left(\left|H_1^0\right|^2+\left|H_1^-\right|^2-\left|H_2^0\right|^2-\left|H_2^+\right|^2+\left|L^0\right|^2+\left|L^-\right|^2+\sum_{A=1}^{3}\left(\left|Q_A^+\right|^2+\left|Q_A^-\right|^2\right)\right)^2 \\
& +\left|H_1^0\right|^2\left|H_2^+\right|^2+\left|H_1^-\right|^2\left|H_2^0\right|^2-\left(\left|H_1^-\right|^2-\left|H_2^+\right|^2\right)\left(\left|L^0\right|^2+\sum_{A=1}^{3}\left|Q_A^+\right|^2\right) \\
& -\left(\left|H_1^0\right|^2-\left|H_2^0\right|^2\right)\left(\left|L^-\right|^2+\sum_{A=1}^{3}\left|Q_A^-\right|^2\right)-\sum_{A=1}^{3}\left(\left|L^0\right|^2\left|Q_A^-\right|^2+\left|L^-\right|^2\left|Q_A^+\right|^2\right) \\
& +2\,\mathrm{Re}\left\{\overline{H_1^0}H_1^-H_2^+\overline{H_2^0}+\overline{H_1^0}H_1^-L^0\overline{L^-}+\overline{H_2^+}H_2^0L^0\overline{L^-}\right\} \\
& +2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{A=1}^{3}\left(\overline{H_1^0}H_1^-Q_A^+\overline{Q^{A-}}+\overline{H_2^+}H_2^0Q_A^+\overline{Q^{A-}}+\overline{L^0}L^-Q_A^+\overline{Q^{A-}}\right)\right\} \\
& +2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{A<B}Q_A^-\overline{Q^{A+}}Q_B^+\overline{Q^{B-}}\right\},
\end{aligned} \tag{7.13}
$$

und

$$
\begin{aligned}
V_{SU(3)} \; = \; & \left|\overline{Q^{1+}}Q_2^++\overline{Q^{1-}}Q_2^-+D^{1+}\overline{D_2^+}+U^{1+}\overline{U_2^+}\right|^2 \\
& +\left(\left|Q_1^+\right|^2-\left|Q_2^+\right|^2+\left|Q_1^-\right|^2-\left|Q_2^-\right|^2+\left|D^{1+}\right|^2-\left|D^{2+}\right|^2+\left|U^{1+}\right|^2-\left|U^{2+}\right|^2\right)^2 \\
& +\left|\overline{Q^{1+}}Q_3^++\overline{Q^{1-}}Q_3^-+D^{1+}\overline{D_3^+}+U^{1+}\overline{U_3^+}\right|^2 \\
& +\left|\overline{Q^{2+}}Q_3^++\overline{Q^{2-}}Q_3^-+D^{2+}\overline{D_3^+}+U^{2+}\overline{U_3^+}\right|^2 \\
& +\frac{1}{12}\left(\left|Q_1^+\right|^2+\left|Q_2^+\right|^2-2\left|Q_3^+\right|^2+\left|Q_1^-\right|^2+\left|Q_2^-\right|^2-2\left|Q_3^-\right|^2\right. \\
& \qquad \left.+\left|D^{1+}\right|^2+\left|D^{2+}\right|^2-2\left|D^{3+}\right|^2+\left|U^{1+}\right|^2+\left|U^{2+}\right|^2-2\left|U^{3+}\right|^2\right)^2 .
\end{aligned} \tag{7.14}
$$

Bei der Berechnung der D-Terme für die Eichgruppe $SU(3)$ mußte die zusätzliche Dublett-Struktur der skalaren Komponenten der Quark-Superfelder $\mathbf{Q}_{iA}$ beachtet werden. Für die erste Gell-Mann-Matrix, den ersten Generator der $SU(3)$, erhielt man zunächst Terme der Form

$$
\mathbf{Q}_i^+\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)\mathbf{Q}_i \;=\; \overline{Q_i^1}\,Q_{i2}+\overline{Q_i^2}\,Q_{i1}\,,
$$

bei denen explizit nur die Generationenindizes i und die $SU(3)$-Farbindizes (hier 1 und 2) zu sehen waren, nicht aber die Indexstruktur für die $SU(2)$. Deshalb enthielt jeder der zwei Summanden auf der rechten Seite noch implizit eine Multiplikation dieser $SU(2)$-Dubletts im Sinne einer gewöhnlichen Vektorenmultiplikation:

$$\mathbf{Q}_i^+ \left(\frac{1}{2}\lambda_1\right) \mathbf{Q}_i = \overline{Q_i^1} Q_{i2} + \overline{Q_i^2} Q_{i1} = \overline{Q_i^{1+}} Q_{i2}^+ + \overline{Q_i^{1-}} Q_{i2}^- + \overline{Q_i^{2+}} Q_{i1}^+ + \overline{Q_i^{2-}} Q_{i1}^- .$$

Die die Supersymmetrie sanft brechenden Terme lauten für eine Generation:

$$\begin{aligned} V_{sanft} &= m_{H_1}^2 \left(\left|H_1^0\right|^2 + \left|H_1^-\right|^2\right) + m_{H_2}^2 \left(\left|H_2^+\right|^2 + \left|H_2^0\right|^2\right) + m_L^2 \left(\left|L^0\right|^2 + \left|L^-\right|^2\right) + m_E^2 \left|E^+\right|^2 \\ &\quad + \sum_{A=1}^{3} \left(m_Q^2 \left(\left|Q_A^+\right|^2 + \left|Q_A^-\right|^2\right) + m_D^2 \left|D^{A+}\right|^2 + m_U^2 \left|U^{A-}\right|^2\right) \\ &\quad + \left(B\mu \left(H_1^0 H_2^0 - H_1^- H_2^+\right) + A^e y^e \left(L^0 H_1^- - L^- H_1^0\right) E^+ + h.c.\right) \\ &\quad + \sum_{A=1}^{3} \left(A^d y^d \left(Q_A^+ H_1^- - Q_A^- H_1^0\right) D^{A+} + A^u y^u \left(Q_A^+ H_2^0 - Q_A^- H_2^+\right) U^{A-} + h.c.\right) . \end{aligned} \tag{7.15}$$

Eine weitere Vereinfachung des Potentials gelingt unter Berücksichtigung der Symmetrien, ganz unabhängig von der Anzahl der betrachteten Teilchengenerationen: der Anteil V_{sanft} ist invariant unter $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, weil er bis auf die Koeffizienten genau die Struktur des Superpotentials W aufweist, welches nach Konstruktion diese Symmetrien besitzt. Ebenfalls definitionsgemäß sind die D-Terme symmetrisch bezüglich der gleichen Gruppen. Damit müssen wir nur noch die F-Terme untersuchen und deren Symmetrien herausfinden. Wir bemerken, daß auch die F-Terme invariant unter $SU(2) \times U(1)$ sind. Weiterhin ist die $SU(3)$-Invarianz für viele F-Terme auch trivialerweise gesichert, nämlich für

$$\left|\frac{\partial V_0}{\partial H_1^-}\right|^2, \left|\frac{\partial V_0}{\partial H_1^0}\right|^2, \left|\frac{\partial V_0}{\partial H_2^0}\right|^2, \left|\frac{\partial V_0}{\partial H_2^+}\right|^2, \left|\frac{\partial V_0}{\partial L_i^-}\right|^2, \left|\frac{\partial V_0}{\partial L_i^0}\right|^2, \left|\frac{\partial V_0}{\partial E_j^+}\right|^2 .$$

Nicht ganz offensichtlich ist diese Invarianz für

$$\sum_{A=1}^{3} \left|\frac{\partial V_0}{\partial Q_{iA}^+}\right|^2, \quad \sum_{A=1}^{3} \left|\frac{\partial V_0}{\partial Q_{iA}^-}\right|^2, \quad \sum_{A=1}^{3} \left|\frac{\partial V_0}{\partial D_i^{A+}}\right|^2, \quad \sum_{A=1}^{3} \left|\frac{\partial V_0}{\partial U_i^{A-}}\right|^2 .$$

Wir erläutern die Vorgehensweise beim ersten Term ausführlich, und analog läßt sich die Symmetrie für die anderen Terme zeigen. Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial Q_{iA}^+} W|_{\theta=\bar{\theta}=0} = \sum_{j=1}^{3} \left(y_{ij}^d H_1^- D_j^{A+} + y_{ij}^u H_1^0 U_j^{A-}\right) ,$$

und folglich erhalten wir den hierzu komplex konjugierten Ausdruck in der Form

$$\overline{\frac{\partial}{\partial Q^{+}_{iA}} W|_{\theta=\bar\theta=0}} = \sum_{j=1}^{3} \left(\overline{y^d_{ij}}\, \overline{H_1^-}\, \overline{D^+_{jA}} + \overline{y^u_{ij}}\, \overline{H_1^0}\, \overline{U^-_{jA}} \right) .$$

Die $SU(3)$-Tripletts D_j^{A+} und U_j^{A-} transformieren, wie schon eingangs erwähnt, unter der $\overline{3}$-Darstellung, mit den konjugiert komplexen Erzeugenden der $SU(3)$:

$$D_j^{A+} \longrightarrow D_j^{B+}\, U_B{}^A , \qquad \overline{D^+_{jA}} \longrightarrow U^+{}_A{}^B\, \overline{D^+_{jB}}$$

mit

$$U = \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{8} \alpha_j \lambda^{j*} \right\}$$

und reellen Zahlen α_j, $j = 1, \ldots, 8$. Somit transformieren auch die partiellen Ableitungen der skalaren Komponente des Superpotentials auf diese Weise, weil alle sonst auftretenden Größen invariant unter $SU(3)$-Transformationen sind. Aufgrund der Unitarität der Matrix U folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{A=1}^{3} \left| \frac{\partial}{\partial Q^{+}_{iA}} W|_{\theta=\bar\theta=0} \right|^2 &= \sum_{A=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial Q^{+}_{iA}} W|_{\theta=\bar\theta=0} \right) \overline{\left(\frac{\partial}{\partial Q^{+}_{iA}} W|_{\theta=\bar\theta=0} \right)} \\
&\longrightarrow \sum_{A,B,C=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial Q^{+}_{iC}} W|_{\theta=\bar\theta=0} \right) \left(U_C{}^A \right) U^+{}_A{}^B\, \overline{\left(\frac{\partial}{\partial Q^{+}_{iB}} W|_{\theta=\bar\theta=0} \right)} \\
&= \sum_{B=1}^{3} \left| \frac{\partial}{\partial Q^{+}_{iB}} W|_{\theta=\bar\theta=0} \right|^2 .
\end{aligned}$$

Damit ist die $SU(3)$-Invarianz des gesamten Potentials gesichert. Das Potential V_0 aus (7.3) ist invariant unter der Symmetriegruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.

Diese Symmetrien des Potentials gilt es zu verwenden, um eine einfachere Gestalt desselben zu erreichen. Die $SU(2)$-Symmetrie gestattet uns, eine Transformation durchzuführen, deren Ergebnis das Verschwinden einer Komponente eines $SU(2)$-Dubletts ist, zum Beispiel $H_1^- = 0$: Genau wie in Kapitel 5 können wir eine $SU(2)$-Transformation S durchführen, so daß

$$S \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Für alle weiteren $SU(2)$-Dubletts können wir keine Vereinfachung erreichen, weil das Verschwinden der geladenen skalaren Komponente H_1^- des einen Higgs-Dubletts zwei der drei Freiheitsgrade der $SU(2)$ verwendet und somit nur noch ein Freiheitsgrad zur Verfügung steht. Man könnte diesen höchstens dazu verwenden, nochmals eine $SU(2)$-Rotation durchzuführen, wobei wir $H_1^- = 0$ erhalten wollen. Matrizen mit dieser Eigenschaft sind von der Form

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ 0 & z_3 \end{pmatrix}$$

und als solche unitär nur für $z_2 = 0$ (und $|z_1|^2 = |z_3|^2 = 1$). Folglich bleibt der Ansatz

$$\tilde{S} \;=\; \exp\left\{ i\,\frac{\sigma_3}{2}\,\beta \right\} \;=\; \begin{pmatrix} e^{i\beta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta/2} \end{pmatrix}$$

für die Matrix der zweiten $SU(2)$-Rotation übrig. Diese wird jedoch zu keiner weiteren Vereinfachung oder zum Verschwinden weiterer Komponenten der anderen $SU(2)$-Dubletts führen. Es bleibt somit bei der einen $SU(2)$-Rotation S und $H_1^- = 0$.
Gleiches läßt sich auch im Falle der $SU(3)$ durchführen, weil die Transformationen verschiedener Symmetriegruppen kommutieren und die $SU(2)$-Transformation S von den zu erfolgenden $SU(3)$-Rotationen unberührt bleibt. Die acht Generatoren der $SU(3)$ sind bei der von uns verwendeten fundamentalen Darstellung die Gell-Mann-Matrizen $\frac{1}{2}\lambda_j$, $j = 1, \ldots, 8$ mit dem zusätzlichen Faktor $1/2$. Damit ist eine beliebige $SU(3)$-Transformation durch acht reelle Zahlen α_j, $j = 1, \ldots, 8$ in der Form

$$T = \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{8} \frac{\lambda_j}{2}\,\alpha_j \right\}$$

gegeben. Wir beachten, daß die ersten drei Gell-Mann-Matrizen λ_1, λ_2 und λ_3 gerade die Pauli-Matrizen in den ersten beiden Spalten und Zeilen als Einträge besitzen und sonst nur Nullen (Grund: innerhalb der $SU(3)$ findet sich eine $SU(2)$ als Untergruppe). Die $SU(3)$-Transformation setzen wir als Produkt zweier $SU(3)$-Rotationen an, wobei jede Transformation für sich eine Komponente eines ausgewählten $SU(3)$-Tripletts zu Null macht. Wir können die erste Rotation

$$T_1 = \exp\left\{ i \sum_{j=4}^{7} \frac{\lambda_j}{2}\,\alpha_j \right\}$$

so wählen, daß

$$T_1 \begin{pmatrix} U_1^{1-} \\ U_1^{2-} \\ U_1^{3-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T_1 \begin{pmatrix} D_1^{1+} \\ D_1^{2+} \\ D_1^{3+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt mit beliebigen komplexen Einträgen a, b und e, f in den ersten beiden Spalten. Die zweite Matrix T_2 setzen wir in der Form

$$T_2 = \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{2} \frac{\lambda_j}{2}\,\alpha_j \right\}$$

an, wobei die reellen Zahlen α_1 und α_2 so gewählt werden können, daß

$$T_2\,T_1 \begin{pmatrix} U_1^{1-} \\ U_1^{2-} \\ U_1^{3-} \end{pmatrix} = T_2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Dann ist als Resultat der $SU(3)$-Rotation $T = T_2 T_1$ nun $D^{3+} = U^{2-} = U^{3-} = 0$.

Bezeichnen wir die nach den erfolgten Transformationen S und T übrig gebliebenen Variablen wieder mit den den gleichen Symbolen (obwohl das nicht korrekt ist, weil die transformierten Variablen auftreten), so verwenden wir im weiteren im Fall einer Teilchengeneration die folgenden Abkürzungen:

$$\begin{aligned} &x_1 := \left|H_1^0\right|, \quad x_2 := \left|H_2^0\right|, \quad x_3 := \left|H_2^+\right|, \quad x_4 := \left|L^0\right|, \quad x_5 := \left|L^-\right|, \\ &x_6 := \left|E^+\right|, \quad x_{7A} := \left|Q_A^+\right|, \quad x_{8A} := \left|Q_A^-\right|, \quad x_{9B} := \left|D^{B+}\right|, \quad x_{10} := \left|U^{1-}\right| \end{aligned} \tag{7.16}$$

mit $A = 1,2,3$ und $B = 1,2$. Die in V_{sanft} auftretenden Phasen sind

$$\begin{aligned} \theta_1 &:= \arg B + \arg\mu + \arg H_1^0 + \arg H_2^0\,, \\ \theta_2 &:= \arg A^e + \arg y^e + \arg H_1^0 + \arg L^- + \arg E^+\,, \\ \theta_3 &:= \arg A^u + \arg y^u + \arg Q_1^+ + \arg H_2^0 + \arg U^{1-}\,, \\ \theta_{4B} &:= \arg A^d + \arg y^d + \arg Q_B^- + \arg H_1^0 + \arg D^{B+}\,, \qquad B = 1,2\,. \end{aligned} \tag{7.17}$$

In den D-Termen erscheinen die Winkel

$$\begin{aligned} \psi_1 &:= \arg H_2^0 - \arg H_2^+ + \arg L^0 - \arg L^-\,, \\ \psi_{3A} &:= \arg H_2^0 - \arg H_2^+ + \arg Q_A^+ - \arg Q_A^-\,, A = 1,2,3\,. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Alle weiteren Winkel lassen sich durch die eingeführten Winkel ausdrücken ($A = 1,2,3$ und $B = 1,2$):

$$\begin{aligned} \arg A^u + \arg y^u + \arg Q_1^+ + \arg H_2^+ + \arg U^{1-} &= \theta_3 - \psi_{31}\,, \\ \arg L^- - \arg L^0 + \arg Q_A^+ - \arg Q_A^- &= \psi_{3A} - \psi_1\,, \\ \arg Q_B^+ - \arg Q_B^- - \arg Q_A^+ + \arg Q_A^- &= \psi_{3B} - \psi_{3A}\,, \\ \arg Q_1^- + \arg D^{1+} - \arg Q_2^- - \arg D^{2+} &= \theta_{41} - \theta_{42}\,, \\ \arg Q_1^+ + \arg D^{1+} - \arg Q_2^+ - \arg D^{2+} &= \theta_{41} - \theta_{42} + \psi_{31} - \psi_{32}\,, \\ \arg\mu - \arg y^e + \arg H_2^0 - \arg L^- - \arg E^+ &= \theta_e + \theta_1 - \theta_2\,, \\ \arg\mu - \arg y^e + \arg H_2^+ - \arg L^0 - \arg E^+ &= \theta_e + \theta_1 - \theta_2 - \psi_1\,, \\ \arg\mu - \arg y^u + \arg H_1^0 - \arg Q_1^+ - \arg U^{1-} &= \theta_u + \theta_1 - \theta_3\,, \\ \arg\mu - \arg y^d + \arg H_2^0 - \arg Q_B^- - \arg D^{B+} &= \theta_d + \theta_1 - \theta_{4B}\,, \\ \arg\mu - \arg y^d + \arg H_2^+ - \arg Q_B^+ - \arg D^{B+} &= \theta_d + \theta_1 - \theta_{4B} - \psi_{3B}\,, \\ \arg y^e - \arg y^d + \arg L^0 + \arg E^+ - \arg Q_B^+ - \arg D^{B+} &= \theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{4B} + \psi_1 - \psi_{3B}\,, \\ \arg y^e - \arg y^d + \arg L^- + \arg E^+ - \arg Q_B^- - \arg D^{B+} &= \theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{4B}\,, \\ \arg y^d - \arg y^u + \arg H_1^0 + \arg D^{1+} - \arg H_2^+ - \arg U^{1-} &= \theta_u - \theta_d - \theta_3 + \theta_{41} + \psi_{31}\,. \end{aligned}$$

Hierbei sind die konstanten Phasenkombinationen

$$\theta_e := \arg A^e - \arg B\,, \qquad \theta_u := \arg A^u - \arg B\,, \qquad \theta_d := \arg A^d - \arg B \tag{7.19}$$

verwendet worden.
Wir können das Potential V_0 somit in Abhängigkeit von $15+9=24$ reellen Feldern angeben. Zur Erinnerung: vor der Vereinfachung von V_0 aus Symmetriegründen war das Potential in Abhängigkeit aller möglichen reellen Felder einer Teilchengeneration im MSSM gegeben. Dies waren insgesamt 38 reelle Freiheitsgrade: zwei Higgs-Dubletts liefern 8 Freiheitsgrade, die Slepton-Komponenten weitere sechs, die Squark-Felder liefern die restlichen 24 reellen Freiheitsgrade. Bei der Symmetriegruppe $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ lassen sich $8+3+1=12$ Freiheitsgrade verwenden. Daher sollte das Potential von 26 reellen Feldern abhängig sein. Wir erkennen, daß wir zwei zusätzliche Freiheitsgrade eliminieren konnten, was nicht zu erwarten war.
Mit Hilfe der Abkürzungen in (7.16) und (7.19) und den eingeführten Phasenvariablen in (7.17) und (7.18) können wir das Potential V_0 in folgender Form angeben:

$$\begin{aligned}
V_0 \;=\;& m_1^2 x_1^2 + m_2^2\left(x_2^2+x_3^2\right) + m_L^2\left(x_4^2+x_5^2\right) + m_E^2 x_6^2 + \sum_{A=1}^{3} m_Q^2\left(x_{7A}^2+x_{8A}^2\right) + m_D^2\left(x_{91}^2+x_{92}^2\right) + m_U^2 x_{10}^2 \\
&+ |y^e|^2\left(\left(x_1^2+x_4^2+x_5^2\right)x_6^2 + x_1^2x_5^2\right) + \sum_{A=1}^{2}\left|y^d\right|^2\left(\left(x_1^2+x_{7A}^2+x_{8A}^2\right)x_{9A}^2 + x_1^2x_{8A}^2\right) + \left|y^d\right|^2 x_1^2 x_{83}^2 \\
&+ |y^u|^2\left(x_2^2+x_3^2+x_{71}^2+x_{81}^2\right)x_{10}^2 + |y^u|^2\sum_{A=1}^{3}\left(x_2^2x_{7A}^2+x_3^2x_{8A}^2\right) \\
&+ 2\left|m_B^2\right| x_1x_2\cos\theta_1 - 2\left|M_e\right| x_1x_5x_6\cos\theta_2 - 2\left|m_e\right| x_3x_4x_6\cos\left(\theta_e+\theta_1-\theta_2-\psi_1\right) \\
&- 2\left|m_e\right| x_2x_5x_6\cos\left(\theta_e+\theta_1-\theta_2\right) + 2\left|M_u\right| x_2x_{71}x_{10}\cos\theta_3 - 2\left|M_u\right| x_3x_{81}x_{10}\cos\left(\theta_3-\psi_{31}\right) \\
&+ 2\left|m_u\right| x_1x_{71}x_{10}\cos\left(\theta_u+\theta_1-\theta_3\right) - \sum_{A=1}^{2} 2\left|M_d\right| x_1x_{8A}x_{9A}\cos\theta_{4A} \\
&- \sum_{A=1}^{2}\left(2\left|m_d\right| x_3x_{7A}x_{9A}\cos\left(\theta_d+\theta_1-\theta_{4A}-\psi_{3A}\right) + 2\left|m_d\right| x_2x_{8A}x_{9A}\cos\left(\theta_d+\theta_1-\theta_{4A}\right)\right) \\
&+ \sum_{A=1}^{2} 2\left|Y^{ed}\right| x_4x_6x_{7A}x_{9A}\cos\left(\theta_d-\theta_e+\theta_2-\theta_{4A}+\psi_1-\psi_{3A}\right) \\
&+ \sum_{A=1}^{2} 2\left|Y^{ed}\right| x_5x_6x_{8A}x_{9A}\cos\left(\theta_d-\theta_e+\theta_2-\theta_{4A}\right) \\
&+ 2\left|Y^{ud}\right| x_1x_3x_{91}x_{10}\cos\left(\theta_u-\theta_d-\theta_3+\theta_{41}+\psi_{31}\right) + \sum_{A=1}^{3}\left(g_2^2-2\left|y^u\right|^2\right) x_2x_3x_{7A}x_{8A}\cos\psi_{3A}
\end{aligned} \tag{7.20}$$

$$
\begin{aligned}
&+ g_2^2 x_2 x_3 x_4 x_5 \cos\psi_1 + \sum_{A=1}^{3} g_2^2 x_4 x_5 x_{7A} x_{8A} \cos\left(\psi_{3A} - \psi_1\right) \\
&+ \left(2\left|y^d\right|^2 + g_3^2\right) x_{71} x_{72} x_{91} x_{92} \cos\left(\theta_{41} - \theta_{42} + \psi_{31} - \psi_{32}\right) \\
&+ \left(2\left|y^d\right|^2 + g_3^2\right) x_{81} x_{82} x_{91} x_{92} \cos\left(\theta_{41} - \theta_{42}\right) + \sum_{A<B} \left(g_2^2 + g_3^2\right) x_{7A} x_{7B} x_{8A} x_{8B} \cos\left(\psi_{3B} - \psi_{3A}\right) \\
&+ \frac{1}{8} g_1^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 2x_6^2 - \frac{1}{3}\sum_{A=1}^{3}\left(x_{7A}^2 + x_{8A}^2\right) - \frac{2}{3}\left(x_{91}^2 + x_{92}^2\right) + \frac{4}{3} x_{10}^2\right)^2 \\
&+ \frac{1}{8} g_2^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + \sum_{A=1}^{3}\left(x_{7A}^2 + x_{8A}^2\right)\right)^2 \\
&+ \frac{1}{2} g_2^2 \left(x_1^2\left(x_3^2 - x_5^2\right) + x_3^2 x_4^2 + x_2^2 x_5^2 + \sum_{A=1}^{3}\left(\left(x_3^2 - x_5^2\right) x_{7A}^2 - \left(x_1^2 - x_2^2 + x_4^2\right) x_{8A}^2\right)\right) \\
&+ \frac{1}{8} g_3^2 \left(x_{71}^2 - x_{72}^2 + x_{81}^2 - x_{82}^2 + x_{91}^2 - x_{92}^2 + x_{10}^2\right)^2 + \frac{1}{2} g_3^2 \sum_{A<B}\left(x_{7A}^2 x_{7B}^2 + x_{8A}^2 x_{8B}^2\right) \\
&+ \frac{1}{24} g_3^2 \left(x_{71}^2 + x_{72}^2 - 2x_{73}^2 + x_{81}^2 + x_{82}^2 - 2x_{83}^2 + x_{91}^2 + x_{92}^2 + x_{10}^2\right)^2 + \frac{1}{2} g_3^2 x_{91}^2 x_{92}^2
\end{aligned}
$$

mit den eingeführten Parametern

$$
\begin{array}{lrclrclrcl}
 & g_1^2 & := & g_{U(1)}^2\,, & g_2^2 & := & g_{SU(2)}^2\,, & g_3^2 & := & g_{SU(3)}^2\,, \\
 & m_1^2 & := & m_{H_1}^2 + |\mu|^2\,, & m_2^2 & := & m_{H_2}^2 + |\mu|^2\,, & m_B^2 & := & B\mu\,, \\
(7.21) & m_e & := & y^e\mu\,, & m_u & := & y^u\mu\,, & m_d & := & y^d\mu\,, \\
 & M_e & := & A^e y^e\,, & M_u & := & A^u y^u\,, & M_d & := & A^d y^d\,, \\
 & Y^{eu} & := & y^e y^u\,, & Y^{ed} & := & y^e y^d\,, & Y^{ud} & := & y^u y^d\,.
\end{array}
$$

Den *Feldraum* als Definitionsbereich des Potentials wählen wir zu

(7.22)
$$
\mathcal{F} := \left(\mathbb{R}_0^+\right)^{15} \times \mathbb{R}^9 \subset \mathbb{R}^{24}\,.
$$

Hier entsprechen die ersten 15 Komponenten, die nichtnegativ sind, den Beträgen der Felder, also den Variablen x_1 bis x_6, x_{7A}, x_{8A}, x_{9B} und x_{10} mit $A = 1, 2, 3$ und $B = 1, 2$. Die weiteren neun Dimensionen des Feldraumes stehen für die Phasenvariablen, die in (7.17) und (7.18) definiert sind.

Wir beachten, daß dieser Feldraum verschwindende VEWe für die neutralen Higgs-Komponenten x_1 und x_2 zuläßt. Solche VEW-Konstellationen führen aber nicht zu Massen für alle Fermionen im MSSM, wenn wir uns an die Struktur der Massenterme in (4.12) erinnern. Hier spielt das allerdings keine entscheidende Rolle, denn wir suchen nicht die stationären Punkte dieses Potentials mit einem 24-dimensionalen Feldraum, stellen dafür aber im nächsten Abschnitt die bnu-Bedingungen an die Parameter in V_0 auf.

7.3 Beschränktheit des Potentials nach unten und bnu-Bedingungen

Für das Potential V_0 aus (7.20) suchen wir Richtungen im Feldraum $\mathcal{F}$ aus (7.22), entlang welchen es nach unten unbeschränkt sein könnte. Wir übernehmen alle bnu-Bedingungen aus der Untersuchung des Potentials für Higgs- und Slepton-Felder, denn diese gelten im Unterraum des Feldraumes, in dem die Squark-Felder keine VEWe annehmen, und dürfen deshalb nicht vergessen werden. Sie lauten:

$$\begin{aligned} g_1^2 &> 0\,, \qquad g_2^2 > 0\,, \\ m_1^2 + m_2^2 &> 2\left|m_B^2\right|\,, \\ m_2^2 + m_L^2 &> 0 \end{aligned} \tag{7.23}$$

sowie

$$\text{entweder}\quad \frac{\left|m_B^2\right|^2}{m_2^2+m_L^2} < \left(m_1^2 - m_L^2\right) \qquad \text{oder} \qquad \left(m_1^2 - m_L^2\right) \le \frac{\left|m_B^2\right|^2}{m_2^2+m_L^2} < m_2^2 + m_L^2\,. \tag{7.24}$$

Wir suchen zunächst Richtungen im Feldraum, bei denen nur Squark-Komponenten ungleich Null sind und entlang denen das Potential nach unten unbeschränkt werden könnte. Aus Richtungen mit nur einer Squark-Komponente ungleich Null finden wir die bnu-Bedingung

$$g_3^2 > 0\,. \tag{7.25}$$

Genauso wie die Bedingung der Positivität der Quadrate der beiden anderen Eichgruppenparameter ist diese Forderung nicht neu und nur Bestätigung dieser Tatsache, die aus Gründen der Invarianz unter Supersymmetrie-Transformationen folgt.
Weil alle D-Term-Beiträge zum Potential Terme vierter und somit höchster vorkommender Ordnung sind und nach dieser ersten bnu-Bedingung positive Koeffizienten besitzen, müssen sie entlang potentiellen Richtungen im Feldraum, für die das Potential nach unten unbeschränkt sein könnte, verschwinden. Wir betrachten die Form der D-Terme in den Gleichungen (7.11), (7.12) und (7.14), wo eine hierfür geeignete Darstellung der D-Terme der verschiedenen Eichgruppen gegeben ist (allerdings noch mit Komponenten, die wir aus Symmetriegründen schon eliminieren konnten). Wir erkennen, daß die Beiträge zu den D-Termen zu jeder Eichgruppe aus einer Summe nichtnegativer quadratischer Ausdrücke bestehen. Folglich verschwinden die D-Terme vollständig genau dann, wenn alle diese quadratischen Terme Null sind. Dies liefert zusammenfassend folgende notwendigen Bedingungen an die Komponenten der Superfelder entlang einer interessanten Richtung im Feldraum $\mathcal{F}$:

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 2x_6^2 - \frac{1}{3}\sum_{A=1}^{3}\left(x_{7A}^2 + x_{8A}^2\right) - \frac{2}{3}\left(x_{91}^2 + x_{92}^2\right) + \frac{4}{3}x_{10}^2 = 0\,, \tag{7.26}$$

$$\left|\overline{H_2^+}H_2^0 + \overline{L^0}L^- + \sum_{A=1}^{3}\overline{Q^{A+}}Q_A^-\right| = 0\,, \tag{7.27}$$

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 + \sum_{A=1}^{3}\left(x_{7A}^2 - x_{8A}^2\right) = 0\,, \tag{7.28}$$

$$\left|\overline{Q^{1+}}Q_2^+ + \overline{Q^{1-}}Q_2^- + D^{2+}\overline{D_1^+}\right| = 0\,, \tag{7.29}$$

$$x_{71}^2 - x_{72}^2 + x_{81}^2 - x_{82}^2 + x_{91}^2 - x_{92}^2 + x_{10}^2 = 0\,, \tag{7.30}$$

$$\left|\overline{Q^{1+}}Q_3^+ + \overline{Q^{1-}}Q_3^-\right| = 0\,, \tag{7.31}$$

$$\left|\overline{Q^{2+}}Q_3^+ + \overline{Q^{2-}}Q_3^-\right| = 0\,, \tag{7.32}$$

$$x_{71}^2 + x_{72}^2 - 2x_{73}^2 + x_{81}^2 + x_{82}^2 - 2x_{83}^2 + x_{91}^2 + x_{92}^2 + x_{10}^2 = 0\,. \tag{7.33}$$

Zu beachten ist, daß aus V_F auch Terme vierter Ordnung entstehen können, die einen positiven Koeffizienten besitzen. Entlang einer Richtung im Feldraum, wo diese Terme vierter Ordnung aus V_F nicht verschwinden, kann das Potential nicht nach unten unbeschränkt sein. Um Bedingungen an die Parameter des Modells aus der Forderung der Beschränktheit des Potentials nach unten zu erhalten, müssen diese Terme vierter Ordnung innerhalb der F-Term-Beiträge zum Potential V_0 verschwinden. Unter Beachtung von $H_1^- = D^{3+} = U^{2-} = U^{3-} = 0$ erhalten wir daher aus (7.10) zunächst

$$x_{81}x_{10} = 0 \tag{7.34}$$

und

$$x_1x_5 = x_1x_6 = x_1x_{8A} = x_1x_{92} = x_2x_{10} = 0\,, \tag{7.35}$$

weil andernfalls Terme vierter Ordnung mit positiven Koeffizienten auftreten, die für die Beschränktheit des Potentials nach unten sorgen.
Wenn in den F-Termen entlang einer zu untersuchenden Richtung keine Terme vierter Ordnung auftreten, so verschwinden mit diesen auch alle möglichen Terme dritter Ordnung. Es bleiben quadratische Terme in den F-Termen übrig. Diese zusammen mit den sanften Brechungstermen können bnu-Bedingungen liefern. Aus Richtungen mit $V_D = V_F = 0$ entstehen möglicherweise weitere bnu-Bedingungen. Insgesamt suchen wir Richtungen, entlang denen die D-Terme des Potentials verschwinden und in den F-Termen höchstens quadratische Terme auftreten.

Das Vorgehen hierbei ist wie folgt: weil die Bedingungen (7.29) bis (7.33) und (7.34) nur Squark-Komponenten enthalten, suchen wir zunächst VEW-Konstellationen der Squark-Felder, für die zumindest die D-Terme der $SU(3)$ verschwinden. Unter Beachtung der Bedingungen in (7.35) werden wir diese VEW-Konstellationen (falls nötig) um entsprechend geeignete VEWe für Higgs- und Slepton-Felder ergänzen, um die Bedingungen (7.26) bis (7.28) zu erfüllen. Somit gewährleisten wir, daß alle Richtungen gefunden werden, entlang denen keine Terme vierter Ordnung das Verhalten des Potentials für große VEWe der Felder dominieren können und daß sich aus der Gestalt des Potentials entlang der gefundenen Richtungen bnu-Bedingungen an die Parameter des Modells ergeben, die die Beschränktheit des Potentials nach unten auf dem Feldraum garantieren.

Wir finden, daß VEW-Konstellationen der Squarks mit nur einer nichtverschwindenden Squark-Komponente stets entweder wegen (7.30) oder (7.33) einen Widerspruch liefern und deshalb nicht berücksichtigt werden müssen. Auch Konstellationen mit genau zwei oder sieben Squark-Komponenten ungleich Null erfüllen nicht alle Bedingungen gleichzeitig und scheitern. Der Fall, daß alle neun Squark-Komponenten Werte größer Null annehmen, kann wegen (7.34) keine interessante Richtung im Feldraum liefern.
Aus den Gleichungen (7.29) bis (7.33) und (7.34) finden wir folgende Richtungen im Feldraum mit folgenden Konstellationen für Squark-VEWe ungleich Null:

- mit drei Squark-Feldern:
  - $x_{71}x_{83}x_{92} \neq 0$ mit $x_{71} = x_{83} = x_{92} \neq 0$,
  - $x_{72}x_{83}x_{91} \neq 0$ mit $x_{72} = x_{83} = x_{91} \neq 0$,
  - $x_{72}x_{83}x_{10} \neq 0$ mit $x_{72} = x_{83} = x_{10} \neq 0$,
  - $x_{73}x_{81}x_{92} \neq 0$ mit $x_{73} = x_{81} = x_{92} \neq 0$,
  - $x_{73}x_{82}x_{91} \neq 0$ mit $x_{73} = x_{82} = x_{91} \neq 0$,
  - $x_{73}x_{82}x_{10} \neq 0$ mit $x_{73} = x_{82} = x_{10} \neq 0$,
  - $x_{73}x_{92}x_{10} \neq 0$ mit $x_{73} = x_{92} = x_{10} \neq 0$,
  - $x_{83}x_{92}x_{10} \neq 0$ mit $x_{83} = x_{92} = x_{10} \neq 0$,

- mit vier Squark-Feldern:
  - $x_{71}x_{83}x_{92}x_{10} \neq 0$ mit $x_{83}^2 = x_{92}^2 = x_{71}^2 + x_{10}^2$,
  - $x_{72}x_{83}x_{91}x_{10} \neq 0$ mit $x_{72}^2 = x_{83}^2 = x_{91}^2 + x_{10}^2$,
  - $x_{72}x_{83}x_{92}x_{10} \neq 0$ mit $x_{83}^2 = x_{10}^2 = x_{72}^2 + x_{92}^2$,
  - $x_{73}x_{82}x_{91}x_{10} \neq 0$ mit $x_{73}^2 = x_{82}^2 = x_{91}^2 + x_{10}^2$,
  - $x_{73}x_{82}x_{92}x_{10} \neq 0$ mit $x_{73}^2 = x_{10}^2 = x_{82}^2 + x_{92}^2$,
  - $x_{73}x_{83}x_{92}x_{10} \neq 0$ mit $x_{82}^2 = x_{10}^2 = x_{73}^2 + x_{83}^2$,

- mit fünf Squark-Feldern:
  - $x_{71}x_{73}x_{81}x_{83}x_{92} \neq 0$ mit $\cos(\psi_{33} - \psi_{31}) = -1$ und
    $$x_{81} = x_{73}\,, \quad x_{83} = x_{71}\,, \quad x_{92}^2 = x_{71}^2 + x_{73}^2\,,$$
  - $x_{71}x_{72}x_{83}x_{91}x_{92} \neq 0$ mit $\cos(\theta_{42} - \theta_{41} + \psi_{32} - \psi_{31}) = -1$ und
    $$x_{91} = x_{72}\,, \quad x_{92} = x_{71}\,, \quad x_{83}^2 = x_{71}^2 + x_{72}^2\,,$$

- $x_{72}x_{73}x_{82}x_{83}x_{91} \neq 0$ mit $\cos(\psi_{33} - \psi_{32}) = -1$ und

$$x_{82} = x_{73}\,, \quad x_{83} = x_{72}\,, \quad x_{91}^2 = x_{72}^2 + x_{73}^2\,,$$

- $x_{72}x_{73}x_{82}x_{83}x_{10} \neq 0$ mit $\cos(\psi_{33} - \psi_{32}) = -1$ und

$$x_{82} = x_{73}\,, \quad x_{83} = x_{72}\,, \quad x_{10}^2 = x_{72}^2 + x_{73}^2\,,$$

- $x_{73}x_{81}x_{82}x_{91}x_{92} \neq 0$ mit $\cos(\theta_{42} - \theta_{41}) = -1$ und

$$x_{91} = x_{82}\,, \quad x_{92} = x_{81}\,, \quad x_{73}^2 = x_{81}^2 + x_{82}^2\,,$$

\- mit sechs Squark-Feldern:

- $x_{71}x_{72}x_{83}x_{91}x_{92}x_{10} \neq 0$ mit $\cos(\theta_{42} - \theta_{41} + \psi_{32} - \psi_{31}) = -1$ und

$$x_{82}^2 = x_{71}^2 + x_{91}^2 + x_{10}^2 = x_{72}^2 + x_{92}^2\,, \quad x_{71}x_{72} = x_{91}x_{92}\,,$$

- $x_{72}x_{73}x_{82}x_{83}x_{91}x_{10} \neq 0$ mit $\cos(\psi_{33} - \psi_{32}) = -1$ und

$$x_{82} = x_{73}\,, \quad x_{83} = x_{72}\,, \quad x_{91}^2 + x_{10}^2 = x_{72}^2 + x_{73}^2\,,$$

- $x_{72}x_{73}x_{82}x_{83}x_{92}x_{10} \neq 0$ mit $\cos(\psi_{33} - \psi_{32}) = -1$ und

$$x_{10}^2 = x_{72}^2 + x_{82}^2 + x_{92}^2 = x_{73}^2 + x_{83}^2\,, \quad x_{72}x_{73} = x_{82}x_{83}\,,$$

\- mit acht Squark-Feldern: $x_{71}x_{72}x_{73}x_{81}x_{82}x_{83}x_{91}x_{92} \neq 0$ mit

$$x_{71}x_{73} = x_{81}x_{83}\,, \qquad x_{72}x_{73} = x_{82}x_{83}\,,$$

$$x_{91}x_{92} = x_{71}x_{72} + x_{81}x_{82}\,,$$

$$x_{71}^2 + x_{81}^2 + x_{91}^2 = x_{72}^2 + x_{82}^2 + x_{92}^2 = x_{73}^2 + x_{83}^2\,,$$

$$\cos(\psi_{32} - \psi_{31}) = 1\,, \qquad \cos(\psi_{33} - \psi_{31}) = -1\,,$$

$$\cos(\psi_{33} - \psi_{32}) = -1\,, \qquad \cos(\theta_{42} - \theta_{41}) = -1\,.$$

Alle Kombinationen zusammen mit den zusätzlichen Bedingungen an die Phasen der Komponenten erfüllen die Bedingungen, in denen nur Squark-Komponenten auftreten. Es ist leicht festzustellen, daß die anderen Bedingungen (7.26), (7.27), (7.28) und (7.35) für verschwindende VEWe der Higgs- und Slepton-Felder nur von den folgenden Konstellationen erfüllt werden:

- $x_{72}x_{83}x_{91}x_{10} \neq 0$ mit $x_{10}^2 = 2x_{91}^2$ und $x_{72}^2 = x_{83}^2 = 3x_{91}^2$,
- $x_{73}x_{82}x_{91}x_{10} \neq 0$ mit $x_{10}^2 = 2x_{91}^2$ und $x_{73}^2 = x_{82}^2 = 3x_{91}^2$,
- $x_{72}x_{73}x_{82}x_{83}x_{91}x_{10} \neq 0$ mit $x_{82} = x_{73},\ x_{83} = x_{72},\ x_{10}^2 = 2x_{91}^2$ und

$$x_{91}^2 = \frac{1}{3}\left(x_{72}^2 + x_{73}^2\right) , \qquad \cos(\psi_{33} - \psi_{32}) = -1\,.$$

Diese drei Richtungen im Feldraum liefern die folgende bnu-Bedingung, in der nur die sanften Massenparameter der Squark-Felder auftreten:

$$6\,m_Q^2 + m_D^2 + 2\,m_U^2 \;>\; 0\,. \tag{7.36}$$

Um im Feldraum weitere Richtungen des Potentials V_0 aus (7.20) zu erhalten, entlang denen die Beschränktheit des Potentials nach unten nicht offensichtlich ist (und nicht nur diejenigen im Unterraum des Feldraumes, in dem alle Squark-Komponenten keinen VEW besitzen), sind VEWe sowohl für Squark- als auch für Higgs- oder Lepton-Komponenten erforderlich.
Gemäß dem obig geschilderten Vorgehen werden wir die verschiedenen Richtungen durch geeignete VEWe für Higgs- und Slepton-Felder ergänzen und hieraus die bnu-Bedingungen finden. Wir beachten, wie oben erwähnt, insbesondere die Bedingungen (7.34) und (7.35) und finden folgende Richtungen (entlang denen die F-Terme des Potentials alle Null sind):

- mit drei Squark-Komponenten:

1) $x_6x_{72}x_{83}x_{10} \neq 0$ mit $x_{72} = x_{83} = x_{10} = \sqrt{3}\,x_6,$

2) $x_6x_{73}x_{82}x_{10} \neq 0$ mit $x_{73} = x_{82} = x_{10} = \sqrt{3}\,x_6,$

- mit vier Squark-Komponenten:

3) $x_6x_{72}x_{83}x_{91}x_{10} \neq 0$ mit $x_{10}^2 = 3x_6^2 + 2x_{91}^2$ und $x_{72}^2 = x_{83}^2 = 3\left(x_6^2 + x_{91}^2\right),$

4) $x_4x_6x_{72}x_{83}x_{92}x_{10} \neq 0$ falls $|y^e|^2 < 3\,|y^d|^2$. Dann ist

$$x_4^2 \;=\; x_{92}^2 \;=\; \frac{1}{2}\left(3\,\frac{|y^d|^2}{|y^e|^2} - 1\right)x_{72}^2\,, \quad x_{83}^2 \;=\; x_{10}^2 \;=\; \frac{1}{2}\left(3\,\frac{|y^d|^2}{|y^e|^2} + 1\right)x_{72}^2$$

und

$$x_6^2 \;=\; \frac{|y^d|^2}{|y^e|^2}\,x_{72}^2\,, \qquad \cos(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{42} + \psi_1 - \psi_{32}) \;=\; -1\,,$$

5) $x_6x_{73}x_{82}x_{91}x_{10} \neq 0$ mit $x_{91}^2 = \frac{1}{2}\left(3x_6^2 + x_{10}^2\right)$ und $x_{73}^2 = x_{82}^2 = \frac{3}{2}\left(x_6^2 + x_{10}^2\right),$

6) $x_5x_6x_{73}x_{82}x_{92}x_{10} \neq 0$ falls $|y^e|^2 < 3\,|y^d|^2$. Dann ist

$$x_5^2 \;=\; x_{92}^2 \;=\; \frac{1}{2}\left(3\,\frac{|y^d|^2}{|y^e|^2} - 1\right)x_{82}^2\,, \quad x_{73}^2 \;=\; x_{10}^2 \;=\; \frac{1}{2}\left(3\,\frac{|y^d|^2}{|y^e|^2} + 1\right)x_{82}^2$$

und

$$x_6^2 \;=\; \frac{|y^d|^2}{|y^e|^2}\, x_{82}^2\,, \qquad \cos(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{42}) \;=\; -1\,,$$

- mit fünf Squark-Komponenten:

7) $x_6 x_{72} x_{73} x_{82} x_{83} x_{10} \neq 0$ mit $x_{73} = x_{82},\; x_{83} = x_{72}$ und

$$x_{10}^2 \;=\; 3x_6^2 \;=\; x_{72}^2 + x_{73}^2\,, \qquad \cos(\psi_{33} - \psi_{32}) \;=\; -1\,,$$

- mit sechs Squark-Komponenten:

8) $x_6 x_{72} x_{73} x_{82} x_{83} x_{91} x_{10} \neq 0$ mit $x_{82} = x_{73},\; x_{83} = x_{72}$ und

$$x_{72}^2 + x_{82}^2 \;=\; 3\left(x_6^2 + x_{91}^2\right) \qquad \text{und} \qquad x_{10}^2 \;=\; 3x_6^2 + 2x_{91}^2$$

sowie

$$\cos(\psi_{33} - \psi_{32}) \;=\; -1\,.$$

9) $x_4 x_5 x_6 x_{72} x_{73} x_{82} x_{83} x_{92} x_{10} \neq 0$ falls $|y^e|^2 < 3\left|y^d\right|^2$. Dann ist

$$x_4^2 \;=\; \frac{1}{2}\left(3\,\frac{|y^d|^2}{|y^e|^2} - 1\right) x_{72}^2\,, \qquad x_5^2 \;=\; \frac{1}{2}\left(3\,\frac{|y^d|^2}{|y^e|^2} - 1\right) x_{82}^2\,,$$

$$x_{73}^2 \;=\; \frac{1}{2}\left(3\,\frac{|y^d|^2}{|y^e|^2} + 1\right) x_{82}^2\,, \qquad x_{83}^2 \;=\; \frac{1}{2}\left(3\,\frac{|y^d|^2}{|y^e|^2} + 1\right) x_{72}^2\,,$$

$$x_6^2 \;=\; \frac{|y^d|^2}{|y^e|^2}\left(x_{72}^2 + x_{82}^2\right)\,, \qquad x_{92}^2 \;=\; \frac{1}{2}\left(3\,\frac{|y^d|^2}{|y^e|^2} - 1\right)\left(x_{72}^2 + x_{82}^2\right)$$

sowie

$$x_{10}^2 \;=\; \frac{1}{2}\left(3\,\frac{|y^d|^2}{|y^e|^2} + 1\right)\left(x_{72}^2 + x_{82}^2\right)$$

und

$$\cos(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{42}) \;=\; \cos(\psi_{33} - \psi_{32}) \;=\; -1\,, \qquad \cos(\psi_{32} - \psi_1) \;=\; 1\,.$$

Alle anderen Richtungen, die die D-Terme der $SU(3)$ verschwinden lassen, können nicht mit VEWen für Higgs- und Slepton-Felder ergänzt werden, so daß alle Terme vierter Ordnung im Potential Null werden. Die aufgelisteten Richtungen sind die einzig möglichen, entlang denen alle Terme vierter Ordnung in V_0 verschwinden.
Entlang diesen Richtungen[1] verschwinden neben den D-Termen auch die F-Term-Beiträge komplett. Das Potential entlang dieser Richtungen ist vollständig durch Beiträge der sanften Brechungsterme gegeben.

[1] Die Richtung 9) wurde von W. Lang gefunden

Wir stellen die Bedingungen zusammen, die sich aus der Forderung der Beschränktheit des Potentials nach unten entlang dieser gefundenen Richtungen ergeben:
Aus den ersten beiden Richtungen sowie den Richtungen 3) und 7) im Feldraum erhalten wir eine dritte bnu-Bedingung in der Form

$$m_E^2 + 6\,m_Q^2 + 3\,m_U^2 \;>\; 0\,. \tag{7.37}$$

Aus Richtung 5) folgt die weitere bnu-Bedingung

$$2\,m_E^2 + 6\,m_Q^2 + 3\,m_D^2 \;>\; 0\,. \tag{7.38}$$

Um das Potential entlang den Richtungen 4), 6) und 9) nach unten zu beschränken, fordern wir im Fall $|y^e|^2 < 3\,|y^d|^2$

$$-m_L^2 + 3\,m_Q^2 - m_D^2 + m_U^2 + \frac{|y^d|^2}{|y^e|^2}\left(3\,m_L^2 + 2\,m_E^2 + 3\,m_Q^2 + 3\,m_D^2 + 3\,m_U^2\right) \;>\; 0 \tag{7.39}$$

Schließlich erhalten wir aus Richtung 8) erneut die bnu-Bedingungen (7.36) und (7.37), also keine neue Information.

Die Gesamtheit der bnu-Bedingungen an die Parameter des Potentials im Fall einer Generation und Higgs-, Slepton- und Squark-Feldern ist auf die Gleichungen (7.23), (7.24), (7.25), (7.36), (7.37), (7.38) und (7.39) verteilt.

Die Analyse der Richtungen im Feldraum des Potentials V_0 aus (7.20), entlang denen die Terme vierter Ordnung aus den F- und D-Term-Beiträgen zu V_0 verschwinden, ergibt, daß das Potential dort ausschließlich durch die sanften Terme bestimmt ist, weil auch die quadratischen Beiträge der F-Terme verschwinden. Allerdings treten von den sanften Termen nur die sanften Massenterme auf. Dies verwundert zunächst, denn man sollte doch annehmen, daß gerade der bilineare μ-Term und die trilinearen Terme in V_{sanft} die entscheidenden negativen Beiträge liefern können, die diese interessanten Richtungen im Feldraum des Potentials ausmachen. Genau der μ-Term und diese trilinearen Terme verschwinden sämtlich entlang der gefundenen Richtungen, entlang denen das Potential nach unten unbeschränkt sein könnte.
Folglich müssen wir genauer überlegen: entlang dieser Richtungen im Feldraum, längs der das Potential prinzipiell nach unten unbeschränkt sein könnte, verschwinden die Beiträge vierter Ordnung in den F-Termen. Manche davon entstehen durch partielle Ableitungen der niedrigsten Komponente des Superpotentials W nach den Komponenten von Singlett-Superfeldern wie $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}^A$ und $\mathbf{U}^A$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial E^+}\,W|_{\theta=\bar\theta=0}\right|^2 &= |y^e|^2\,\left|L^0 H_1^- - L^- H_1^0\right|^2\,,\\
\left|\frac{\partial}{\partial U^-}\,W|_{\theta=\bar\theta=0}\right|^2 &= |y^u|^2\,\left|Q_A^+ H_2^0 - Q_A^- H_2^+\right|^2\,,\\
\left|\frac{\partial}{\partial D^+}\,W|_{\theta=\bar\theta=0}\right|^2 &= |y^d|^2\,\left|Q_A^+ H_1^- - Q_A^- H_1^0\right|^2\,.
\end{aligned}$$

Sind diese drei Terme aber Null, dann liefern auch die trilinearen Terme in V_{sanft} keinen Beitrag, denn diese sind genau von der Form

$$A^e \left(\frac{\partial W}{\partial E^+}\right) E^+ + A^u \left(\frac{\partial W}{\partial U^-}\right) U^- + A^d \left(\frac{\partial W}{\partial D^+}\right) D^+ .$$

Damit bleiben von den sanften Termen entlang solcher Richtungen nur die sanften Massenterme übrig. Anzumerken ist, daß diese Tatsache ganz entscheidend darauf beruht, daß hier nur eine Generation betrachtet wurde. Im allgemeinen Fall mehrerer Teilchengenerationen und vor allem nichtdiagonaler trilinearer Parameter A^e_{ij}, A^u_{ij} und A^d_{ij} gilt dies nicht mehr: obwohl alle F-Terme verschwinden, sind die entsprechenden sanft brechenden Terme nicht notwendigerweise Null, weil die trilinearen Parameter zwischen den einzelnen Generationen mischen können. Deshalb ist zu erwarten, daß im Fall mehrerer Teilchengenerationen die bnu-Bedingungen ein deutlich anderes Aussehen erlangen können als im Fall einer Generation und möglicherweise auch die trilinearen Parameter betreffen.

7.4 Zusätzliche Bedingungen für das Standard-Vakuum

Für das Potential für Higgs-, Lepton- und Quark-Superfelder werden wir nicht alle stationären Punkte bestimmen, um aus ihnen das globale Minimum von V_0 aus (7.20) zu erhalten. Aber wir wollen uns mit dem stationären Punkt beschäftigen, für den $x_1 x_2 \neq 0$ die einzigen Felder mit nichtverschwindenden VEWen sind.
Daß dieser Punkt im ganzen Feldraum (7.22) als stationärer Punkt existiert, ist klar, denn von allen Stationaritätsbedingungen verwenden wir nur diejenigen, die auch schon im reinen Higgs-Fall diesen Punkt als Lösung hatten; das sind (5.18), (5.19) und (5.20). Der stationäre Punkt existiert, falls

$$m_1^2 m_2^2 - \left|m_B^2\right|^2 \;<\; 0\,, \tag{7.40}$$

und ist durch

$$\begin{aligned} x_1^2 &= 4g^{-2}\left(1-z^2\right)^{-1}\left(\left|m_B^2\right| z - m_1^2\right) , \\ x_2^2 &= z^2\, x_1^2 , \\ \cos\theta_1 &= -1 \end{aligned}$$

gegeben mit

$$z^2 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{|m_B^2|}\, z + 1 \;=\; 0\,.$$

Es gelten die folgenden Einschränkungen an z:

$$\frac{m_1^2}{|m_B^2|} \;<\; z \;<\; 1 \qquad \text{oder} \qquad 1 \;<\; z \;<\; \frac{m_1^2}{|m_B^2|}$$

Abhängig vom Größenverhältnis der Massenparameter m_1^2 und m_2^2 erhalten wir

$$
(7.41)\qquad
\begin{aligned}
m_1^2 > m_2^2 \quad &\Longrightarrow \quad z = \left(2\left|m_B^2\right|\right)^{-1}\left(m_1^2 + m_2^2 + \sqrt{\left(m_1^2+m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\right)\,,\\
m_2^2 > m_1^2 \quad &\Longrightarrow \quad z = \left(2\left|m_B^2\right|\right)^{-1}\left(m_1^2 + m_2^2 - \sqrt{\left(m_1^2+m_2^2\right)^2 - 4\left|m_B^2\right|^2}\right)
\end{aligned}
$$

Im letzten Kapitel hatten wir durch Hinzunahme der Sleptonfelder mit den Ungleichungen (6.38), (6.39) und (6.40) weitere notwendige Bedingungen dafür gefunden, daß der stationäre Punkt des reinen Higgs-Falles, der das Standard-Vakuum liefert, ein lokales Minimum im Feldraum aus (6.11) darstellt. In diesem Kapitel haben wir den Feldraum unter Berücksichtigung der Squark-Komponenten noch einmal erweitert. Deshalb untersuchen wir hier nur noch, ob sich im Vergleich zu den Bedingungen in Kapitel 6 zusätzliche Einschränkungen an die Parameter des Potentials ergeben, wenn wir fordern, daß das Standard-Vakuum auch im Feldraum $\mathcal{F}$ aus (7.22) ein lokales Minimum liefern soll.

Wir finden im Squark-Sektor der Hesse-Matrix, ausgewertet am stationären Punkt, einige Einträge ungleich Null gibt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{71})^2} = \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{72})^2} = \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{73})^2} &= 2m_Q^2 + 2\left|y^u\right|^2 x_2^2 + \left(\frac{1}{2}\,g_2^2 - \frac{1}{6}\,g_1^2\right)\left(x_1^2 - x_2^2\right)\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_{71}\,\partial x_{10}} &= 2\left|m_u\right| x_1 \cos\left(\theta_u + \theta_1 - \theta_3\right) + 2\left|M_u\right| x_2 \cos\theta_3\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{81})^2} = \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{82})^2} = \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{83})^2} &= 2m_Q^2 + 2\left|y^d\right|^2 x_1^2 - \left(\frac{1}{2}\,g_2^2 + \frac{1}{6}\,g_1^2\right)\left(x_1^2 - x_2^2\right)\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_{81}\,\partial x_{91}} &= -2\left|M_d\right| x_1 \cos\theta_{41} - 2\left|m_d\right| x_2 \cos\left(\theta_d + \theta_1 - \theta_{41}\right)\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_{82}\,\partial x_{92}} &= -2\left|M_d\right| x_1 \cos\theta_{42} - 2\left|m_d\right| x_2 \cos\left(\theta_d + \theta_1 - \theta_{42}\right)\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{91})^2} = \frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{92})^2} &= 2m_D^2 + 2\left|y^d\right|^2 x_1^2 - \frac{1}{3}\,g_1^2\left(x_1^2 - x_2^2\right)\,,\\
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{10})^2} &= 2m_U^2 + 2\left|y^u\right|^2 x_2^2 + \frac{2}{3}\,g_1^2\left(x_1^2 - x_2^2\right)
\end{aligned}
$$

Hieraus ergeben sich weitere notwendige Bedingungen dafür, daß dieser stationäre Punkt wirklich ein lokales Minimum des Potentials V_0 im ganzen Feldraum (7.22) ist:

$$
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{71})^2} \;\geq\; 0\,,
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{81})^2} &\geq 0\,, \\
\left(\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{71})^2}\right)\left(\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{10})^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_{71}\,\partial x_{10}}\right)^2 &\geq 0\,, \\
\left(\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{81})^2}\right)\left(\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{91})^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_{81}\,\partial x_{91}}\right)^2 &\geq 0\,, \\
\left(\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{82})^2}\right)\left(\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{92})^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_{82}\,\partial x_{92}}\right)^2 &\geq 0\,.
\end{aligned}
$$

Unter Berücksichtigung der oben angegebenen Werte der Variablen am stationären Punkt erhalten wir hieraus die folgenden vier Ungleichungen mit $A = 1, 2$:

$$
m_Q^2\, g^2 + \left(\left|m_B^2\right| z - m_1^2\right) \left(4\, |y^u|^2\; z^2 \left(1 - z^2\right)^{-1} + g_2^2 - \frac{1}{3}\, g_1^2\right) \;\geq\; 0\,, \tag{7.42}
$$

$$
m_Q^2\, g^2 + \left(\left|m_B^2\right| z - m_1^2\right) \left(4\, \left|y^d\right|^2 \left(1 - z^2\right)^{-1} - g_2^2 - \frac{1}{3}\, g_1^2\right) \;\geq\; 0\,, \tag{7.43}
$$

$$
\begin{aligned}
& m_Q^2\, m_U^2\, g^4 \left(1 - z^2\right)^2 + 4\, |y^u|^2\; g^2\, z^2 \left(1 - z^2\right) \left(m_Q^2 + m_U^2\right) \left(\left|m_B^2\right| z - m_1^2\right) \\
& + g^2 \left(1 - z^2\right) \left(\left|m_B^2\right| z - m_1^1\right) \left\{\left(-g_2^2 - \frac{1}{3}\, g_1^2\right) m_U^2 + \frac{4}{3}\, g_1^2 m_Q^2\right\} \\
& + \left\{16\, |y^u|^4\; z^4 + 4\, |y^u|^2\; g^2\, z^2 \left(1 - z^2\right) + \frac{4}{3}\, g_1^2 \left(g_2^2 - \frac{1}{3}\, g_1^2\right) \left(1 - z^2\right)^2\right\} \left(\left|m_B^2\right| z - m_1^2\right)^2 \\
& - 4 g^2 \left(1 - z^2\right) \left(\left|m_B^2\right| z - m_1^2\right) \left(|M_u|\, z \cos\theta_3 - |m_u| \cos\left(\theta_u - \theta_3\right)\right)^2 \;\geq\; 0\,,
\end{aligned} \tag{7.44}
$$

$$
\begin{aligned}
& m_Q^2\, m_U^2\, g^4 \left(1 - z^2\right)^2 + 4\, \left|y^d\right|^2\; g^2 \left(1 - z^2\right) \left(m_Q^2 + m_U^2\right) \left(\left|m_B^2\right| z - m_1^2\right) \\
& + g^2 \left(1 - z^2\right) \left(\left|m_B^2\right| z - m_1^2\right) \left\{\left(-g_2^2 - \frac{1}{3}\, g_1^2\right) m_D^2 - \frac{2}{3}\, g_1^2 m_Q^2\right\} \\
& + \left\{16\, \left|y^d\right|^4 + 4\, \left|y^d\right|^2 \left(1 - z^2\right) \left(g_2^2 - g_1^2\right) + \frac{2}{3}\, g_1^2 \left(g_2^2 - \frac{1}{3}\, g_1^2\right) \left(1 - z^2\right)^2\right\} \left(\left|m_B^2\right| z - m_1^2\right)^2 \\
& - 4 g^2 \left(1 - z^2\right) \left(\left|m_B^2\right| z - m_1^2\right) \left(|M_d|\, z \cos\theta_{4A} - |m_d| \cos\left(\theta_d - \theta_{4A}\right)\right)^2 \;\geq\; 0\,.
\end{aligned} \tag{7.45}
$$

Ersetzt man in diesen Ungleichungen $\geq$ jeweils durch $>$, so ergeben sich hieraus hinreichende Bedingungen dafür, daß der stationäre Punkt des reinen Higgs-Falles ein lokales Minimum im gesamten Feldraum $\mathcal{F}$ aus (7.22) darstellt.

Zusätzlich zu (7.40) und (6.38), (6.39) und (6.40) stellen diese Ungleichungen notwendige Bedingungen dafür dar, daß der stationäre Punkt des Standard-Vakuums auch im erweiterten Feldraum (7.22) das globale Minimum liefert. Wie zu erkennen ist, tauchen durch $|M_d|$ und $|M_u|$ in (7.44) und (7.45) die trilinearen Parameter A^d und A^u auf; diese Ungleichungen liefern Einschränkungen an den Wertebereich dieser Parameter in den sanften Brechungstermen im Fall einer Teilchengeneration.

Kapitel 8

Zusammenfassung

Viele theoretische Argumente sprechen dafür, daß Supersymmetrie eine zentrale Rolle in Modellen bei sehr großen Energien spielt. Das MSSM stellt eine theoretisch interessante Erweiterung des so erfolgreichen SM mit sanft gebrochener Supersymmetrie bei höheren Energien dar.
In dieser Arbeit haben wir das Potential des MSSM untersucht, welches aus allen Termen in der Lagrange-Dichte besteht, die nur skalare Felder enthalten, aber keine kinetischen Terme darstellen. Da im Rahmen der Supersymmetrie jedes Fermion einen skalaren Superpartner besitzt, treten im MSSM viele skalare Teilchen auf, und das Potential enthält viele verschiedene Beiträge der einzelnen Skalare. Eine konkrete Form des Potentials erhält man durch Eliminierung der Hilfsfelder aus der Lagrange-Dichte des MSSM, die sowohl in den Vektorsuperfeldern als auch den chiralen Superfeldern auftreten. Es ergeben sich drei verschiedene Beiträge zum Potential: die sogenannten F-Terme, die D-Terme und die Beiträge der sanften Brechungsterme. Die ersten beiden sind positiv definit, und im Falle ungebrochener Supersymmetrie (bei Abwesenheit der sanften Brechungsterme) ist das Potential nichtnegativ und genau dann gleich Null, wenn alle darin auftretenden skalaren Felder einen verschwindenden VEW besitzen. Diese symmetrische Situation wird durch die die Supersymmetrie sanft brechenden Terme zerstört, denn diese können negative Beiträge zum Potential liefern.
Das globale Minimum des Potentials legt den Zustand kleinstmöglicher Energie, den Vakuumzustand fest. Eine Minimalforderung an ein Potential einer physikalischen Theorie ist die Beschränktheit nach unten, weil dieser Vakuumzustand sonst nicht existiert. Im Fall des Potentials des MSSM mit dessen vielen skalaren Feldern und noch zahlreicheren Parametern ist aufgrund der Existenz der sanften Brechungsterme nicht offensichtlich, daß diese Beschränktheit nach unten für alle VEW-Konstellationen der skalaren Felder garantiert ist. Die Forderung der Existenz eines globalen Minimums des Potentials liefert Einschränkungen an die Parameter, sogenannte bnu-Bedingungen.
Sollten im globalen Minimum Felder einen nichtverschwindenden VEW annehmen, die nichttrivial unter einer inneren Symmetriegruppe transformieren (zum Beispiel elektrisch geladene Felder), wird die entsprechende Symmetrie spontan gebrochen. Im Fall der Eichgruppe $SU(2) \times U(1)$ der elektroschwachen Wechselwirkung ist eine spontane Symmetriebrechung in einem realistischen Modell zur Beschreibung der Elementarteilchen vonnöten, denn mit $W^{\pm}$ und Z^0 existieren massive Eichbosonen dieser Eichgruppe. Im Fall einer ungebrochenen Eichsymmetrie sind die Eichbosonen masselos, wie das Photon oder die Gluonen. Eine spontane Brechung weiterer Symmetrien außer der elektroschwachen Eichsymmetrie, wie zum Beispiel der elektrischen Ladung oder der Leptonenzahl, ist aber aus phänomenologischen Gründen nicht erwünscht, und es gibt auch keine experimentellen Hinweise dafür. Weil im Potential des MSSM jedoch so viele skalare Felder auftreten und zum Beispiel sehr wenige davon elektrisch ungeladen sind, ist ohne eine eingehende Untersuchung der Minimumstruktur des Potentials nicht davon auszugehen, daß im globalen Minimum nur elektrisch neutrale Felder VEWe ungleich Null annehmen. Weiterhin ist zu bedenken, daß genau wie im Standard Modell auch Fermion-Massen aufgrund nichtverschwindender VEWe der beiden neutralen Higgs-Skalare entstehen.
Aus der konservativen Forderung, daß das Potential keine lokalen Minima besitzen darf, die weitere Symmetrien spontan brechen würden, finden sich in der Literatur sogenannte ccb-Bedingungen für die Parameter

des Potentials. Alternativen zu diesem konservativen Vorgehen wurden entwickelt, die besagen, daß das Universum sich auch in einem metastabilen Vakuum befinden könnte und daß nicht allein das globale Minimum des Potentials den Vakuumzustand festlegt. Diese Überlegungen sind zumeist kosmologischer Natur und wurden hier nicht berücksichtigt.
In der Literatur beschränkt sich eine Untersuchung des Potentials des MSSM fast ausschließlich auf den Higgs-Sektor. In diesem eingeschränkten Szenario findet man das Standard-Vakuum, eine Konstellation von VEWen für die ungeladenen und verschwindenden VEWen für die geladenen Higgs-Bosonen. Ebenso finden sich bekannte bnu-Bedingungen an die Parameter im Higgs-Sektor. Das globale Minimum des Potentials sollte jedoch unter Berücksichtigung aller Skalarfelder des MSSM gefunden werden, und nicht nur in einem Unterbereich des Feldraumes. Die Komplexität des Potentials im allgemeinen Fall läßt eine exakte Analyse allerdings nicht zu.

In der vorliegenden Diplomarbeit haben wir einerseits die einfache Analyse des Potentials im Higgs-Sektor des MSSM durchgeführt und die in der Literatur auftretenden Bedingungen

$$m_1^2 + m_2^2 \; > \; 2\left|m_B^2\right| \qquad \text{und} \qquad m_1^2 m_2^2 \; < \left|m_B^2\right|^2$$

als bnu-Bedingung und notwendige Bedingung für die Existenz des Standard-Vakuums bestätigt. Sollte das Standard-Vakuum nicht existieren, so liefert die Konstellation verschwindender VEWe für alle Skalarfelder das globale Minimum des Potentials und die elektroschwache Symmetrie wird nicht spontan gebrochen.
Weiterhin haben wir durch Hinzunahme der Sleptonen einer Teilchengeneration das Potential im so erweiterten Feldraum studiert. Es ergeben sich die zusätzlichen bnu-Bedingungen

$$m_2^2 + m_L^2 \; > \; 0$$

sowie

$$\left|m_B^2\right|^2 \; < \; \left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right) \quad \text{oder}$$

$$\left(\left|m_B^2\right|^2 \; \geq \; \left(m_1^2 - m_L^2\right)\left(m_2^2 + m_L^2\right) \quad \text{und} \quad \left|m_B^2\right|^2 \; < \; m_2^2 + m_L^2\right).$$

Hierbei stößt man mit rein analytischen Mitteln bald an Grenzen, so daß wir die Analyse der stationären Punkte und lokalen Minima des Potentials für Higgs- und Slepton-Felder nicht für alle Bereiche des Feldraumes durchführen können. Die Ergebnisse (modulo der nicht untersuchten Unterbereiche des Feldraumes) liefern hier ein anderes Bild als im Higgs-Sektor des MSSM: es gibt Parameterbereiche, in denen das Standard-Vakuum alleiniges lokales Minimum ist und damit das globale Minimum des Potentials liefert. In anderen Parameterbereichen existieren daneben weitere lokale Minima, so daß zusätzliche Bedingungen zu fordern sind, damit das Standard-Vakuum auch in diesen Bereichen das globale Minimum des Potentials liefert. Schließlich existieren Bereiche im Feldraum (zum Beispiel mit $m_1^2 m_2^2 > \left|m_B^2\right|^2$, $m_L^2 < 0$, $m_E^2 < 0$), in denen das Standard-Vakuum kein lokales Minimum des Potentials ist oder dieser stationäre Punkt gar nicht existiert, wohl aber andere lokale Minima auftreten. Bei diesen haben elektrisch geladene Felder (und unter Umständen auch Felder mit Leptonenzahl ungleich Null) nichtverschwindende VEWe. Solche globale Minima würden weitere spontane Symmetriebrechungen zur Folge haben. Durch entsprechend gewählte Bedingungen kann sich die Existenz dieser anderen globalen Minima verhindern lassen.
In jedem Fall ergeben sich durch die Erweiterung des Feldraumes zusätzliche notwendige Bedingungen an die Parameter in V_0, damit der stationäre Punkt des Standard-Vakuums ein lokales Minimum im so erweiterten Feldraum liefern kann. Diese haben wir formuliert.

Im siebten Kapitel haben wir zusätzlich die Squark-Beiträge zum Potential mitberücksichtigt. Erneut beschränkten wir uns auf den Fall einer Teilchengeneration. Es ergeben sich weitere bnu-Bedingungen, die vor allem die sanften Massenparameter für die Squarks enthalten und ihren Wertebereich einschränken:

$$\begin{aligned} 6\,m_Q^2 + m_D^2 + 2\,m_U^2 &> 0\,, \\ m_E^2 + 6\,m_Q^2 + 3\,m_U^2 &> 0\,, \\ 2\,m_E^2 + 6\,m_Q^2 + 3\,m_D^2 &> 0 \end{aligned}$$

und im Fall $|y^e|^2 < 3\,|y^d|^2$ zusätzlich noch

$$-m_L^2 + 3\,m_Q^2 - m_D^2 + m_U^2 + \frac{|y^d|^2}{|y^e|^2}\left(3\,m_L^2 + 2\,m_E^2 + 3\,m_Q^2 + 3\,m_D^2 + 3\,m_U^2\right) > 0\,.$$

Die Forderung, daß das Standard-Vakuum zumindest ein lokales Minimum im gesamten Feldraum darstellt, liefert weitere Bedingungen an die Parameter, die im letzten Abschnitt angegeben wurden.

Betrachtet man das Potential im MSSM nicht nur in Abhängigkeit der VEWe der Higgs-Skalare, sondern exakt mit allen skalaren Feldern als Unabhängigen, so können zusätzliche bnu-Bedingungen an die Parameter formuliert werden. Alle bnu-Bedingungen stellen die Mindestanforderungen an das Potential im MSSM dar. Eine genaue Untersuchung der Minimumstruktur des Potentials im MSSM zeigt, daß keinesfalls gesichert ist, daß das Standard-Vakuum das globale Minimum des (vollständigen) Potentials des MSSM liefert. Um diesen aus phänomenologischen Gründen benötigten Fall eintreten zu lassen, müssen die Parameter des Potentials weitere Bedingungen erfüllen.

Anhang A

Partielle Ableitungen des Potentials im MSSM

Hier im Anhang wollen wir die benötigten partiellen Ableitungen des Potentials des MSSM auflisten. Wir berechnen die Ableitungen separat für die drei Fälle: das Potential nur für Higgs-Skalare, Higgs- und Slepton-Felder und Higgs-, Slepton- und Squark-Felder. In jedem dieser drei Fälle legen wir die vereinfachte Struktur des Potentials V_0 zugrunde, unter Verwendung der Symmetrien und der Einschränkung auf eine Teilchengeneration, gemäß den Formen des Potentials in den Gleichungen (5.9), (6.10) und (7.20).

A.1 Partielle Ableitungen des Potentials im Higgs-Sektor des MSSM

Wir stellen die partiellen Ableitungen des Potentials im Higgs-Sektor des MSSM zusammen. Sie werden sowohl bei der Suche nach stationären Punkten als auch bei der Untersuchung der gefundenen stationären Punkte verwendet.
Die ersten partiellen Ableitungen des Potentials im Higgs-Sektor des MSSM aus (5.9) lauten:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_1} &= 2m_1^2 x_1 + 2\left|m_B^2\right| x_2 \cos\theta + \frac{1}{2} g^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right) x_1 + g_2^2 x_1 x_3^2 \,, \\
\frac{\partial V_0}{\partial x_2} &= 2m_2^2 x_2 + 2\left|m_B^2\right| x_1 \cos\theta - \frac{1}{2} g^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right) x_2 \,, \\
\frac{\partial V_0}{\partial x_3} &= 2m_2^2 x_3 - \frac{1}{2} g^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right) x_3 + g_2^2 x_1^2 x_3 \,, \\
\frac{\partial V_0}{\partial \theta} &= -2\left|m_B^2\right| x_1 x_2 \sin\theta \,.
\end{aligned}
$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind

$$
\frac{\partial^2 V_0}{\left(\partial x_1\right)^2} = 2m_1^2 + \frac{1}{2} g^2 \left(3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right) + g_2^2 x_3^2 \,,
$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_2} &= 2\left|m_B^2\right| \cos\theta - g^2 x_1 x_2 \,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_3} &= \left(2g_2^2 - g^2\right) x_1 x_3 \,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial \theta} &= -\,2\left|m_B^2\right| x_2 \sin\theta \,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\left(\partial x_2\right)^2} &= 2m_2^2 - \frac{1}{2}\, g^2 \left(x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2\right) \,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2 \partial x_3} &= g^2 x_2 x_3 \,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2 \partial \theta} &= -\,2\left|m_B^2\right| x_1 \sin\theta \,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\left(\partial x_3\right)^2} &= 2m_2^2 - \frac{1}{2}\, g^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2\right) + g_2^2 x_1^2 \,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3 \partial \theta} &= 0 \,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\left(\partial \theta\right)^2} &= -\,2\left|m_B^2\right| x_1 x_2 \cos\theta \,.
\end{aligned}$$

A.2 Partielle Ableitungen des Potentials im MSSM für Higgs- und Slepton-Felder

Im folgenden geben wir die ersten partiellen Ableitungen des Potentials (6.10) für Higgs- und Slepton-Felder an:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_1} &= 2m_1^2 x_1 + 2\left|m_B^2\right| x_2 \cos\theta_1 + 2\left|y^e\right|^2 \left(x_5^2 + x_6^2\right) x_1 - 2\left|M_e\right| x_5 x_6 \cos\theta_2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\, g^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2\right) - g_1^2 x_6^2 + g_2^2 \left(x_3^2 - x_5^2\right)\right) x_1 \,, \\
\frac{\partial V_0}{\partial x_2} &= 2m_2^2 x_2 + 2\left|m_B^2\right| x_1 \cos\theta_1 - 2\left|m_e\right| x_5 x_6 \cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right) + g_2^2 x_3 x_4 x_5 \cos\theta_3 \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}\, g^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2\right) - g_1^2 x_6^2 - g_2^2 x_5^2\right) x_2 \,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_3} &= 2m_2^2 x_3 - 2\left|m_e\right| x_4 x_6 \cos\left(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e\right) + g_2^2 x_2 x_4 x_5 \cos\theta_3 \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}\, g^2 \left(x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_4^2+x_5^2\right) - g_1^2 x_6^2 - g_2^2\left(x_1^2+x_4^2\right)\right) x_3\,, \\
\frac{\partial V_0}{\partial x_4} &= 2m_L^2 x_4 + 2\left|y^e\right|^2 x_4 x_6^2 - 2\left|m_e\right| x_3 x_6 \cos\left(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e\right) + g_2^2 x_2 x_3 x_5 \cos\theta_3 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\, g^2 \left(x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_4^2+x_5^2\right) - g_1^2 x_6^2 + g_2^2 x_3^2\right) x_4\,, \\
\frac{\partial V_0}{\partial x_5} &= 2m_L^2 x_5 + 2\left|y^e\right|^2 \left(x_1^2+x_6^2\right) x_5 - 2\left|M_e\right| x_1 x_6 \cos\theta_2 - 2\left|m_e\right| x_2 x_6 \cos\left(\theta_2-\theta_1-\theta_e\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\, g^2 \left(x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_4^2+x_5^2\right) - g_1^2 x_6^2 + g_2^2\left(-x_1^2+x_2^2\right)\right) x_5 \\
&\quad + g_2^2 x_2 x_3 x_4 \cos\theta_3\,, \\
\frac{\partial V_0}{\partial x_6} &= 2m_E^2 x_6 + 2\left|y^e\right|^2 \left(x_1^2+x_4^2+x_5^2\right) x_6 - 2\left|M_e\right| x_1 x_5 \cos\theta_2 \\
&\quad - 2\left|m_e\right| x_3 x_4 \cos\left(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e\right) - 2\left|m_e\right| x_2 x_5 \cos\left(\theta_2-\theta_1-\theta_e\right) \\
&\quad - g_1^2\left(x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_4^2+x_5^2-2x_6^2\right) x_6\,, \\
\frac{\partial V_0}{\partial \theta_1} &= -2\left|m_B^2\right| x_1 x_2 \sin\theta_1 - 2\left|m_e\right| x_3 x_4 x_6 \sin\left(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e\right) \\
&\quad - 2\left|m_e\right| x_2 x_5 x_6 \sin\left(\theta_2-\theta_1-\theta_e\right)\,, \\
\frac{\partial V_0}{\partial \theta_2} &= 2\left|M_e\right| x_1 x_5 x_6 \sin\theta_2 + 2\left|m_e\right| x_3 x_4 x_6 \sin\left(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e\right) \\
&\quad + 2\left|m_e\right| x_2 x_5 x_6 \sin\left(\theta_2-\theta_1-\theta_e\right)\,, \\
\frac{\partial V_0}{\partial \theta_3} &= -g_2^2 x_2 x_3 x_4 x_5 \sin\theta_3 - 2\left|m_e\right| x_3 x_4 x_6 \sin\left(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e\right)\,.
\end{aligned}$$

Die zweiten partiellen Ableitungen des Potentials lauten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{\left(\partial x_1\right)^2} &= 2m_1^2 + 2\left|y^e\right|^2\left(x_5^2+x_6^2\right) + \frac{1}{2}\, g^2\left(3x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_4^2+x_5^2\right) \\
&\quad - g_1^2 x_6^2 + g_2^2\left(x_3^2-x_5^2\right)\,, \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_2} &= 2\left|m_B^2\right| \cos\theta_1 - g^2 x_1 x_2\,,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_3} = \left(2g_2^2 - g^2\right) x_1 x_3 \, ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_4} = g^2 x_1 x_4 \, ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_5} = \left(4\left|y^e\right|^2 + g^2 - 2g_2^2\right) x_1 x_5 - 2\left|M_e\right| x_6 \cos\theta_2 \, ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \partial x_6} = \left(4\left|y^e\right|^2 - 2g_1^2\right) x_1 x_6 - 2\left|M_e\right| x_5 \cos\theta_2 \, ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \, \partial \theta_1} = -\, 2\left|m_B^2\right| x_2 \sin\theta_1 \, ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \, \partial \theta_2} = 2\left|M_e\right| x_5 x_6 \sin\theta_2 \, ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_1 \, \partial \theta_3} = 0 \, ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\left(\partial x_2\right)^2} = 2m_2^2 - \frac{1}{2} g^2 \left(x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2\right) + g_1^2 x_6^2 + g_2^2 x_5^2 \, ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2 \partial x_3} = g^2 x_2 x_3 + g_2^2 x_4 x_5 \cos\theta_3 \, ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2 \partial x_4} = -\, g^2 x_2 x_4 + g_2^2 x_3 x_5 \cos\theta_3 \, ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2 \partial x_5} = \left(2g_2^2 - g^2\right) x_2 x_5 + g_2^2 x_3 x_4 \cos\theta_3 - 2\left|m_e\right| x_6 \cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right) \, ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2 \partial x_6} = 2g_1^2 x_2 x_6 - 2\left|m_e\right| x_5 \cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right) \, ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2 \, \partial \theta_1} = -2\left|m_B^2\right| x_1 \sin\theta_1 - 2\left|m_e\right| x_5 x_6 \sin\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right) \, ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2 \, \partial \theta_2} = 2\left|m_e\right| x_5 x_6 \sin\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right) \, ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_2 \, \partial \theta_3} = -g_2^2 x_3 x_4 x_5 \sin\theta_3 \, ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_3)^2} = 2m_2^2 - \frac{1}{2}\, g^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 + x_4^2 + x_5^2\right) + g_1^2 x_6^2 + g_2^2 \left(x_1^2 + x_4^2\right) \,,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3 \partial x_4} = \left(2g_2^2 - g^2\right) x_3 x_4 + g_2^2 x_2 x_5 \cos\theta_3 - 2\left|m_e\right| x_6 \cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e\right) \,,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3 \partial x_5} = -g^2 x_3 x_5 + g_2^2 x_2 x_4 \cos\theta_3 \,,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3 \partial x_6} = 2g_1^2 x_3 x_6 - 2\left|m_e\right| x_4 \cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e\right) \,,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\, \partial\theta_1} = -2\left|m_e\right| x_4 x_6 \sin\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e\right) \,,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\, \partial\theta_2} = 2\left|m_e\right| x_4 x_6 \sin\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e\right) \,,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_3\, \partial\theta_3} = -g_2^2 x_2 x_4 x_5 \sin\theta_3 - 2\left|m_e\right| x_4 x_6 \sin\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e\right) \,,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_4)^2} = 2m_L^2 + 2\left|y^e\right|^2 x_6^2 + \frac{1}{2}\, g^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 3x_4^2 + x_5^2\right) - g_1^2 x_6^2 + g_2^2 x_3^2 \,,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_4 \partial x_5} = g^2 x_4 x_5 + g_2^2 x_2 x_3 \cos\theta_3 \,,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_4 \partial x_6} = \left(4\left|y^e\right|^2 - 2g_1^2\right) x_4 x_6 - 2\left|m_e\right| x_3 \cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e\right) \,,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_4\, \partial\theta_1} = -2\left|m_e\right| x_3 x_6 \sin\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e\right) \,,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_4\, \partial\theta_2} = 2\left|m_e\right| x_3 x_6 \sin\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e\right) \,,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_4\, \partial\theta_3} = -g_2^2 x_2 x_3 x_5 \sin\theta_3 - 2\left|m_e\right| x_3 x_6 \sin\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_3 - \theta_e\right) \,,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_5)^2} &= 2m_L^2 + 2\left|y^e\right|^2 \left(x_1^2 + x_6^2\right) + \frac{1}{2}\, g^2 \left(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + 3x_5^2\right) \\ &\quad - g_1^2 x_6^2 + g_2^2 \left(x_2^2 - x_1^2\right) \,,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_5 \partial x_6} = \left(4\left|y^e\right|^2 - 2g_1^2\right) x_5 x_6 - 2\left|M_e\right| x_1 \cos\theta_2 - 2\left|m_e\right| x_2 \cos\left(\theta_2 - \theta_1 - \theta_e\right) \,,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_5\,\partial\theta_1} = -2\,|m_e|\,x_2 x_6 \sin(\theta_2-\theta_1-\theta_e)\ ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_5\,\partial\theta_2} = 2\,|M_e|\,x_1 x_6 \sin\theta_2 + 2\,|m_e|\,x_2 x_6 \sin(\theta_2-\theta_1-\theta_e)\ ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_5\,\partial\theta_3} = -g_2^2 x_2 x_3 x_4 \sin\theta_3\ ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_6)^2} = 2m_E^2 + 2\,|y^e|^2\left(x_1^2+x_4^2+x_5^2\right) - g_1^2\left(x_1^2-x_2^2-x_3^2+x_4^2+x_5^2-6x_6^2\right)\ ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_6\,\partial\theta_1} = -2\,|m_e|\,x_3 x_4 \sin(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e) - 2\,|m_e|\,x_2 x_5 \sin(\theta_2-\theta_1-\theta_e)\ ,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_6\,\partial\theta_2} &= 2\,|M_e|\,x_1 x_5 \sin\theta_2 + 2\,|m_e|\,x_3 x_4 \sin(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e)\\ &\quad + 2\,|m_e|\,x_2 x_5 \sin(\theta_2-\theta_1-\theta_e)\ ,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_6\,\partial\theta_3} = -2\,|m_e|\,x_3 x_4 \sin(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e)\ ,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V_0}{(\partial\theta_1)^2} &= -2\,\left|m_B^2\right|\,x_1 x_2 \cos\theta_1 + 2\,|m_e|\,x_3 x_4 x_6 \cos(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e)\\ &\quad + 2\,|m_e|\,x_2 x_5 x_6 \cos(\theta_2-\theta_1-\theta_e)\ ,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial\theta_1\,\partial\theta_2} = -2\,|m_e|\,x_3 x_4 x_6 \cos(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e) - 2\,|m_e|\,x_2 x_5 x_6 \cos(\theta_2-\theta_1-\theta_e)\ ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial\theta_1\,\partial\theta_3} = 2\,|m_e|\,x_3 x_4 x_6 \cos(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e)\ ,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V_0}{(\partial\theta_2)^2} &= 2\,|M_e|\,x_1 x_5 x_6 \cos\theta_2 + 2\,|m_e|\,x_3 x_4 x_6 \cos(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e)\\ &\quad + 2\,|m_e|\,x_2 x_5 x_6 \cos(\theta_2-\theta_1-\theta_e)\ ,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial\theta_2\,\partial\theta_3} = -2\,|m_e|\,x_3 x_4 x_6 \cos(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e)\ ,$$

$$\frac{\partial^2 V_0}{(\partial\theta_3)^2} = -g_2^2 x_2 x_3 x_4 x_5 \cos\theta_3 + 2\,|m_e|\,x_3 x_4 x_6 \cos(\theta_2-\theta_1-\theta_3-\theta_e)\ .$$

A.3 Partielle Ableitungen des Potentials für Higgs-, Slepton- und Squark-Felder

Die ersten partiellen Ableitungen des Potentials aus (7.20) lauten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_1} &= \left(2m_1^2 + 2\left|y^e\right|^2\left(x_5^2+x_6^2\right) + \sum_{A=1}^{2} 2\left|y^d\right|^2\left(x_{8A}^2+x_{9A}^2\right) + 2\left|y^d\right|^2 x_{83}^2\right) x_1 \\
&\quad + 2\left|m_B^2\right| x_2\cos\theta_1 - 2\left|M_e\right| x_5x_6\cos\theta_2 + 2\left|m_u\right| x_{71}x_{10}\cos\left(\theta_u+\theta_1-\theta_3\right) \\
&\quad - \sum_{A=1}^{2} 2\left|M_d\right| x_{8A}x_{9A}\cos\theta_{4A} + 2\left|Y^{ud}\right| x_3x_{91}x_{10}\cos\left(\theta_u-\theta_d-\theta_3+\theta_{41}+\psi_{31}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\,g_1^2\,(I) + \frac{1}{2}\,g_2^2\,(II) + g_2^2\left(x_3^2-x_5^2-\sum_{A=1}^{3} x_{8A}^2\right)\right) x_1\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_2} &= \left(2m_2^2 + 2\left|y^u\right|^2\left(\sum_{A=1}^{3} x_{7A}^2 + x_{10}^2\right)\right) x_2 \\
&\quad + 2\left|m_B^2\right| x_1\cos\theta_1 - 2\left|m_e\right| x_5x_6\cos\left(\theta_e+\theta_1-\theta_2\right) + 2\left|M_u\right| x_{71}x_{10}\cos\theta_3 + g_2^2x_3x_4x_5\cos\psi_1 \\
&\quad - 2\sum_{A=1}^{2}\left|m_d\right| x_{8A}x_{9A}\cos\left(\theta_d+\theta_1-\theta_{4A}\right) + \sum_{A=1}^{3}\left(g_2^2-2\left|y^u\right|^2\right) x_3x_{7A}x_{8A}\cos\psi_{3A} \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}\,g_1^2\,(I) + \frac{1}{2}\,g_2^2\,(II) - g_2^2\left(x_5^2+\sum_{A=1}^{3} x_{8A}\right)\right) x_2\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_3} &= \left(2m_2^2 + 2\left|y^u\right|^2\left(\sum_{A=1}^{3} x_{8A}^2 + x_{10}^2\right)\right) x_3 \\
&\quad - 2\left|m_e\right| x_4x_6\cos\left(\theta_e+\theta_1-\theta_2-\psi_1\right) - 2\left|M_u\right| x_{81}x_{10}\cos\left(\theta_3-\psi_{31}\right) \\
&\quad - 2\sum_{A=1}^{2}\left|m_d\right| x_{7A}x_{9A}\cos\left(\theta_d+\theta_1-\theta_{4A}-\psi_{3A}\right) + g_2^2x_2x_4x_5\cos\psi_1 \\
&\quad + 2\left|Y^{ud}\right| x_1x_{91}x_{10}\cos\left(\theta_u-\theta_d-\theta_3+\theta_{41}+\psi_{31}\right) + \sum_{A=1}^{3}\left(g_2^2-2\left|y^u\right|^2\right) x_2x_{7A}x_{8A}\cos\psi_{3A} \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}\,g_1^2\,(I) + \frac{1}{2}\,g_2^2\,(II) - g_2^2\left(x_1^2+x_4^2+\sum_{A=1}^{3} x_{7A}^2\right)\right) x_3\,,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_4} &= \left(2m_L^2 + 2\left|y^e\right|^2 x_6^2\right) x_4 \\
&- 2\left|m_e\right| x_3 x_6 \cos\left(\theta_e + \theta_1 - \theta_2 - \psi_1\right) + \sum_{A=1}^{3} g_2^2 x_5 x_{7A} x_{8A} \cos\left(\psi_{3A} - \psi_1\right) \\
&+ \sum_{A=1}^{2} 2\left|Y^{ed}\right| x_6 x_{7A} x_{9A} \cos\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{4A} + \psi_1 - \psi_{3A}\right) + g_2^2 x_2 x_3 x_5 \cos\psi_1 \\
&+ \left(\frac{1}{2}\, g_1^2\, (I) + \frac{1}{2}\, g_2^2\, (II) + g_2^2 \left(x_3^2 - \sum_{A=1}^{3} x_{8A}^2\right)\right) x_4 \,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_5} &= \left(2m_L^2 + 2\left|y^e\right|^2 \left(x_1^2 + x_6^2\right)\right) x_5 \\
&- 2\left|M_e\right| x_1 x_6 \cos\theta_2 - 2\left|m_e\right| x_2 x_6 \cos\left(\theta_e + \theta_1 - \theta_2\right) + g_2^2 x_2 x_3 x_4 \cos\psi_1 \\
&+ 2\left|Y^{ed}\right| x_6 x_{8A} x_{9A} \cos\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{4A}\right) + \sum_{A=1}^{3} g_2^2 x_4 x_{7A} x_{8A} \cos\left(\psi_{3A} - \psi_1\right) \\
&+ \left(\frac{1}{2}\, g_1^2\, (\,I\,) + \frac{1}{2}\, g_2^2\, (\,II\,) + g_2^2 \left(-x_1^2 + x_2^2 - \sum_{A=1}^{3} x_{7A}^2\right)\right) x_5 \,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_6} &= \left(2m_E^2 + 2\left|y^e\right|^2 \left(x_1^2 + x_4^2 + x_5^2\right)\right) x_6 \\
&- 2\left|m_e\right| x_3 x_4 \cos\left(\theta_e + \theta_1 - \theta_2 - \psi_1\right) - 2\left|M_e\right| x_1 x_5 \cos\theta_2 - 2\left|m_e\right| x_2 x_5 \cos\left(\theta_e + \theta_1 - \theta_2\right) \\
&+ \sum_{A=1}^{2} 2\left|Y^{ed}\right| x_4 x_{7A} x_{9A} \cos\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{4A} + \psi_1 - \psi_{3A}\right) \\
&+ \sum_{A=1}^{2} 2\left|Y^{ed}\right| x_5 x_{8A} x_{9A} \cos\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{4A}\right) - g_1^2\, (\,I\,)\, x_6 \,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_{71}} \;=\;& \left(2m_Q^2 + 2\left|y^d\right|^2 x_{91}^2 + 2\left|y^u\right|^2\left(x_2^2 + x_{10}^2\right)\right) x_{71} \\
& + 2\left|M_u\right| x_2 x_{10} \cos\theta_3 + 2\left|m_u\right| x_1 x_{10} \cos\left(\theta_u + \theta_1 - \theta_3\right) \\
& - 2\left|m_d\right| x_3 x_{91} \cos\left(\theta_d + \theta_1 - \theta_{41} - \psi_{31}\right) + g_2^2 x_4 x_5 x_{81} \cos\left(\psi_{31} - \psi_1\right) \\
& + 2\left|Y^{ed}\right| x_4 x_6 x_{91} \cos\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{41} + \psi_1 - \psi_{31}\right) + \left(g_2^2 - 2\left|y^u\right|^2\right) x_2 x_3 x_{81} \cos\psi_{31} \\
& + \left(2\left|y^d\right|^2 + g_3^2\right) x_{72} x_{91} x_{92} \cos\left(\theta_{41} - \theta_{42} + \psi_{31} - \psi_{32}\right) \\
& + \left(g_2^2 + g_3^2\right) x_{72} x_{81} x_{82} \cos\left(\psi_{32} - \psi_{31}\right) + \left(g_2^2 + g_3^2\right) x_{73} x_{81} x_{83} \cos\left(\psi_{33} - \psi_{31}\right) \\
& - \left(\frac{1}{6}\, g_1^2\,(\,I\,) - \frac{1}{2}\, g_2^2\,(\,II\,) - g_2^2\left(x_3^2 - x_5^2\right) - \frac{1}{2}\, g_3^2\,(\,III\,) - \frac{1}{6}\, g_3^2\,(\,IV\,) - g_3^2\left(x_{72}^2 + x_{73}^2\right)\right) x_{71}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_{72}} \;=\;& \left(2m_Q^2 + 2\left|y^d\right|^2 x_{92}^2 + 2\left|y^u\right|^2 x_2^2\right) x_{72} \\
& - 2\left|m_d\right| x_3 x_{92} \cos\left(\theta_d + \theta_1 - \theta_{42} - \psi_{32}\right) \\
& + 2\left|Y^{ed}\right| x_4 x_6 x_{92} \cos\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{42} + \psi_1 - \psi_{32}\right) \\
& + \left(g_2^2 - 2\left|y^u\right|^2\right) x_2 x_3 x_{82} \cos\psi_{32} + g_2^2 x_4 x_5 x_{82} \cos\left(\psi_{32} - \psi_1\right) \\
& + \left(2\left|y^d\right|^2 + g_3^2\right) x_{71} x_{91} x_{92} \cos\left(\theta_{41} - \theta_{42} + \psi_{31} - \psi_{32}\right) \\
& + \left(g_2^2 + g_3^2\right) x_{71} x_{81} x_{82} \cos\left(\psi_{32} - \psi_{31}\right) + \left(g_2^2 + g_3^2\right) x_{73} x_{82} x_{83} \cos\left(\psi_{33} - \psi_{32}\right) \\
& - \left(\frac{1}{6}\, g_1^2\,(\,I\,) - \frac{1}{2}\, g_2^2\,(\,II\,) - g_2^2\left(x_3^2 - x_5^2\right) + \frac{1}{2}\, g_3^2\,(\,III\,) - \frac{1}{6}\, g_3^2\,(\,IV\,) - g_3^2\left(x_{71}^2 + x_{73}^2\right)\right) x_{72}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_{73}} \;=\;& \left(2m_Q^2 + 2\left|y^u\right|^2 x_2^2\right) x_{73} \\
& + \left(g_2^2 - 2\left|y^u\right|^2\right) x_2 x_3 x_{83} \cos\psi_{33} + g_2^2 x_4 x_5 x_{83} \cos\left(\psi_{33} - \psi_1\right) \\
& + \left(g_2^2 + g_3^2\right) x_{71} x_{81} x_{83} \cos\left(\psi_{33} - \psi_{31}\right) + \left(g_2^2 + g_3^2\right) x_{72} x_{82} x_{83} \cos\left(\psi_{33} - \psi_{32}\right) \\
& - \left(\frac{1}{6}\, g_1^2\,(\,I\,) - \frac{1}{2}\, g_2^2\,(\,II\,) - g_2^2\left(x_3^2 - x_5^2\right) + \frac{1}{3}\, g_3^2\,(\,IV\,) - g_3^2\left(x_{71}^2 + x_{72}^2\right)\right) x_{73}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_{81}} = \; & \Big(2m_Q^2 + 2\left|y^d\right|^2\left(x_1^2+x_{91}^2\right) + 2\left|y^u\right|^2\left(x_3^2+x_{10}^2\right)\Big)\, x_{81} \\
& - 2\left|M_u\right| x_3 x_{10}\cos\left(\theta_3-\psi_{31}\right) - 2\left|M_d\right| x_1 x_{91}\cos\theta_{41} - 2\left|m_d\right| x_2 x_{91}\cos\left(\theta_d+\theta_1-\theta_{41}\right) \\
& + 2\left|Y^{ed}\right| x_5 x_6 x_{91}\cos\left(\theta_d-\theta_e+\theta_2-\theta_{41}\right) \\
& + \Big(g_2^2 - 2\left|y^u\right|^2\Big) x_2 x_3 x_{71}\cos\psi_{31} + g_2^2 x_4 x_5 x_{71}\cos\left(\psi_{31}-\psi_1\right) \\
& + \Big(2\left|y^d\right|^2 + g_3^2\Big) x_{82} x_{91} x_{92}\cos\left(\theta_{41}-\theta_{42}\right) \\
& + \left(g_2^2+g_3^2\right) x_{71} x_{72} x_{82}\cos\left(\psi_{32}-\psi_{31}\right) + \left(g_2^2+g_3^2\right) x_{71} x_{73} x_{83}\cos\left(\psi_{33}-\psi_{31}\right) \\
& - \Bigg(\frac{1}{6}\, g_1^2\,(\,I\,) - \frac{1}{2}\, g_2^2\,(\,II\,) + g_2^2\left(x_1^2-x_2^2+x_4^2\right) - \frac{1}{2}\, g_3^2\,(\,III\,) \\
& \qquad -\frac{1}{6}\, g_3^2\,(\,IV\,) - g_3^2\left(x_{82}^2+x_{83}^2\right)\Bigg)\, x_{81}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_{82}} = \; & \Big(2m_Q^2 + 2\left|y^d\right|^2\left(x_1^2+x_{92}^2\right) + 2\left|y^u\right|^2 x_3^2\Big)\, x_{82} \\
& - 2\left|M_d\right| x_1 x_{92}\cos\theta_{42} - 2\left|m_d\right| x_2 x_{92}\cos\left(\theta_d+\theta_1-\theta_{42}\right) \\
& + 2\left|Y^{ed}\right| x_5 x_6 x_{92}\cos\left(\theta_d-\theta_e+\theta_2-\theta_{42}\right) + \Big(g_2^2 - 2\left|y^u\right|^2\Big) x_2 x_3 x_{72}\cos\psi_{32} \\
& + g_2^2 x_4 x_5 x_{72}\cos\left(\psi_{32}-\psi_1\right) + \Big(2\left|y^d\right|^2 + g_3^2\Big) x_{81} x_{91} x_{92}\cos\left(\theta_{41}-\theta_{42}\right) \\
& + \left(g_2^2+g_3^2\right) x_{71} x_{72} x_{81}\cos\left(\psi_{32}-\psi_{31}\right) + \left(g_2^2+g_3^2\right) x_{72} x_{73} x_{83}\cos\left(\psi_{33}-\psi_{32}\right) \\
& - \Bigg(\frac{1}{6}\, g_1^2\,(\,I\,) - \frac{1}{2}\, g_2^2\,(\,II\,) + g_2^2\left(x_1^2-x_2^2+x_4^2\right) + \frac{1}{2}\, g_3^2\,(\,III\,) \\
& \qquad -\frac{1}{6}\, g_3^2\,(\,IV\,) - g_3^2\left(x_{81}^2+x_{83}^2\right)\Bigg)\, x_{82}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_{83}} = \; & \Big(2m_Q^2 + 2\left|y^d\right|^2 x_1^2 + 2\left|y^u\right|^2 x_3^2\Big)\, x_{83} \\
& + \Big(g_2^2 - 2\left|y^u\right|^2\Big) x_2 x_3 x_{73}\cos\psi_{33} + g_2^2 x_4 x_5 x_{73}\cos\left(\psi_{33}-\psi_1\right) \\
& + \left(g_2^2+g_3^2\right) x_{71} x_{73} x_{81}\cos\left(\psi_{33}-\psi_{31}\right) + \left(g_2^2+g_3^2\right) x_{72} x_{73} x_{82}\cos\left(\psi_{33}-\psi_{32}\right) \\
& - \Bigg(\frac{1}{6}\, g_1^2\,(\,I\,) - \frac{1}{2}\, g_2^2\,(\,II\,) + g_2^2\left(x_1^2-x_2^2+x_4^2\right) + \frac{1}{3}\, g_3^2\,(\,IV\,) - g_3^2\left(x_{81}^2+x_{82}^2\right)\Bigg)\, x_{83}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_{91}} &= \left(2m_D^2 + 2\left|y^d\right|^2\left(x_1^2 + x_{71}^2 + x_{81}^2\right)\right) x_{91} \\
&\quad - 2\left|M_d\right| x_1 x_{81} \cos\theta_{41} - 2\left|m_d\right| x_3 x_{71} \cos\left(\theta_d + \theta_1 - \theta_{41} - \psi_{31}\right) \\
&\quad - 2\left|m_d\right| x_2 x_{81} \cos\left(\theta_d + \theta_1 - \theta_{41}\right) + 2\left|Y^{ed}\right| x_5 x_6 x_{81} \cos\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{41}\right) \\
&\quad + 2\left|Y^{ed}\right| x_4 x_6 x_{71} \cos\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{41} + \psi_1 - \psi_{31}\right) \\
&\quad + 2\left|Y^{ud}\right| x_1 x_3 x_{10} \cos\left(\theta_u - \theta_d - \theta_3 + \theta_{4A} + \psi_{3A}\right) \\
&\quad + \left(2\left|y^d\right|^2 + g_3^2\right) x_{71} x_{72} x_{92} \cos\left(\theta_{41} - \theta_{42} + \psi_{31} - \psi_{32}\right) \\
&\quad + \left(2\left|y^d\right|^2 + g_3^2\right) x_{81} x_{82} x_{92} \cos\left(\theta_{41} - \theta_{42}\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{3}\, g_1^2\,(\,I\,) - \frac{1}{2}\, g_3^2\,(\,III\,) - \frac{1}{6}\, g_3^2\,(\,IV\,) - g_3^2 x_{92}^2\right) x_{91}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_{92}} &= \left(2m_D^2 + 2\left|y^d\right|^2\left(x_1^2 + x_{72}^2 + x_{82}^2\right)\right) x_{92} \\
&\quad - 2\left|M_d\right| x_1 x_{82} \cos\theta_{42} - 2\left|m_d\right| x_3 x_{72} \cos\left(\theta_d + \theta_1 - \theta_{42} - \psi_{32}\right) \\
&\quad - 2\left|m_d\right| x_2 x_{82} \cos\left(\theta_d + \theta_1 - \theta_{42}\right) + 2\left|Y^{ed}\right| x_5 x_6 x_{82} \cos\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{42}\right) \\
&\quad + 2\left|Y^{ed}\right| x_4 x_6 x_{72} \cos\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{42} + \psi_1 - \psi_{32}\right) \\
&\quad + \left(2\left|y^d\right|^2 + g_3^2\right) x_{71} x_{72} x_{91} \cos\left(\theta_{41} - \theta_{42} + \psi_{31} - \psi_{32}\right) \\
&\quad + \left(2\left|y^d\right|^2 + g_3^2\right) x_{81} x_{82} x_{91} \cos\left(\theta_{41} - \theta_{42}\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{3}\, g_1^2\,(\,I\,) + \frac{1}{2}\, g_3^2\,(\,III\,) - \frac{1}{6}\, g_3^2\,(\,IV\,) - g_3^2 x_{91}^2\right) x_{92}\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial x_{10}} &= \left(2m_U^2 + 2\left|y^u\right|^2\left(x_2^3 + x_3^2 + x_{71}^2 + x_{81}^2\right)\right) x_{10} \\
&\quad + 2\left|M_u\right| x_2 x_{71} \cos\theta_3 - 2\left|M_u\right| x_3 x_{81} \cos\left(\theta_3 - \psi_{31}\right) + 2\left|m_u\right| x_1 x_{71} \cos\left(\theta_u + \theta_1 - \theta_3\right) \\
&\quad + 2\left|Y^{ud}\right| x_1 x_3 x_{91} \cos\left(\theta_u - \theta_d - \theta_3 + \theta_{41} + \psi_{31}\right) \\
&\quad + \left(\frac{2}{3}\, g_1^2\,(I) + \frac{1}{2}\, g_3^2\,(III) + \frac{1}{6}\, g_3^2\,(IV)\right) x_{10}\,,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial \theta_1} &= -2\left|m_B^2\right| x_1 x_2 \sin\theta_1 + 2\left|m_e\right| x_3 x_4 x_6 \sin\left(\theta_e+\theta_1-\theta_2-\psi_1\right) + 2\left|m_e\right| x_2 x_5 x_6 \sin\left(\theta_e+\theta_1-\theta_2\right) \\
&\quad - 2\left|m_u\right| x_1 x_{71} x_{10} \cos\left(\theta_u+\theta_1-\theta_3\right) + \sum_{A=1}^{2} 2\left|m_d\right| x_3 x_{7A} x_{9A} \sin\left(\theta_d+\theta_1-\theta_{4A}-\psi_{3A}\right) \\
&\quad + \sum_{A=1}^{2} 2\left|m_d\right| x_2 x_{8A} x_{9A} \sin\left(\theta_d+\theta_1-\theta_{4A}\right) \;,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial \theta_2} &= 2\left|M_e\right| x_1 x_5 x_6 \sin\theta_2 - 2\left|m_e\right| x_3 x_4 x_6 \sin\left(\theta_e+\theta_1-\theta_2-\psi_1\right) - 2\left|m_e\right| x_2 x_5 x_6 \sin\left(\theta_e+\theta_1-\theta_2\right) \\
&\quad - \sum_{A=1}^{2} 2\left|Y^{ed}\right| x_4 x_6 x_{7A} x_{9A} \sin\left(\theta_d-\theta_e+\theta_2-\theta_{4A}+\psi_1-\psi_{3A}\right) \\
&\quad - \sum_{A=1}^{2} 2\left|Y^{ed}\right| x_5 x_6 x_{8A} x_{9A} \sin\left(\theta_d-\theta_e+\theta_2-\theta_{4A}\right) \;,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial \theta_3} &= -2\left|M_u\right| x_2 x_{71} x_{10} \sin\theta_3 + 2\left|M_u\right| x_3 x_{81} x_{10} \sin\left(\theta_3-\psi_{31}\right) + 2\left|m_u\right| x_1 x_{71} x_{10} \sin\left(\theta_u+\theta_1-\theta_3\right) \\
&\quad + 2\left|Y^{ud}\right| x_1 x_3 x_{91} x_{10} \sin\left(\theta_u-\theta_d-\theta_3+\theta_{41}+\psi_{31}\right) \;,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial \theta_{41}} &= 2\left|M_d\right| x_1 x_{81} x_{91} \sin\theta_{41} - 2\left|m_d\right| x_3 x_{71} x_{91} \sin\left(\theta_d+\theta_1-\theta_{41}-\psi_{31}\right) \\
&\quad - 2\left|m_d\right| x_2 x_{81} x_{91} \sin\left(\theta_d+\theta_1-\theta_{41}\right) + 2\left|Y^{ed}\right| x_5 x_6 x_{81} x_{91} \sin\left(\theta_d-\theta_e+\theta_2-\theta_{41}\right) \\
&\quad + 2\left|Y^{ed}\right| x_4 x_6 x_{71} x_{91} \sin\left(\theta_d-\theta_e+\theta_2-\theta_{41}+\psi_1-\psi_{31}\right) \\
&\quad - 2\left|Y^{ud}\right| x_1 x_3 x_{91} x_{10} \sin\left(\theta_u-\theta_d-\theta_3+\theta_{41}+\psi_{31}\right) \\
&\quad - \left(2\left|y^d\right|^2+g_3^2\right) x_{81} x_{82} x_{91} x_{92} \sin\left(\theta_{41}-\theta_{42}\right) \\
&\quad - \left(2\left|y^d\right|^2+g_3^2\right) x_{71} x_{72} x_{91} x_{92} \sin\left(\theta_{41}-\theta_{42}+\psi_{31}-\psi_{32}\right) \;,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial \theta_{42}} &= 2\left|M_d\right| x_1 x_{82} x_{92} \sin\theta_{42} - 2\left|m_d\right| x_3 x_{72} x_{92} \sin\left(\theta_d + \theta_1 - \theta_{42} - \psi_{32}\right) \\
&- 2\left|m_d\right| x_2 x_{82} x_{92} \sin\left(\theta_d + \theta_1 - \theta_{42}\right) + 2\left|Y^{ed}\right| x_5 x_6 x_{82} x_{92} \sin\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{42}\right) \\
&+ 2\left|Y^{ed}\right| x_4 x_6 x_{72} x_{92} \sin\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{42} + \psi_1 - \psi_{32}\right) \\
&+ \left(2\left|y^d\right|^2 + g_3^2\right) x_{71} x_{72} x_{91} x_{92} \sin\left(\theta_{41} - \theta_{42} + \psi_{31} - \psi_{32}\right) \\
&+ \left(2\left|y^d\right|^2 + g_3^2\right) x_{81} x_{82} x_{91} x_{92} \sin\left(\theta_{41} - \theta_{42}\right) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial \psi_1} &= -2\left|m_e\right| x_3 x_4 x_6 \sin\left(\theta_e + \theta_1 - \theta_2 - \psi_1\right) + \sum_{A=1}^{3} g_2^2 x_4 x_5 x_{7A} x_{8A} \sin\left(\psi_{3A} - \psi_1\right) \\
&- g_2^2 x_2 x_3 x_4 x_5 \sin\psi_1 - \sum_{A=1}^{2} 2\left|Y^{ed}\right| x_4 x_6 x_{7A} x_{9A} \sin\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{4A} + \psi_1 - \psi_{3A}\right) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial \psi_{31}} &= -2\left|M_u\right| x_3 x_{81} x_{10} \sin\left(\theta_3 - \psi_{31}\right) - 2\left|m_d\right| x_3 x_{71} x_{91} \sin\left(\theta_d + \theta_1 - \theta_{41} - \psi_{31}\right) \\
&+ 2\left|Y^{ed}\right| x_4 x_6 x_{71} x_{91} \sin\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{41} + \psi_1 - \psi_{31}\right) \\
&- 2\left|Y^{ud}\right| x_1 x_3 x_{91} x_{10} \sin\left(\theta_u - \theta_d - \theta_3 + \theta_{41} + \psi_{31}\right) \\
&- \left(2\left|y^d\right|^2 + g_3^2\right) x_{71} x_{72} x_{91} x_{92} \sin\left(\theta_{41} - \theta_{42} + \psi_{31} - \psi_{32}\right) \\
&- \left(g_2^2 - 2\left|y^u\right|^2\right) x_2 x_3 x_{71} x_{81} \sin\psi_{31} - g_2^2 x_4 x_5 x_{71} x_{81} \sin\left(\psi_{31} - \psi_1\right) \\
&+ \left(g_2^2 + g_3^2\right) x_{71} x_{72} x_{81} x_{82} \sin\left(\psi_{32} - \psi_{31}\right) \\
&+ \left(g_2^2 + g_3^2\right) x_{71} x_{73} x_{81} x_{83} \sin\left(\psi_{33} - \psi_{31}\right) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial \psi_{32}} &= 2\left|m_d\right| x_3 x_{72} x_{92} \sin\left(\theta_d + \theta_1 - \theta_{42} - \psi_{32}\right) - \left(2\left|y^u\right|^2 + g_2^2\right) x_2 x_3 x_{72} x_{82} \sin\psi_{32} \\
&+ 2\left|Y^{ed}\right| x_4 x_6 x_{72} x_{92} \sin\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{42} + \psi_1 - \psi_{32}\right) \\
&- \left(g_2^2 - 2\left|y^u\right|^2\right) x_2 x_3 x_{72} x_{82} \sin\psi_{32} - g_2^2 x_4 x_5 x_{72} x_{82} \sin\left(\psi_{32} - \psi_1\right) \\
&- \left(g_2^2 + g_3^2\right) x_{71} x_{72} x_{81} x_{82} \sin\left(\psi_{32} - \psi_{31}\right) \\
&+ \left(g_2^2 + g_3^2\right) x_{72} x_{73} x_{82} x_{83} \sin\left(\psi_{33} - \psi_{32}\right) \\
&+ \left(2\left|y^d\right|^2 + g_3^2\right) x_{71} x_{72} x_{91} x_{92} \sin\left(\theta_{41} - \theta_{42} + \psi_{31} - \psi_{32}\right) ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_0}{\partial \psi_{33}} &= -\left(g_2^2 - 2\left|y^u\right|^2\right) x_2 x_3 x_{73} x_{83} \sin\psi_{33} - g_2^2 x_4 x_5 x_{73} x_{83} \sin\left(\psi_{33} - \psi_1\right) \\
&\quad - \left(g_2^2 + g_3^2\right) x_{71} x_{73} x_{81} x_{83} \sin\left(\psi_{33} - \psi_{31}\right) - \left(g_2^2 + g_3^2\right) x_{72} x_{73} x_{82} x_{83} \sin\left(\psi_{33} - \psi_{32}\right) .
\end{aligned}
$$

Die verwendeten Abkürzungen sind:

$$
\begin{aligned}
I &= x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 2x_6^2 - \frac{1}{3} \sum_{A=1}^{3} \left(x_{7A}^2 + x_{8A}^2\right) - \frac{2}{3} \left(x_{91}^2 + x_{92}^2\right) + \frac{4}{3} x_{10}^2 , \\
II &= x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + \sum_{A=1}^{3} \left(x_{7A}^2 + x_{8A}^2\right) , \\
III &= x_{71}^2 - x_{72}^2 + x_{81}^2 - x_{82}^2 + x_{91}^2 - x_{92}^2 + x_{10}^2 , \\
IV &= x_{71}^2 + x_{72}^2 - 2x_{73}^2 + x_{81}^2 + x_{82}^2 - 2x_{83}^2 + x_{91}^2 + x_{92}^2 + x_{10}^2 .
\end{aligned}
$$

Einige zweite partielle Ableitungen, die benötigt werden, geben wir auch an:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{\left(\partial x_{71}\right)^2} &= 2m_Q^2 + 2\left|y^d\right|^2 x_{91}^2 + 2\left|y^u\right|^2 \left(x_2^2 + x_{10}^2\right) - \frac{1}{6} g_1^2 \left(I\right) + \frac{1}{9} g_1^2 x_{71}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} g_2^2 \left(II\right) + g_2^2 \left(x_3^2 - x_5^2 + x_{71}^2\right) + \frac{1}{2} g_3^2 \left(III\right) + \frac{1}{6} g_3^2 \left(IV\right) + g_3^2 \left(\frac{4}{3} x_{71}^2 + x_{72}^2 + x_{73}^2\right) , \\
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_{71} \partial x_{10}} &= 4\left|y^u\right|^2 x_{71} x_{10} + 2\left|M_u\right| x_2 \cos\theta_3 + 2\left|m_u\right| x_1 \cos\left(\theta_u + \theta_1 - \theta_3\right) \\
&\quad + \left(-\frac{4}{9} g_1^2 + \frac{4}{3} g_3^2\right) x_{71} x_{10} , \\
\frac{\partial^2 V_0}{\left(\partial x_{72}\right)^2} &= 2m_Q^2 + 2\left|y^d\right|^2 x_{92}^2 + 2\left|y^u\right|^2 x_2^2 - \frac{1}{6} g_1^2 \left(I\right) + + \frac{1}{9} g_1^2 x_{72}^2 + \frac{1}{2} g_2^2 \left(II\right) \\
&\quad + g_2^2 \left(x_3^2 - x_5^2 + x_{72}^2\right) - \frac{1}{2} g_3^2 \left(III\right) + \frac{1}{6} g_3^2 \left(IV\right) + g_3^2 \left(x_{71}^2 + \frac{4}{3} x_{72}^2 + x_{73}^2\right) ,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{73})^2} &= 2m_Q^2 + 2\,|y^u|^2\,x_2^2 - \frac{1}{6}\,g_1^2\;(\,I\,) + \frac{1}{9}\,g_1^2\,x_{73}^2 + \frac{1}{2}\,g_2^2\;(\,II\,)\\
&\quad + g_2^2\left(x_3^2 - x_5^2 + x_{73}^2\right) - \frac{1}{3}\,g_3^2\,(\,IV\,) + g_3^2\left(x_{71}^2 + x_{72}^2 + \frac{4}{3}\,x_{73}^2\right)\;,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{81})^2} &= 2m_Q^2 + 2\left|y^d\right|^2\left(x_1^2 + x_{91}^2\right) + 2\,|y^u|^2\left(x_3^2 + x_{10}^2\right) - \frac{1}{6}\,g_1^2\,(\,I\,) + \frac{1}{9}\,g_1^2 x_{81}^2 + \frac{1}{2}\,g_2^2\,(\,II\,)\\
&\quad - g_2^2\left(x_1^2 - x_2^2 + x_4^2 - x_{81}^2\right) + \frac{1}{2}\,g_3^2\,(\,III\,) + \frac{1}{6}\,g_3^2\,(\,IV\,) + g_3^2\left(\frac{4}{3}\,x_{81}^2 + x_{82}^2 + x_{83}^2\right)\;,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_{81}\partial x_{91}} &= -2\,|M_d|\,x_1\cos\theta_{41} - 2\,|m_d|\,x_2\cos\left(\theta_d + \theta_1 - \theta_{41}\right)\\
&\quad + 2\left|Y^{ed}\right| x_5 x_6 \cos\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{41}\right) + \left(2\left|y^d\right|^2 + g_3^2\right) x_{82}x_{92}\cos\left(\theta_{41} - \theta_{42}\right)\\
&\quad + \frac{2}{9}\,g_1^2 x_{81}x_{91} + \frac{4}{3}\,g_3^2 x_{81}x_{91}\;,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{82})^2} &= 2m_Q^2 + 2\left|y^d\right|^2\left(x_1^2 + x_{92}^2\right) + 2\,|y^u|^2\,x_3^2 - \frac{1}{6}\,g_1^2\,(\,I\,) + \frac{1}{9}\,g_1^2 x_{82}^2 + \frac{1}{2}\,g_2^2\,(\,II\,)\\
&\quad - g_2^2\left(x_1^2 - x_2^2 + x_4^2 - x_{82}^2\right) - \frac{1}{2}\,g_3^2\,(\,III\,) + \frac{1}{6}\,g_3^2\,(\,IV\,) + g_3^2\left(x_{81}^2 + \frac{4}{3}\,x_{82}^2 + x_{83}^2\right)\;,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_{82}\partial x_{92}} &= -2\,|M_d|\,x_1\cos\theta_{42} - 2\,|m_d|\,x_2\cos\left(\theta_d + \theta_1 - \theta_{42}\right)\\
&\quad + 2\left|Y^{ed}\right| x_5 x_6 \cos\left(\theta_d - \theta_e + \theta_2 - \theta_{42}\right) + \left(2\left|y^d\right|^2 + g_3^2\right) x_{81}x_{91}\cos\left(\theta_{41} - \theta_{42}\right)\\
&\quad + \left(\frac{2}{9}\,g_1^2 + \frac{4}{3}\,g_3^2\right) x_{82}x_{92}\;,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{83})^2} &= 2m_Q^2 + 2\left|y^d\right|^2 x_1^2 + 2\,|y^u|^2\,x_3^2 - \frac{1}{6}\,g_1^2\,(\,I\,) + \frac{1}{9}\,g_1^2 x_{83}^2 + \frac{1}{2}\,g_2^2\,(\,II\,)\\
&\quad - g_2^2\left(x_1^2 - x_2^2 + x_4^2 - x_{83}^2\right) - \frac{1}{3}\,g_3^2\,(IV) + g_3^2\left(x_{81}^2 + x_{82}^2 + \frac{4}{3}\,x_{83}^2\right)\;,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{91})^2} &= 2m_D^2 + 2\left|y^d\right|^2\left(x_1^2 + x_{71}^2 + x_{81}^2\right) \\
&\quad - \frac{1}{3}\,g_1^2\,(\,I\,) + \frac{4}{9}\,g_1^2\,x_{91}^2 + \frac{1}{2}\,g_3^2\,(\,III\,) + \frac{1}{6}\,g_3^2\,(\,IV\,) + g_3^2\left(\frac{4}{3}\,x_{91}^2 + x_{92}^2\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{92})^2} &= 2m_D^2 + 2\left|y^d\right|^2\left(x_1^2 + x_{72}^2 + x_{82}^2\right) \\
&\quad - \frac{1}{3}\,g_1^2\,(\,I\,) + \frac{4}{9}\,g_1^2 x_{92}^2 - \frac{1}{2}\,g_3^2\,(\,III\,) + \frac{1}{6}\,g_3^2\,(\,IV\,) + g_3^2\left(x_{91}^2 + \frac{4}{3}\,x_{92}^2\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_0}{(\partial x_{10})^2} &= 2m_U^2 + 2\left|y^u\right|^2\left(x_2^3 + x_3^2 + x_{71}^2 + x_{81}^2\right) \\
&\quad + \frac{2}{3} g_1^2\,(\,I\,) + \frac{16}{9}\,g_1^2 x_{10}^2 + \frac{1}{2} g_3^2\,(\,III\,) + \frac{1}{6} g_3^2\,(\,IV\,) + \frac{4}{3}\,g_3^2 x_{10}^2\,.
\end{aligned}
$$

Anhang B

Suche nach lokalen Minima des Potentials im MSSM

In diesem Abschnitt wollen wir das gesamte Vorgehen bei der Suche nach lokalen Minima des Potentials im MSSM beschreiben. Es wird in den verschiedenen Fällen (Potential im Higgs-Sektor, mit Higgs- und Slepton-Feldern, mit Higgs-, Slepton und Squark-Feldern) in den entsprechenden Kapiteln angewendet.
Bevor wir uns auf die Suche nach lokalen Minima machen, müssen zunächst die stationären Punkte des Potentials gefunden werden.

B.1 Stationäre Punkte des Potentials

Wir suchen stationäre Punkte des Potentials V_0, die eine Obermenge der Stellen lokaler Minima des Potentials bilden. Dazu beachten wir, daß in allen drei Fällen in den Kapiteln 5, 6 und 7 (aufgrund der Zerlegung der skalaren Komponentenfelder in Betrag und Phase) der Feldraum $\mathcal{F}$ einen Rand $\partial\mathcal{F}$ und ein Inneres $\overset{o}{\mathcal{F}}$ besitzt. Weiterhin können wir stets eine disjunkte Zerlegung des jeweils betrachteten Feldraumes angeben, die auf einer disjunkten Zerlegung des Randes $\partial\mathcal{F}$ beruht. Somit ist klar, daß wir in jeder Untermenge, die in der disjunkten Zerlegung auftritt, nach stationären Punkten suchen müssen und natürlich auch im Inneren des Feldraumes.

Um stationäre Punkte in $\overset{o}{\mathcal{F}}$ zu erhalten, setzt man alle ersten partiellen Ableitungen von V_0 gleich Null. Stationäre Punkte sind dann genau die Lösungen des sich ergebenden nicht-linearen Gleichungssystems. Damit ist die Suche im Inneren des Feldraumes schon beendet.

Die Suche nach stationären Punkten auf den verschiedenen Randuntermengen des Feldraumes verlangt ein anderes Vorgehen. Betrachten wir eine spezielle Randuntermenge, auf der gewisse Variablen gleich Null sind, die wir als Randvariablen auf dieser Randuntermenge bezeichnen wollen, und andere echt größer als Null sind. Wohlgemerkt sind auf allen Randmengen die Phasenvariablen keiner Einschränkung unterworfen. Um nun stationäre Punkte auf der Randuntermenge zu finden, dürfen wir nicht alle ersten partiellen Ableitungen verwenden, sondern nur alle außer den partiellen Ableitungen nach Randvariablen. Das heißt zum Beispiel, daß auf $\mathcal{F}_{23}$ die ersten partiellen Ableitungen nach x_2 und x_3 bei der Suche nach stationären Punkten nicht beachtet werden dürfen, aber alle anderen. Die verwendbaren partiellen Ableitungen erster Ordnung setzen wir Null und finden die stationären Punkte auf dieser Randmenge erneut als Lösung des nicht-linearen Systems.
Der Grund, weshalb wir die ersten partiellen Ableitungen nach den Randvariablen nicht verwenden dürfen ist, daß durch diese Ableitungen allein Informationen geliefert werden, wie sich das Potential senkrecht zu der Rand-Ebene, die die betrachtete Randuntermenge darstellt, in das Innere des Feldraumes fortpflanzt. Dies ist aber für das Verhalten des Potentials auf dieser Randmenge vollkommen unwichtig. Deshalb lieferte

die Verwendung der partiellen Ableitungen nach den Randvariablen zusätzliche Forderungen an die zu findenden stationären Punkte; das bedeutete, daß wir so nicht alle stationären Punkte auf dieser Randmenge fänden.

B.2 Welchen stationären Punkten entsprechen lokale Minima des Potentials ?

Die Gesamtheit der Stellen lokaler Minima ist eine Untermenge der Menge der stationären Punkte des Potentials. Auch hier müssen wir unterscheiden, ob wir einen stationären Punkt im Innern des Feldraumes untersuchen, oder ob der betrachtete stationäre Punkt auf einem Randbereich des Feldraumes liegt.

Wir wählen (im Fall seiner Existenz) zunächst einen stationären Punkt aus dem Innern des Feldraumes $\overset{o}{\mathcal{F}}$ aus. Hier benutzen wir das gewöhnliche Kriterium unter Verwendung der Hesse-Matrix der zweiten partiellen Ableitungen des Potentials, um herauszufinden, ob dieser stationäre Punkt ein lokales Minimum des Potentials liefert oder nicht. Es lautet:

> Sei $\vec{x}_S \in \overset{o}{\mathcal{F}}$ ein stationärer Punkt von V_0. Dann gilt:
>
> Ist die Hesse-Matrix im Punkt $\vec{x}_S$ positiv definit bzw. negativ definit bzw. indefinit, so besitzt V_0 dort ein lokales Minimum bzw. lokales Maximum bzw. kein lokales Extremum.

Die Problematik liegt in der Tatsache, daß es sich um ein hinreichendes Kriterium handelt. Wenn die Hesse-Matrix, ausgewertet am stationären Punkt, weder positiv noch negativ definit, aber auch nicht indefinit ist (was genau dann der Fall ist, wenn mindestens eine Hauptunterdeterminante verschwindet und alle anderen positiv sind), liefert uns dieses Kriterium überhaupt keine Aussage. Wir können somit einzig hinreichende Bedingungen formulieren, unter denen der entsprechende stationäre Punkt ein lokales Minimum des Potentials liefern muß, oder wir können Bedingungen angeben, die bewirken, daß dieser stationäre Punkt ganz gewiß keine Stelle eines lokalen Minimums von V_0 darstellt. Soweit zu der Situation im Innern des Feldraumes.

Kommen wir zur Untersuchung stationärer Punkte auf dem Randbereich des Feldraumes: Sei $\vec{x}_S$ ein stationärer Punkte auf der Randuntermenge R. Nur diejenigen stationären Punkte können ein lokales Minimum im gesamten Feldraum $\mathcal{F}$ liefern, die zumindest auch lokale Minima auf ihrem Randbereich R sind. Hierzu verwenden wir eine Untermatrix der Hesse-Matrix, bestehend aus denjenigen zweiten partiellen Ableitungen des Potentials nach Variablen, die beide keine Randvariablen auf dieser Randmenge R sind. Auf diese Untermatrix der Hesse-Matrix wenden wir das hinreichende Kriterium von oben an. Ist die Untermatrix der Hesse-Matrix positiv definit, so liefert $\vec{x}_S$ ein lokales Minimum auf R, andernfalls nicht.
Jetzt ist zu beachten, daß wir entscheiden müssen, ob diesem stationären Punkt ein lokales Minimum des Potentials im gesamten Feldraum entspricht oder nicht. Während die Suche nach stationären Punkten auf den Randuntermengen auf dieselben beschränkt blieb und keine Informationen über das Verhalten des Potentials außerhalb dieser Randmengen verwendet wurden, ist die Situation hier eine andere: damit ein stationärer Punkt auf einem Randbereich ein lokales Minimum im gesamten Feldraum liefert, benötigen wir Informationen aus einer ganzen Umgebung dieses Punktes, die nun nicht mehr auf den Randbereich selbst beschränkt bleibt.
Wir wollen unser Vorgehen anhand des Satzes von Taylor demonstrieren: sei $\vec{\epsilon} \in \mathcal{F}$ ein Vektor mit $\vec{\epsilon} \perp R$. Das bedeutet, daß nur die Komponenten des Vektors $\vec{\epsilon}$ nicht verschwinden, die den Randvariablen entsprechen. Dann gilt:

$$V_0\left(\vec{x}_S + \vec{\epsilon}\right) \;=\; V_0\left(\vec{x}_S\right) + \vec{\epsilon}\left(\vec{\nabla} V_0\right)\left(\vec{x}_S\right) + \frac{1}{2}\,\vec{\epsilon}^{\,T} A\,\vec{\epsilon} + \mathcal{O}\left(|\,\vec{\epsilon}\,|^3\right)$$

mit der Hesse-Matrix

$$A_{jk} \;=\; \left.\frac{\partial^2 V_0}{\partial x_j\,\partial x_k}\right|_{\vec{x}_S} .$$

Wir prüfen zuerst:

$$\text{(B.1)} \qquad \exists\,\vec{\epsilon} \in \mathcal{F},\quad \vec{\epsilon} \perp R \qquad \text{mit} \qquad \vec{\epsilon}\left(\vec{\nabla} V_0\right)(\vec{x}_S) \;<\; 0 \quad ?$$

Ist diese Frage positiv zu beantworten, so wählen wir $|\,\vec{\epsilon}\,|$ infinitesimal klein und erhalten unter Vernachlässigung der Terme zweiter und höherer Ordnung

$$V_0\,(\vec{x}_S + \vec{\epsilon}) \;=\; V_0\,(\vec{x}_S) + \vec{\epsilon}\left(\vec{\nabla} V_0\right)(\vec{x}_S) \;<\; V_0\,(\vec{x}_S)\ ,$$

also die Aussage, daß der stationäre Punkt $\vec{x}_S$ auf dem Randbereich R keine lokale Minimalstelle im Feldraum des Potentials V_0 ist, weil in jeder beliebigen Umgebung um $\vec{x}_S$, die ganz innerhalb des Feldraumes liegt, sich stets Punkte befinden, an denen das Potential V_0 einen kleineren Wert als an $\vec{x}_S$ annimmt.

Ist

$$\vec{\epsilon}\left(\vec{\nabla} V_0\right)(\vec{x}_S) \;>\; 0 \qquad \forall\,\vec{\epsilon} \in \mathcal{F} \qquad \text{mit} \qquad \vec{\epsilon} \perp R\,,$$

so ist der stationäre Punkt $\vec{x}_S \in R$ Stelle eines lokalen Minimums im gesamten Feldraum $\mathcal{F}$.

Gilt jedoch

$$\vec{\epsilon}\left(\vec{\nabla} V_0\right)(\vec{x}_S) \;=\; 0 \qquad \forall\,\vec{\epsilon} \in \mathcal{F} \qquad \text{mit} \qquad \vec{\epsilon} \perp R\,,$$

so ist das Verhalten des quadratischen Terms in $\vec{\epsilon}$ entscheidend. Dies läuft darauf hinaus, zu untersuchen, ob die Matrix A positiv oder negativ definit oder indefinit ist. Allerdings brauchen wir nicht die gesamte Hesse-Matrix A, sondern wegen $\vec{\epsilon} \perp R$ nur die Untermatrix aller zweiten partiellen Ableitungen, die nur Ableitungen nach Randvariablen enthält, zu betrachten. Weiterhin ist auch zu bedenken, daß $\vec{\epsilon} \in \mathcal{F}$ gelten muß.

Ist diese Untermatrix der Hesse-Matrix indefinit, so erhalten wir keine Aussage über das Verhalten des Potentials in unmittelbarer Umgebung des Punktes $\vec{x}_S$, und wir können nicht entscheiden, ob es sich um ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder gar kein lokales Extremum handelt.

Finden wir jedoch nur positive Hauptunterdeterminanten der betrachteten Untermatrix von A, so liegt mit $\vec{x}_S$ eine Stelle eines lokalen Minimums des Potentials im gesamten Feldraum vor.

Existiert eine negative Unterdeterminante der Untermatrix von A, so ist zunächst noch zu entscheiden, ob der Eigenvektor zu dem dann existierenden negativen Eigenwert der Untermatrix von A im Feldraum $\mathcal{F}$ liegt. Ist dies nicht der Fall, so ist diese negative Unterdeterminante nicht weiter folgenreich. Erst im Fall, daß der Eigenvektor $\vec{\epsilon}_-$ wirklich im Feldraum $\mathcal{F}$ liegt, können wir den stationären Punkt $\vec{x}_S$ als Stelle eines lokalen Minimums von V_0 definitiv ausschließen, denn dann gilt unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnungen

$$V_0\,(\vec{x}_S + \vec{\epsilon}_-) \;=\; V_0\,(\vec{x}_S) + \frac{1}{2}\,\vec{\epsilon}_-^{\,T}\,A\,\vec{\epsilon}_- \;<\; V_0\,(\vec{x}_S)\ .$$

Liegt keiner der Eigenvektoren zu negativen Eigenwerten im Feldraum, so liefert wegen

$$\vec{\epsilon}^{\,T} A \vec{\epsilon} > 0 \qquad \forall\, \vec{\epsilon} \in \mathcal{F}\,, \quad \vec{\epsilon} \perp R$$

der stationäre Punkt $\vec{x}_S$ doch ein lokales Minimum des Potentials im gesamten Feldraum.

B.3 Konkrete Anwendung des Vorgehens

Bei der konkreten Anwendung des beschriebenen Verfahrens zur Suche der lokalen Minima des Potentials ist es zweckmäßig, die obige Reihenfolge der zu prüfenden Bedingungen an die stationären Punkte auf Randuntermengen zu ändern: man wird bei solchen stationären Punkten zunächst die ersten partiellen Ableitungen nach den Randvariablen betrachten und prüfen, ob sich gemäß $(B.1)$ Vektoren $\vec{\epsilon}$ finden lassen, so daß das Potential sich entlang dieser Richtungen in das Innere des Feldraumes so fortsetzt, daß kleinere Werte angenommen werden. Der Grund ist die einfache Gestalt der ersten partiellen Ableitungen nach den Randvariablen im Vergleich zu den meist komplizierten und langen Ausdrücken für die Unterdeterminanten der Hesse-Matrix.
Wenden wir das Verfahren mit der so geänderten Reihenfolge der Bedingungen an die stationären Punkte an, so können wir folgende Aussagen machen, die von der konkreten Gestalt des Potentials nicht abhängen, indem wir einfach bestimmte Terme, die im Potential auftreten, betrachten:

a) Der Term $\left|m_B^2\right| x_1 x_2 \cos\theta_1$
Wir betrachten einen Randbereich, auf dem eine der beiden Variablen x_1, x_2 verschwindet, zum Beispiel $x_2 = 0$, und einen stationären Punkt $\vec{x}_S$ auf diesem Rand des Feldraumes. In den verwendeten stationären Gleichungen tritt (je nachdem, welche Variablen auf diesem Randbereich außer x_2 noch verschwinden) die Phasenvariable θ_1 höchstens in Kombinationen mit anderen Phasenvariablen auf; es ist nur diese spezielle Kombination der Phasenvariablen, die in den stationären Gleichungen vorkommt und durch dieselben festgelegt wird, aber nicht der exakte Wert der Phasenvariable θ_1. Weiterhin soll der betrachtete Randbereich so gewählt sein, daß am stationären Punkt $\vec{x}_S$

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_2}\right|_{\vec{x}_S} = 2\left|m_B^2\right| x_1 \cos\theta_1$$

ist. Weil höchstens die in den stationären Gleichungen auftretende Phasenkombination bestimmt ist, können wir die Phase θ_1 selbst unter Beibehaltung des Wertes der Phasenkombination beliebig wählen. In diesem Fall können wir durch geeignete Wahl von θ_1 erreichen, daß die partielle Ableitung nach x_2 negativ wird.
Nach den obigen Ausführungen folgern wir, daß dieser stationäre Punkt mit einem geeignet gewählten Wert von θ_1 keine lokale Minimalstelle des Potentials V_0 ist. Weil alle anderen stationären Punkte, die sich nur im Wert von θ_1 unterscheiden, aber den gleichen Wert des Potentials liefern, können sie keinesfalls als globales Minimum von V_0 in Frage kommen. Deshalb werden wir in den Untersuchungen des Potentials alle diese stationären Punkte (die sich nur im Wert der Phasenvariable unterscheiden) nicht mitberücksichtigen. Ganz analog verläuft die Argumentation bei entsprechenden Randbereichen mit $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$.

b) Trilineare Terme der Form $x_a x_b x_c \cos\phi_d$
Wir betrachten hier einen Randbereich, bei dem genau eine der drei Variablen der trilinearen Kopplung verschwindet, zum Beispiel $x_a = 0$, und bei dem die entsprechende partielle Ableitung nach x_a auch nur aus einem Term besteht. Die Situation ist vollständig analog zu der Situation in Punkt a): es gibt unendlich viele stationäre Punkte, bei denen der Wert von ϕ_d beliebig ist (weil es in den stationären Gleichungen nicht auftritt, sondern höchstens in einer Kombination mit anderen Phasenvariablen zusammen). Und für unendlich viele dieser stationären Punkte ist die erste partielle Ableitung von V_0 nach x_a negativ; diese liefern keine lokalen Minima des Potentials. Wie bei a) werden wir in diesem Fall keinen der stationären Punkte auf diesem Randbereich weiter betrachten.

c) Terme vierter Ordnung der Form $x_a x_b x_c x_d \cos \phi_e$
Eine den Situationen in a) und b) entsprechende Lage ist bei Randbereichen gegeben, bei denen genau eine der vier Variablen des Terms vierter Ordnung gleich Null ist und alle drei anderen größer Null sind, so daß erneut die partielle Ableitung nach der verschwindenden Variable nur einen Term umfaßt. Alle stationären Punkte dieser Randbereiche stellen keine lokalen Minima im Feldraum dar und werden nicht weiter berücksichtigt.

Diese Überlegungen sind unabhängig von der speziellen Gestalt des Potentials, ob wir nur Higgs-Felder oder Higgs- und Slepton-Felder oder alle skalaren Felder zum Potential beitragen lassen. Auch die Argumentation über das Auftreten spezieller Kombinationen von Phasenvariablen ist in allen Fällen richtig.

Aufgrund dieser Überlegungen lassen sich eine Vielzahl stationärer Punkte auf den Randbereichen als Stellen eines lokalen Minimums ausschließen. Das erleichtert die Analyse des jeweiligen Potentials beträchtlich.

Anhang C

Konventionen

Im folgenden sind die verwendeten Konventionen und viele Supersymmetrie-Formeln angegeben:

Die verwendete Metrik ist

$$\eta \;=\; \mathrm{diag}\;(1,-1,-1,-1)\,.$$

Die antisymmetrischen ϵ-Tensoren sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\alpha\beta} &= -\epsilon_{\beta\alpha}\,, & \epsilon^{\alpha\beta} &= -\epsilon^{\beta\alpha}\,, & \epsilon_{12} &= -1\,, & \epsilon^{12} &= 1\,,\\
\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} &= \epsilon_{\alpha\beta}\,, & \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta} &= \epsilon^{\alpha\beta}\,, & \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\gamma} &= \delta_\gamma{}^\alpha\,, & \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\epsilon^{\dot\beta\dot\gamma} &= \delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\gamma}\,.
\end{aligned}$$

Die Pauli-Matrizen lauten:

$$\sigma^0 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^1 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Weiterhin definieren wir

$$\bar\sigma^{\mu\,\dot\alpha\alpha} \;:=\; \epsilon^{\alpha\beta}\,\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,\sigma^\mu{}_{\beta\dot\beta}$$

und

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta \;:=\; \frac{i}{2}\,(\sigma^\mu\,\bar\sigma^\nu - \sigma^\nu\,\bar\sigma^\mu)_\alpha{}^\beta\,, \qquad (\bar\sigma^{\mu\nu})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \;:=\; \frac{i}{2}\,(\bar\sigma^\mu\,\sigma^\nu - \bar\sigma^\nu\,\sigma^\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,,$$

so daß die folgenden Relationen gelten:

$$\sigma^\mu{}_{\dot\alpha\alpha} \;=\; \epsilon_{\alpha\beta}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar\sigma^{\mu\,\beta\dot\beta}\,, \qquad \sigma^\mu{}_{\alpha\dot\beta}\,\bar\sigma^{\nu\,\dot\beta\alpha} \;=\; 2\eta^{\mu\nu}\,,$$

$$(\sigma^\mu\,\bar\sigma^\nu - \sigma^\nu\,\bar\sigma^\mu)_\alpha{}^\beta \;=\; 2\,\delta_\alpha^\beta\,\eta^{\mu\nu}\,, \qquad (\bar\sigma^\mu\,\sigma^\nu - \bar\sigma^\nu\,\sigma^\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \;=\; 2\,\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\,\eta^{\mu\nu}\,.$$

Die verwendeten Summenkonvention lauten:

$$\theta\xi \;=\; \xi\theta \;:=\; \theta^\alpha\xi_\alpha \;:=\; \sum_{\alpha=1}^{2}\theta^\alpha\xi_\alpha\,, \qquad \bar\theta\bar\xi \;=\; \bar\xi\bar\theta \;:=\; \bar\theta_{\dot\alpha}\bar\xi^{\dot\alpha} \;:=\; \sum_{\dot\alpha=\dot 1}^{\dot 2}\bar\theta_{\dot\alpha}\bar\xi^{\dot\alpha}\,.$$

Zwei-Spinor-Notation:

$$\theta^\alpha \;=\; \epsilon^{\alpha\beta}\,\theta_\beta\,, \qquad \theta_\alpha \;=\; \epsilon_{\alpha\beta}\,\theta^\beta\,, \qquad \bar\theta_{\dot\alpha} \;=\; \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar\theta^{\dot\beta}\,, \qquad \bar\theta^{\dot\alpha} \;=\; \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar\theta_{\dot\beta}\,,$$

$$\left\{\theta^\alpha,\theta^\beta\right\} \;=\; \left\{\theta^\alpha,\theta^\beta\right\} \;=\; \left\{\bar\theta_{\dot\alpha},\bar\theta_{\dot\beta}\right\} \;=\; \left\{\bar\theta^{\dot\alpha},\bar\theta^{\dot\beta}\right\} \;=\; \left\{\theta^\alpha,\bar\theta_{\dot\beta}\right\} \;=\; \left\{\theta_\alpha,\bar\theta^{\dot\beta}\right\} \;=\; 0\,,$$

und nützliche Relationen:

$$\begin{aligned}
\theta^\alpha\theta^\beta &= -\tfrac{1}{2}\,\epsilon^{\alpha\beta}\,\theta\theta\,, & \theta_\alpha\theta_\beta &= \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{\alpha\beta}\,\theta\theta\,,\\
\bar\theta^{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\beta} &= \tfrac{1}{2}\,\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar\theta\bar\theta\,, & \bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta_{\dot\beta} &= -\tfrac{1}{2}\,\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar\theta\bar\theta\,,\\
\theta^\alpha\,\xi_\beta &= \tfrac{1}{2}\,\theta\xi\,\delta^\alpha_\beta\,, & \bar\theta_{\dot\alpha}\,\bar\xi^{\dot\beta} &= \tfrac{1}{2}\,\bar\theta\bar\xi\,\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}\,,\\
\theta\phi\,\theta\psi &= -\tfrac{1}{2}\,\theta\theta\;\phi\psi\,, & \bar\theta\bar\phi\,\bar\theta\bar\psi &= -\tfrac{1}{2}\,\bar\theta\bar\theta\;\bar\phi\bar\psi\,,\\
\theta\sigma^\mu\bar\xi &= -\bar\xi\bar\sigma^\mu\theta\,, & \theta\sigma^\mu\bar\sigma^\nu\theta &= -\theta\theta\,\eta^{\mu\nu}\,.
\end{aligned}$$

Spinor-Ableitungen werden durch

$$\partial_\alpha \;:=\; \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\,, \qquad \bar\partial^{\dot\alpha} \;:=\; \frac{\partial}{\partial\bar\theta_{\dot\alpha}}\,, \qquad \partial\partial \;:=\; \partial^\alpha\partial_\alpha\,, \qquad \bar\partial\bar\partial \;:=\; \bar\partial_{\dot\alpha}\bar\partial^{\dot\alpha}\,,$$

definiert und gehorchen folgenden Beziehungen:

$$\partial_\alpha\,\theta^\beta \;=\; \delta^\beta_\alpha\,, \qquad \partial^\alpha\,\theta_\beta \;=\; \delta^\alpha_\beta\,, \qquad \epsilon_{\alpha\beta}\,\partial^\beta \;=\; -\,\partial_\alpha\,, \qquad \epsilon^{\alpha\beta}\,\partial_\beta \;=\; -\,\partial^\alpha\,,$$

$$\bar\partial^{\dot\alpha}\,\bar\theta_{\dot\beta} \;=\; -\,\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\,, \qquad \bar\partial_{\dot\alpha}\,\bar\theta^{\dot\beta} \;=\; -\,\delta^{\dot\beta}_{\dot\alpha}\,, \qquad \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar\partial^{\dot\beta} \;=\; -\,\bar\partial_{\dot\alpha}\,, \qquad \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,\bar\partial_{\dot\beta} \;=\; -\,\bar\partial^{\dot\alpha}\,,$$

$$\partial_\alpha\,\theta_\beta \;=\; -\,\epsilon_{\alpha\beta}\,, \qquad \partial^\alpha\,\theta^\beta \;=\; -\,\epsilon^{\alpha\beta}\,, \qquad \bar\partial_{\dot\alpha}\,\bar\theta_{\dot\beta} \;=\; \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,, \qquad \bar\partial^{\dot\alpha}\,\bar\theta^{\dot\beta} \;=\; \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,,$$

$$\partial_\alpha\,\theta\theta \;=\; 2\,\theta_\alpha\,, \qquad \partial^\alpha\,\theta\theta \;=\; -2\,\theta^\alpha\,, \qquad \bar\partial_{\dot\alpha}\,\bar\theta\bar\theta \;=\; 2\,\bar\theta_{\dot\alpha}\,, \qquad \bar\partial^{\dot\alpha}\,\bar\theta\bar\theta \;=\; -2\,\bar\theta^{\dot\alpha}\,,$$

$$\partial\partial\,\theta\theta \;=\; 4\,, \qquad \bar\partial\bar\partial\,\bar\theta\bar\theta \;=\; 4\,,$$

$$\{\partial_\alpha, \partial_\beta\} = \{\partial^\alpha, \partial^\beta\} = \left\{\bar\partial_{\dot\alpha}, \bar\partial_{\dot\beta}\right\} = \left\{\bar\partial^{\dot\alpha}, \bar\partial^{\dot\beta}\right\} = \{\partial_\alpha, \bar\partial_{\dot\alpha}\} = \{\partial^\alpha, \bar\partial_{\dot\alpha}\} = 0\,.$$

Die Supersymmetrie-Generatoren sind

$$Q_\alpha = \partial_\alpha - i\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\,\bar\theta^{\dot\alpha}\,\partial_\mu\,, \qquad Q^\beta = \epsilon^{\beta\alpha}\,Q_\alpha = -\,\partial^\beta + i\,\bar\theta_{\dot\beta}\,\bar\sigma^{\mu\,\dot\beta\beta}\,\partial_\mu\,,$$

$$\bar Q_{\dot\alpha} = \bar\partial_{\dot\alpha} + i\theta^\alpha\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu\,, \qquad \bar Q^{\dot\beta} = \epsilon^{\dot\beta\dot\alpha}\,\bar Q_{\dot\alpha} = -\,\bar\partial^{\dot\beta} - i\,\bar\sigma^{\mu\,\dot\beta\beta}\,\theta_\beta\,\partial_\mu$$

und ihre Algebra lautet:

$$\{\,Q_\alpha, Q_\beta\,\} = \left\{\bar Q_{\dot\alpha}, \bar Q_{\dot\beta}\right\} = 0\,,$$

$$\{\,Q_\alpha, \bar Q_{\dot\alpha}\,\} = 2\,i\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu\,.$$

Die supersymmetrisch kovarianten Ableitungen sind durch

$$D_\alpha = \partial_\alpha + i\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\,\bar\theta^{\dot\alpha}\,\partial_\mu\,, \qquad D^\beta = \epsilon^{\beta\alpha}\,D_\alpha = -\,\partial^\beta - i\,\bar\theta_{\dot\beta}\,\bar\sigma^{\mu\,\dot\beta\beta}\,\partial_\mu\,,$$

$$\bar D_{\dot\alpha} = \bar\partial_{\dot\alpha} - i\,\theta^\alpha\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu\,, \qquad \bar D^{\dot\beta} = \epsilon^{\dot\beta\dot\alpha}\,\bar D_{\dot\alpha} = -\,\bar\partial^{\dot\beta} + i\,\bar\sigma^{\mu\dot\beta\beta}\,\theta_\beta\,\partial_\mu$$

gegeben mit ihrer Algebra:

$$\{\,D_\alpha, D_\beta\,\} = \left\{\bar D^{\dot\alpha}, \bar D^{\dot\beta}\right\} = 0\,,$$

$$\{\,D_\alpha, \bar D_{\dot\alpha}\,\} = -\,2\,i\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu\,.$$

Die kovarianten Ableitungen antikommutieren mit den Generatoren der Supersymmetrie lauten:

$$\{\,D_\alpha, Q_\beta\,\} = \left\{D_\alpha, \bar Q^{\dot\beta}\right\} = \{\,\bar D^{\dot\alpha}, Q_\beta\,\} = \left\{\bar D^{\dot\alpha}, \bar Q^{\dot\beta}\right\} = 0\,.$$

Dies ist der Grund für die Bezeichnung als supersymmetrisch kovariante Ableitungen. Weil diese jedoch fermionischen Charakter besitzen, verwenden wir nicht wie in der QED den Kommutator, sondern den Antikommutator mit den Generatoren der Gruppe.

Literaturverzeichnis

[1] S. Glashow, *Partial-symmetries of weak interactions*, Nucl. Phys. **22** (1961), 579-588

S. Weinberg, *A model of leptons*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1264-1266

A. Salam in: *Proceedings of the 8th Nobel Symposium*, Editor N. Svartholm, Stockholm, 1968

[2] The Super-Kamiokande Collaboration, Y. Fukuda et al., *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, hep-ex/9807003

[3] J. Wess, B. Zumino, *Supergauge transformations in four dimensions*, Nucl. Phys. **B 70** (1974), 39-50

[4] Y.A. Gol'fand, E.P. Likhtman, *Extensions of the algebra of Poincaré group generators and violation of P invariance*, JETP Lett. **13** (1971), 323-326

[5] S. Dawson, *The MSSM and why it works*, hep-ph/9712464

[6] U. Amaldi, W. de Boer, H. Fürstenau, *Comparison of grand unified theories with electroweak and strong coupling constant measured at LEP*, Phys. Lett. **B 260** (1991), 447-455

[7] P. Janot, Proceedings of the *International Europhysics Conference on High Energy Physics*, Jerusalem 1997

[8] R.M. Barnett et al., *Phys. Rev.* **D 54** (1996) 1 and 1997 off-year partial update for the 1998 edition available on the PDG WWW pages (URL: http://pdg.lbl.gov)

[9] L. O'Raifeartaigh, *Spontaneous symmetry breaking for chiral scalar superfields*, Nucl. Phys. **B 96** (1975), 331-352

[10] S. Ferrara, L. Girardello, F. Palumbo, *General mass formula in broken supersymmetry*, Phys. Rev. **D 20** (1979), 403-408

[11] G. Farrar, S. Weinberg, *Supersymmetry at ordinary energies. II. R invariance, Goldstone bosons and gauge-fermion masses*, Phys. Rev. **D 27** (1983), 2732-2746

[12] C. Muñoz, *Soft supersymmetry-breaking terms and the μ-problem*, hep-th/9507108

[13] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory, Vol. I, II*, Cambridge University Press, 1987

[14] J.H. Schwarz, *The first 15 years of superstring theory, Vol. I, II*, World Scientific, 1985

[15] J.A. Casas, A. Lleyda, C. Muñoz, *Strong constraints on the parameter space of the MSSM from charge and color breaking minima*, Nucl. Phys. **B 471** (1996), 3-58

[16] J.F. Gunion, H.E. Haber, M. Sher, *Charge/color breaking minima and A-parameter bounds in supersymmetric models*, Nucl. Phys. **B 306** (1988), 1-13

[17] H. Komatsu, *New constraints on parameters in the minimal supersymmetric model*, Phys. Lett. **B 215** (1988), 323-327

[18] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2nd edition, Princeton University Press, 1992

[19] J.M. Frère, D.R.T. Jones, S. Raby, *Fermion masses and induction of the weak scale by supergravity*, Nucl. Phys. **B 222** (1983), 11-19

[20] M.V. Altainsky, V.A. Bednyakov, S.G. Kovalenko, M.N. Fomenko, *The analytic constraints on charge/color breaking vacua in the MSSM*, Mod. Phys. Lett. **A 11** (1996), 2213-2221

[21] A. Strumia, *Charge and color breaking minima and constraints on the MSSM parameters*, Nucl. Phys. **B 482** (1996), 24-38

[22] A. Kusenko, P. Langacker, G. Segre, *Phase transition and vacuum tunneling into charge and color breaking minima in the MSSM*, Phys. Rev. **D 54** (1996), 5824-5834

[23] J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, *Broken symmetries*, Phys. Rev. **127** (1962), 965-970

[24] P.W. Higgs, *Broken symmetries, massless particles and gauge fields*, Phys. Lett. **12** (1964), 132-133

P.W. Higgs, *Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons*, Phys. Rev. **145** (1966), 1156-1163

[25] R. Brout, F. Englert, *Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964), 321-323

[26] T.W.B. Kibble, *Symmetry breaking in non-abelian gauge theories*, Phys. Rev. **155** (1967), 1554-1561

[27] M. Kobayashi, K. Maskawa, *CP-Violation in the renormalizable theory of weak interaction*, Progr. Theor. Phys. **49** (1973), 652-657

[28] M.F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, Phys. Reports **128** (1985), 40-204

[29] S. Coleman, J. Mandula, *All possible symmetries of the S-matrix*, Phys. Rev. **159** (1967), 1251-1254

[30] R. Haag, J.T. Łopuszánski, M. Sohnius, *All possible generators of supersymmetries of the S-matrix*, Nucl. Phys. **B 88** (1975), 257-274

[31] J. Wess, B. Zumino, *Supergauge extension of quantum electrodynamics*, Nucl. Phys. **B 78** (1974), 1-13

[32] F.A. Berezin, *The method of second quantization*, Academic Press, 1966

[33] L. Girardello, M.T. Grisaru, *Soft breaking of supersymmetry*, Nucl. Phys. **B 194**, (1982), 65-76

[34] P. Fayet, J. Iliopoulus, *Spontaneously broken supergauge symmetries and Goldstone spinors*, Phys. Lett **B 51** (1974), 461-464

Danksagung

Für die Bereitschaft, mir dieses Thema für die Diplomarbeit zur Verfügung zu stellen, danke ich Prof. W. Hollik.
Mein besonderer Dank gilt Dr. habil. W. Lang für die geduldigen und genauen Korrekturen dieser Arbeit in ihren verschiedenen Stadien. Er hatte stets ein offenes Ohr für meine Fragen und Probleme und sich dafür immer die nötige Zeit genommen.
Für die Übernahme des Korreferates möchte ich mich bei Prof. F. Klinkhamer bedanken.
Allen Mitgliedern des Instituts für Theoretische Physik danke ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre.

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig
geschrieben und nur die angegebenen Hilfsmittel
und Quellen verwendet zu haben.

Tom-Alexander Langhoff

Karlsruhe, den 15. Juli 1998