

Theoretische Teilchenphysik II

WINTERSEMESTER 2011/2012

KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)

GEHALTEN VON

MILADA MARGARETE MÜHLEITNER

Inhaltsverzeichnis

1	Bemerkungen	1
1.1	Literatur	1
2	Eichsymmetrien	3
2.1	Kopplung an ein Photon	3
2.2	Nicht-abelsche Eichgruppen	5
2.3	Die Matrizen der $SU(N)$	5
2.4	Darstellung nicht-abelscher Gruppen	7
2.5	Nichtabelsche Eichtransformationen	8
2.6	Die QCD Lagrangedichte	9
2.7	Chirale Eichtheorien	10
2.8	Addendum: Mathematische Hintergrundinformationen	11
2.8.1	Gruppen	11
2.8.2	Algebra	11
2.8.3	Clifford-Algebren	12
2.8.4	Liealgebren	12
3	Spontane Symmetriebrechung	13
3.1	Beispiel: Ferromagnetismus	13
3.2	Beispiel: Feldtheorie für ein komplexes Feld	13
3.3	Das Goldstone Theorem	15
3.4	Chirale Symmetriebrechung in der QCD	16
3.5	Spontane Brechung einer $O(N)$ Symmetrie	18
3.6	Spontan gebrochene Eichsymmetrien	18
3.7	Addendum: Goldstone Theorem - klassische Feldtheorie	20
4	Das Standardmodell der Teilchenphysik	23
4.1	Eine kurze Vorgeschichte des Standardmodells der Teilchenphysik	23
4.2	Unitarität: der Pfad zu Eichtheorien	27
4.3	Eichsymmetrie und Teilcheninhalt	29
4.4	Glashow-Salam-Weinberg theory für Leptonen	30
4.5	Einführung der W, Z Boson- und Fermionmassen	34
4.6	Quarks in der Glashow-Salam-Weinberg Theorie	37
4.7	Die CKM Matrix	39
4.7.1	Die Fermion Yang-Mills Lagrangedichte	39
4.7.2	Massenmatrix und CKM Matrix	40
4.8	Eichung	45

4.8.1	Feynman Pfadintegrale	45
4.8.2	Skalare Felder	50
4.8.3	Grassmann Variablen	54
4.8.4	Eichfixierung	57
4.9	Wechselwirkungen	65
4.9.1	ϕ^4 Theory	65
4.10	Fermifelder	67
4.10.1	Erzeugendes Funktional für wechselwirkende Feldtheorien	70
4.11	Nicht-abelsche Eichtheorien	70
4.11.1	Greenfunktion in der Störungstheorie	72
4.12	Die Feynmanregeln der Quantenchromodynamik	74
5	Renormierung	79
5.1	Klassifizierung lokaler Wechselwirkungen	85
5.2	Renormierung der GSW Theorie	90
5.2.1	Renormierungskonstanten	90
5.2.2	Renormierungsbedingungen	90
5.3	1-Schleifen Integrale	93
5.3.1	Hilfreiche Formeln	96
5.3.2	Berechnung der skalaren Integrale	97
5.4	Höhere Ordnungen: Physikalische Ergebnisse	98
5.4.1	Fermikonstante	98
6	Quantenchromodynamik - QCD	105
6.1	Einführung der Farbe	105
6.2	Gluon Eichfelder	108
6.3	Asymptotische Freiheit	111

Kapitel 1

Bemerkungen

In den einzelnen Kapiteln der Vorlesung gibt es am Ende Kapitel, die mit **Addendum** bezeichnet sind. Diese enthalten Zusatzinformationen für den interessierten Leser, sind aber nicht verpflichtend für die Übungen.

Kapitel, die aus Zeitgründen in den einzelnen Vorlesungen nicht behandelt werden, werden auf der Webseite explizit genannt. Auf sie kann verzichtet werden. Sie verbleiben im Vorlesungsskript lediglich als zusätzliche Information.

Die Vorlesung folgt keinem bestimmten Buch. Die angegebene Literatur ist hilfreich, den Sachverhalt zu vertiefen bzw. nochmals auf andere Weise dargestellt zu sehen oder aber zusätzliche Hintergrundinformationen zu erhalten, die in der Vorlesung aus Zeitgründen nicht alle behandelt werden können.

1.1 Literatur

- M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, 1995)
- T.-P. Cheng, L.-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* (Oxford University Press)
- C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill)
- P. Ramon, *Field Theory: a modern primer*
- M. Böhm, A. Denner and H. Joos, *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction* (Teubner, 2001)
- Chris Quigg *Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions* (Benjamin/Cummings, 1983)
- G. Dissertori, I. Knowles, M. Schmeling, *Quantum Chromodynamics* (Oxford University Press)
- O. Nachtmann, *Elementary Particle Physics* (Springer 1990)
- L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* (2nd ed., Cambridge University Press, 1996)

- R. K. Ellis, W. J. Stirling and B. R. Webber, *QCD and Collider Physics* (Cambridge University Press 1996)
- P. H. Frampton, *Gauge Field Theories* (Benjamin/Cummings)

Dabei ist Literatur (unter anderem) über Renormierung

- C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill)
- P. Ramon, *Field Theory: a modern primer*
- M. Böhm, A. Denner and H. Joos, *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction* (Teubner, 2001)
- W.J.P. Beenakker, *Electroweak corrections: techniques and applications*

Und Literatur über Pfadintegrale z.B.

- Gert Roepstorff, *Path Integral Approach to Quantum Physics* (Springer)

Weitere Literatur für den interessierten Leser

- Martinus Veltman *Facts and Mysteries in Elementary Particle Physics* (World Scientific, 2003)
- V. D. Barger and R. J. N. Phillips, *Collider Physics* (Addison-Wesley, 1997)
- Eds. Roger Cashmore, Luciano Maiani, Jean-Pierre Revol *Prestigious Discoveries at CERN* (Springer, 2004)

Kapitel 2

Eichsymmetrien

Dirac Lagrangedichte für ein freies Fermionfeld Ψ der Masse m lautet

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi . \quad (2.1)$$

Diese ist symmetrisch unter $U(1)$, d.h. invariant unter Transformationen

$$\Psi(x) \rightarrow \exp(-i\alpha)\Psi(x) = \Psi - i\alpha\Psi + \mathcal{O}(\alpha^2) . \quad (2.2)$$

Und für den adjungierten Spinor $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$,

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \exp(i\alpha)\bar{\Psi}(x) . \quad (2.3)$$

Der mit der Symmetrie verbundene Noether-Strom lautet

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} \frac{\delta \Psi}{\delta \alpha} + \frac{\delta \bar{\Psi}}{\delta \alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \bar{\Psi}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu(-i\Psi) = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi , \quad (2.4)$$

mit

$$\partial_\mu j^\mu = 0 . \quad (2.5)$$

2.1 Kopplung an ein Photon

Bei Kopplung an ein Photon lautet die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi = \mathcal{L}_0 - qj^\mu A_\mu , \quad (2.6)$$

wobei j^μ in Glg. (2.4) gegeben ist. Bei Eichtransformation des externen Photonfeldes A_μ ,

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \quad (2.7)$$

geht die Lagrangedichte über in

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - qj^\mu A_\mu - \underbrace{qj^\mu \partial_\mu \Lambda}_{q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\Lambda} . \quad (2.8)$$

D.h. $\mathcal{L}$ ist nicht eichinvariant. Die Felder Ψ und $\bar{\Psi}$ müssen so geändert werden, daß die Lagrangedichte eichinvariant wird. Dies geschieht durch Einführung eines x -abhängigen Parameters α , also $\alpha = \alpha(x)$. Damit

$$i\partial_\mu \Psi \rightarrow i\partial_\mu(\exp(-i\alpha)\Psi) + (\partial_\mu \alpha)\exp(-i\alpha)\Psi , \quad (2.9)$$

so daß

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \partial_\mu \alpha . \quad (2.10)$$

Dieser Term kannzeliert den zusätzlichen Term in Glg. (2.8) falls

$$\alpha(x) = q\Lambda(x) . \quad (2.11)$$

Damit lautet die vollständige Eichtransformation

$$\Psi \rightarrow \Psi'(x) = U(x)\Psi(x) \quad \text{mit} \quad U(x) = \exp(-iq\Lambda(x)) \quad (U \text{ unitär}) \quad (2.12)$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)U^\dagger(x) \quad (2.13)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) = U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{q}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x) . \quad (2.14)$$

Die Lagrangedichte transformiert sich gemäß

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \bar{\Psi} \gamma^\mu U^{-1} i \partial_\mu (U \Psi) - q \bar{\Psi} U^{-1} \gamma^\mu \left(U A_\mu U^{-1} - \frac{i}{q} U \partial_\mu U^{-1} \right) U \Psi - m \bar{\Psi} U^{-1} U \Psi \\ &= \bar{\Psi} \gamma^\mu i \partial_\mu \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\mu (U^{-1} i (\partial_\mu U)) \Psi - q \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu + \bar{\Psi} \gamma^\mu (i (\partial_\mu U^{-1}) U) \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \\ &= \mathcal{L} + i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu (U^{-1} U) \Psi = \mathcal{L} . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Minimale Substitution $p_\mu \rightarrow p_\mu - qA_\mu$ führt auf

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu \equiv iD_\mu . \quad (2.16)$$

Dabei ist $D_\mu(x)$ die *kovariante Ableitung*. Der Begriff *kovariant* bedeutet, daß sie sich genauso wie das Feld transformiert

$$\Psi(x) \rightarrow U(x)\Psi(x) \quad \text{und} \quad D_\mu \Psi(x) \rightarrow U(x)(D_\mu \Psi(x)) . \quad (2.17)$$

Das heißt

$$(D_\mu \Psi)' = D'_\mu \Psi' = D'_\mu U \Psi \stackrel{!}{=} U D_\mu \Psi , \quad (2.18)$$

so daß sich die kovariante Ableitung transformiert gemäß

$$D'_\mu = U D_\mu U^{-1} = \exp(-iq\Lambda)(\partial_\mu + iqA_\mu) \exp(iq\Lambda) = \partial_\mu + iq\partial_\mu \Lambda + iqA_\mu = \partial_\mu + iqA'_\mu \quad (2.19)$$

Damit ist

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \gamma^\mu i D_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \quad (2.20)$$

offensichtlich eichinvariant.

Die kinetische Energie der Photonen ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu . \quad (2.21)$$

Der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ lässt sich mithilfe der kovarianten Ableitung ausdrücken. Wir wählen folgenden Ansatz für den Tensor 2. Stufe

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu - iqA_\mu, \partial_\nu - iqA_\nu] = -iq[\partial_\nu, A_\mu] - iq[A_\mu, \partial_\nu] = -iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) . \quad (2.22)$$

Damit haben wir für den Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \frac{i}{q} [D^\mu, D^\nu] . \quad (2.23)$$

Sein Transformationsverhalten ist gegeben durch

$$\frac{i}{q} [U D^\mu U^{-1}, U D^\nu U^{-1}] = \frac{i}{q} U [D^\mu, D^\nu] U^{-1} = U F^{\mu\nu} U^{-1} . \quad (2.24)$$

2.2 Nicht-abelsche Eichgruppen

Wir verwenden die Lagrangedichte für N Diracfelder ψ_i der Masse m

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1\dots N} \bar{\psi}_j i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_j - m \sum_{j=1\dots N} \bar{\psi}_j \psi_j . \quad (2.25)$$

Diese ist symmetrisch unter $U(N)$, wobei $U(N)$ die Gruppe der unitären $N \times N$ Matrizen ist. Betrachte folgende Transformation

$$\psi_j \rightarrow \sum_{k=1\dots N} U_{ik} \psi_k \equiv U_{ik} \psi_k , \quad (2.26)$$

wobei die letzte Gleichung bedeutet, daß wir die Einstein'sche Summenkonvention verwenden. Das heißt, über gleiche Indizes wird summiert. Wir haben also

$$\Psi \rightarrow U\Psi \quad \text{mit} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} , \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} U_{1k} \psi_k \\ U_{2k} \psi_k \\ \vdots \\ U_{Nk} \psi_k \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

und

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi \rightarrow \bar{\Psi} U^{-1} i\gamma^\mu \partial_\mu U\Psi - m \bar{\Psi} U^{-1} U\Psi = \mathcal{L} . \quad (2.28)$$

Beispiele:

- $\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$: $SU(2)$ -Transformationen im Isospinraum, Proton-Neutron-Dublett.
- $\Psi = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$: $SU_L(2)$, schwache Wechselwirkung auf linkshändige Fermionen.
- $\Psi = (q_1, q_2, q_3)^T$, quarks, $SU(3)$. Dabei ist jedes q_i ($i = 1, 2, 3$) ein vierkomponentiger Spinor. Die Lagrangedichte ist invariant unter $SU(3)$ -Transformationen.

2.3 Die Matrizen der $SU(N)$

Die Elemente der $SU(N)$ werden allgemein dargestellt durch

$$U = \exp\left(i\theta^a \frac{\lambda^a}{2}\right) \quad \text{mit} \quad \theta^a \in \mathbb{R} . \quad (2.29)$$

Dabei sind $\lambda^a/2$ die Generatoren der Gruppe $SU(N)$. Für die $SU(2)$ sind die λ^a durch die Pauli-Matrizen σ^i ($i = 1, 2, 3$) gegeben und θ^a ist ein 3-komponentiger Vektor. Für ein Element der Gruppe $SU(2)$ haben wir also

$$U = \exp\left(i\vec{\omega} \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) . \quad (2.30)$$

Für ein allgemeines U gilt

$$U^\dagger = \exp \left(-i\theta^a \left(\frac{\lambda^a}{2} \right)^\dagger \right) \stackrel{!}{=} U^{-1} = \exp \left(-i\theta^a \frac{\lambda^a}{2} \right) . \quad (2.31)$$

Die Generatoren müssen also hermitesch sein, d.h.

$$(\lambda^a)^\dagger = \lambda^a . \quad (2.32)$$

Außerdem muß für die $SU(N)$ gelten

$$\det(U) = 1 . \quad (2.33)$$

Mit

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{Sp}(A)) \quad (2.34)$$

ergibt sich

$$\det \left(\exp \left(i\theta^a \frac{\lambda^a}{2} \right) \right) = \exp \left(i\theta \text{Sp} \left(\frac{\lambda^a}{2} \right) \right) \stackrel{!}{=} 1 . \quad (2.35)$$

Daraus folgt

$$\text{Sp}(\lambda^a) = 0 . \quad (2.36)$$

Die Generatoren der $SU(N)$ müssen spurlos sein. Die Gruppe $SU(N)$ besitzt $N^2 - 1$ Generatoren λ^a mit $\text{Sp}(\lambda^a) = 0$. Für die $SU(3)$ sind dies die Gell-Mann-Matrizen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Die Matrizen $\lambda^a/2$ sind normiert durch

$$\text{Sp} \left(\frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^b}{2} \right) = \frac{1}{2} \delta^{ab} . \quad (2.38)$$

Für die Pauli-Matrizen ($i = 1, 2, 3$) gilt

$$\text{Sp}(\sigma_i^2) = 2 \quad \text{und} \quad \text{Sp}(\sigma_1\sigma_2) = \text{Sp}(i\sigma_3) = 0 . \quad (2.39)$$

Multipliziert mit $1/2$ bilden sie die Generatoren der $SU(2)$. Die Generatormatrizen genügen der Vollständigkeitsrelation

$$\frac{\lambda_{ij}^a}{2} \frac{\lambda_{kl}^a}{2} = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{kj} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) , \quad (2.40)$$

denn

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\lambda_{ii}^a}{2} \frac{\lambda_{kl}^a}{2} = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{ki} - \frac{1}{2N} \delta_{ii} \delta_{kl} = \frac{1}{2} \delta_{kl} - \frac{1}{2} \delta_{kl} = 0 . \quad (2.41)$$

2.4 Darstellung nicht-abelscher Gruppen

Sei G eine Gruppe mit den Elementen $g_1, g_2 \dots \in G$. Eine n -dimensionale Darstellung von G ist gegeben durch die Abbildung $G \rightarrow C^{(n,n)}$, $g \rightarrow U(g)$. D.h. die Abbildung abstrakter Elemente der Gruppe auf komplexe $n \times n$ Matrizen, so daß $U(g_1 g_2) = U(g_1) U(g_2)$ gilt und damit die Gruppeneigenschaften erhalten bleiben. Ein $U \in SU(N)$ lässt sich schreiben als $U = \exp(i\theta^a T^a)$. Für die $SU(2)$ also $U = \exp(i\vec{\omega} \cdot \vec{J})$. Die Gruppe $SU(N)$ besitzt $N^2 - 1$ Generatoren T^a . Für die $SU(2)$ sind dies die Drehimpulsoperatoren J_i . Die $N^2 - 1$ reellen Parameter θ^a sind in der $SU(2)$ geben durch $\vec{\omega}$. Die fundamentale Darstellung der $SU(2)$ lautet $J_i = \sigma_i/2$ und im allgemeinen Fall $T^a = \lambda^a/2$. Die Generatoren genügen der folgenden Kommutatorrelation

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c . \quad (2.42)$$

Die f^{abc} sind die Strukturkonstanten der $SU(N)$ -Lie-Algebra. Sie sind total antisymmetrisch und definieren $(N^2 - 1)(N^2 - 1)$ -dimensionale Matrizen $T_{lk}^a \equiv -i f_{lk}^a \equiv -i f^{alk}$. Im Fall der $SU(2)$ haben wir

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k . \quad (2.43)$$

Es gilt ferner

$$\text{Sp} \left(\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] \frac{\lambda^c}{2} \right) = i f^{abe} \text{Sp} \left(\frac{\lambda^e}{2} \frac{\lambda^c}{2} \right) = i f^{abe} \frac{1}{2} \delta^{ec} = \frac{i}{2} f^{abc} . \quad (2.44)$$

Die Generatoren erfüllen die Jacobi-Identität

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0 . \quad (2.45)$$

Unter Benutzung von (2.42) erhält man

$$0 = (-i f_{cl}^b)(-i f_{lk}^a) + (-i f_{lc}^a)(-i f_{lk}^b) + i f^{abl}(-i f_{ck}^l) . \quad (2.46)$$

Damit

$$0 = (T^b T^a)_{ck} - (T^a T^b)_{ck} + i f^{abl} (T^l)_{ck} . \quad (2.47)$$

Damit haben wir eine $N^2 - 1$ -dimensionale Darstellung der $SU(N)$ Lie-Algebra erhalten

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c . \quad (2.48)$$

Dies ist die *adjungierte Darstellung*. Es gibt folgende $SU(N)$ Darstellungen

- $d = 1$: triviale Darstellung (Singulett).
- $d = N$: fundamentale Darstellung ($\lambda^a/2$), antifundamentale Darstellung ($-\lambda^{*a}/2$).
- $d = N^2 - 1$: adjungierte Darstellung.

2.5 Nichtabelsche Eichtransformationen

Ausgangspunkt ist die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1\dots N} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_i = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi \quad \text{mit} \quad \bar{\Psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_N) . \quad (2.49)$$

Die Lagrangedichte ist invariant unter einer globalen $SU(N)$ Eichtransformation

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \exp(i\theta^a T^a) \Psi = (1 + i\theta^a T^a + \mathcal{O}((\theta^a)^2)) \Psi = U \Psi \quad \text{und} \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} U^{-1} \quad (2.50)$$

Die Generatoren T^a sind

$$\begin{aligned} \text{fundamentale Darstellung: } & (T^a)_{ij} = \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij} & d = N \\ \text{adjungierte Darstellung} & (T^a)_{bc} = -if^{abc} & d = N^2 - 1 \\ \text{triviale Darstellung} & T^a = 0 \Leftrightarrow U(\theta) = 1 . \end{aligned} \quad (2.51)$$

Betrachten wir nun lokale Symmetrien, also $\theta^a = \theta^a(x)$. Die Transformation von Ψ sei $\Psi' = U\Psi$. Wir führen eine kovariante Ableitung ein,

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a . \quad (2.52)$$

Die T^a können verschieden sein, aber A_μ^a ist identisch in allen D_μ . Beispiel Supersymmetrie (SUSY)

$$\begin{aligned} \text{squark, quark} & T^a = \frac{\lambda^a}{2} & (d = N) \\ \text{gluino} & (T^a)_{bc} = -if^{abc} & (d = N^2 - 1) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Die kovariante Ableitung transformiert sich genauso wie Ψ , also $(D_\mu \Psi)' = U(D_\mu \Psi)$. Damit

$$(D_\mu \Psi)' = D'_\mu \Psi' = D'_\mu U \Psi \Rightarrow D'_\mu U = U D_\mu \quad (2.54)$$

Ist erfüllt wenn

$$\partial_\mu - igA'_\mu = D'_\mu = U D_\mu U^{-1} = U(\partial_\mu - igA_\mu)U^{-1} = UU^{-1}\partial_\mu + U(\partial_\mu U^{-1}) - igUA_\mu U^{-1} \Rightarrow \quad (2.55)$$

$$A'_\mu = \frac{i}{g} U(\partial_\mu U^{-1}) + UA_\mu U^{-1} . \quad (2.56)$$

Wichtig: A_μ^a ist unabhängig von der Darstellung U . Mit infinitesimalem

$$U = \exp(iT^a \theta^a) = 1 + iT^a \theta^a + \mathcal{O}(\theta^a{}^2) \quad (2.57)$$

haben wir

$$\begin{aligned} A'_\mu &= A_\mu^b T^b = U(-i)T^a (\partial_\mu \theta^a) U^{-1} + \underbrace{(1 + i\theta^a T^a) A_\mu^c T^c (1 - i\theta^b T^b)}_{A_\mu^c T^c + iA_\mu^c \underbrace{(T^a T^c - T^c T^a)}_{if^{acb} T^b} \theta^a} \\ &= \underbrace{T^b \left(\frac{1}{g} \partial_\mu \theta^b + A_\mu^b + i(-if^{abc})\theta^a A_\mu^c \right)}_{A_\mu^b} . \end{aligned} \quad (2.58)$$

Der Feldstärketensor sei definiert durch $F^{\mu\nu} \sim [D^\mu, D^\nu]$. Betrachte den Kommutator

$$\begin{aligned}
 [D^\mu, D^\nu] &= [\partial_\mu - igT^a A_\mu^a, \partial_\nu - igT^b A_\nu^b] = -igT^b \partial_\mu A_\nu^b - igT^a (-\partial_\nu A_\mu^a) + (-ig)^2 A_\mu^a A_\nu^b \underbrace{[T^a, T^b]}_{if^{abc}T^c} \\
 &= -igT^a (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \underbrace{f^{bca}}_{f^{abc}} A_\mu^b A_\nu^c) = -igT^a F_{\mu\nu}^a = -igF_{\mu\nu} .
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Die $F_{\mu\nu}^a$ sind unabhängig von der Darstellung der T^a . Wir haben für das Transformationsverhalten

$$F'_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [D'^\mu, D'^\nu] = \frac{i}{g} [UD_\mu U^{-1}, UD_\nu U^{-1}] = UF_{\mu\nu} U^{-1} \quad \text{homogene Transformation} \tag{2.60}$$

Und mit Glg. (2.58)

$$(F_{\mu\nu}^a)' = F_{\mu\nu}^a + i(-if^{bac})\theta^b F_{\mu\nu}^c + \dots \tag{2.61}$$

Transformiert sich homogen unter der adjungierten Darstellung. Ferner folgt daraus, dass

$$\begin{aligned}
 F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a &= 2\text{Sp}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \left(= 2\text{Sp}(F^{a\mu\nu} T^a F_{\mu\nu}^b T^b) = 2F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^b \underbrace{\text{Sp}(T^a T^b)}_{\frac{1}{2}\delta^{ab}} = F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a \right) \\
 &\text{ist eichinvariant.}
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Damit haben wir für die kinetische Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{kin,A} = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a = -\frac{1}{2} \text{Sp}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) . \tag{2.63}$$

2.6 Die QCD Lagrangedichte

Beispiel: Die Quantenchromodynamik (QCD) ist invariant unter der Farb- $SU(3)$. Die 6 Quarkfelder tragen Farbladung und befinden sich in der fundamentalen Darstellung

$$\Psi_q = \begin{pmatrix} \psi_{q1} \\ \psi_{q2} \\ \psi_{q3} \end{pmatrix} \quad q = u, d, c, s, t, b . \tag{2.64}$$

Sie bilden Triplets. Die 8 Gluonen G^μ befinden sich in der adjungierten Darstellung. Die QCD Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} G^{a\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + \sum_{q=1\dots 6} \bar{\psi}_q (i\gamma^\mu D_\mu - m_q) \psi_q , \tag{2.65}$$

mit

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c . \tag{2.66}$$

Die Quarkmassen haben die Werte

$$m_u \approx 1.7\dots 3.1 \text{ MeV} \quad m_d \approx 4.1\dots 5.7 \text{ MeV} \quad m_s \approx 100 \text{ MeV} \tag{2.67}$$

$$m_c \approx 1.29 \text{ GeV} \quad m_b \approx 4.19 \text{ GeV} \quad m_t \approx 173 \text{ GeV} . \tag{2.68}$$

2.7 Chirale Eichtheorien

Betrachte

$$\mathcal{L}_f = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi . \quad (2.69)$$

In der chiralen Darstellung sind die 4×4 γ -Matrizen gegeben durch

$$\gamma^\mu = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_-^\mu \\ \sigma_+^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} , \quad (2.71)$$

wobei σ_i ($i = 1, 2, 3$) die Pauli-Matrizen sind. Mit

$$\Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 = (\chi^\dagger, \varphi^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} = (\varphi^\dagger, \chi^\dagger) \quad (2.72)$$

ergibt sich

$$\bar{\Psi} i \gamma^\mu D_\mu \Psi = i(\varphi^\dagger, \chi^\dagger) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sigma_-^\mu \\ \sigma_+^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_\mu \chi \\ D_\mu \varphi \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \sigma_-^\mu D_\mu \varphi \\ \sigma_+^\mu D_\mu \chi \end{pmatrix}} = \varphi^\dagger i \sigma_-^\mu D_\mu \varphi + \chi^\dagger i \sigma_+^\mu D_\mu \chi . \quad (2.73)$$

Die Eichwechselwirkung gilt unabhängig für

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi \quad \text{und} \quad \Psi_R = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi . \quad (2.74)$$

Die Ψ_L und Ψ_R können unterschiedliche Eichdarstellungen haben. Aber

$$m \bar{\Psi} \Psi = m(\varphi^\dagger, \chi^\dagger) \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} = m(\varphi^\dagger \chi + \chi^\dagger \varphi) = m(\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L) . \quad (2.75)$$

Der Massenterm mischt Ψ_L und Ψ_R . Daraus folgt *Symmetriebrechung* falls Ψ_L und Ψ_R unterschiedliche Darstellungen haben.

Wie sieht es mit einem Massenterm für Eichbosonen aus? Betrachte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \underbrace{F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a}_{\text{eichinvariant}} + \frac{m^2}{2} \underbrace{A^{a\mu} A_\mu^a}_{\text{nicht eichinvariant}} . \quad (2.76)$$

Zum Beispiel für die $U(1)$

$$(A_\mu A^\mu)' = (A_\mu + \partial_\mu \theta)(A^\mu + \partial^\mu \theta) = A_\mu A^\mu + 2A_\mu \partial^\mu \theta + (\partial_\mu \theta)(\partial^\mu \theta) . \quad (2.77)$$

Der Massenterm für A^μ bricht die Eichsymmetrie.

2.8 Addendum: Mathematische Hintergrundinformationen

2.8.1 Gruppen

Sei ein Paar $(G, *)$ mit einer Menge G und einer inneren zweistelligen Verknüpfung/Gruppenmultiplikation. $* : G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto a * b$ heißt Gruppe, wenn folgende Axiome erfüllt sind

1. Die Gruppe ist *abgeschlossen*. D.h. wenn $g, h \in G \Rightarrow g * h \in G$.
2. *Assoziativität*: $(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$.
3. $\exists$ *Einselement* e mit der Eigenschaft $g * e = e * g = g \quad \forall g \in G$.
4. Zu jedem g gibt es ein *Inverses* g^{-1} mit $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$.

Abelsche Gruppe: Eine Gruppe heißt *abelsch*, wenn $g * h = h * g$.

Kontinuierliche Gruppen: Sie besitzen unendlich viele Elemente und werden durch n Parameter beschrieben. Bei *Liegruppen* ist n endlich. Alle einparametrischen Liegruppen sind abelsch. Typisches Beispiel: $U(1)$ mit den Elementen $e^{i\phi}$ und ϕ als Parameter.

2.8.2 Algebra

Ein linearer Raum (Vektorraum) wird zu einer *Algebra* $\mathbf{A}$, wenn eine binäre Operation (Multiplikation) zweier Elemente m, n existiert, so daß $mn \in \mathbf{A}$. Es gelten die Linearitätsbeziehungen ($k, m, n \in \mathbf{A}$)

$$\begin{aligned} k(c_1 m + c_2 n) &= c_1 k m + c_2 k n \\ (c_1 m + c_2 n)k &= c_1 m k + c_2 n k . \end{aligned} \quad (2.78)$$

Dabei sind c_1, c_2 reelle (komplexe) Zahlen. Man spricht je nach Fall von reeller (komplexer) Algebra.

Eine Algebra heißt *kommutativ*, wenn

$$mn = nm . \quad (2.79)$$

Sie heißt *assoziativ*, wenn

$$k(mn) = (km)n . \quad (2.80)$$

Sie heißt *Algebra mit Einselement*, wenn sie ein Einselement $\mathbf{1}$ besitzt mit

$$\mathbf{1}m = m\mathbf{1} = m . \quad (2.81)$$

Sei $\mathbf{A}$ eine *assoziative* Algebra mit Einselement und $B \subset \mathbf{A}$ eine Menge von Elementen b^1, b^2 etc. Die Algebra heißt von B *erzeugt*, wenn jedes $m \in \mathbf{A}$ durch ein Polynom endlichen Grades in den Elementen b^i geschrieben werden kann,

$$m = c\mathbf{1} + \sum_{k=1}^p \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} c_{i_1 i_2 \dots i_k} b^{i_1} b^{i_2} \dots b^{i_k} , \quad (2.82)$$

wobei die Koeffizienten $c_{i_1 i_2 \dots i_k}$ komplexe Zahlen sind. Die Elemente der Menge B heißen *Generatoren* von $\mathbf{A}$. Das Einselement gehört nicht zu den Generatoren.

2.8.3 Clifford-Algebren

Eine Clifford-Algebra C_N wird von N Generatoren $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^N$ erzeugt, für die

$$\boxed{\xi^a \xi^b + \xi^b \xi^a = 2\delta^{ab}}$$

mit $a, b = 1, \dots, N$.

Die Dimension der Clifford-Algebra C_N ist 2^N . Es existiert ein enger Zusammenhang zwischen Clifford-Algebren und den Quantisierungsbedingungen für Fermionen.

Im allgemeinen lassen sich Clifford-Algebren für beliebige *symmetrische* Metriken g^{mn} definieren. So gilt insbesondere für die pseudoeuklidische Metrik

$$g_{ab} = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_N, \underbrace{-1, \dots, -1}_M), \quad (2.83)$$

$$\boxed{\text{Clifford-Algebra } C_{N,M}: \{\Gamma^m, \Gamma^n\} = 2g^{mn}\mathbf{1}.}$$

Die Anzahl der Generatoren ist $d = N + M$.

2.8.4 Liealgebren

Eine Algebra ist ein Vektorraum, der von den Generatoren $A, B, C, \dots$ aufgespannt wird: beliebige Linearkombinationen von Generatoren ergeben wieder Generatoren. Eine Algebra verfügt über ein *Produkt* zwischen den Generatoren. Im Fall der Liealgebra ist das Produkt der Kommutator

$$A \circ B := [A, B], \quad (2.84)$$

mit den folgenden Eigenschaften

$$A \circ B = -B \circ A \quad (2.85)$$

$$(A \circ B) \circ C + (C \circ A) \circ B + (B \circ C) \circ A = 0. \quad (2.86)$$

Liealgebren sind nicht assoziativ. Die Beziehung (2.86) heißt *Jacobi-Identität*.

Kapitel 3

Spontane Symmetriebrechung

Die Symmetrie einer Lagrangedichte ist *spontan gebrochen*, wenn die Lagrangedichte symmetrisch ist, aber das physikalische Vakuum *nicht* der Symmetrie gehorcht. Wir werden sehen, daß wenn die Lagrangedichte einer Theorie invariant unter einer exakten kontinuierlichen Symmetrie ist, welche nicht die Symmetrie des physikalischen Vakuums ist, eines oder mehrere masselose Spin-0 Teilchen auftreten. Diese werden Goldstone Bosonen genannt. Wenn die spontan gebrochene Symmetrie eine lokale Eichsymmetrie ist, führt das Zusammenspiel (induziert durch den Higgsmechanismus) zwischen den Möchtegern-Goldstone Bosonen und den masselosen Eichbosonen zu den Massen der Eichbosonen und entfernt die Goldstone Bosonen aus dem Spektrum.

3.1 Beispiel: Ferromagnetismus

Es handelt sich um ein System wechselwirkender Spins,

$$H = - \sum_{i,j} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j . \quad (3.1)$$

Das Skalarprodukt der Spinoperatoren ist unter Rotation ein Singulett, ist also rotationsinvariant. Im Grundzustand des Ferromagneten (bei genügend niedriger Temperatur, unterhalb der Curie-Temperatur) zeigen alle Spins in dieselbe Richtung. Dies ist der Zustand niedrigster Energie. Der Grundzustand ist nicht mehr rotationsinvariant. Bei Drehung des Systems entsteht ein neuer Grundzustand derselben Energie, der sich aber vom vorigen unterscheidet. Der Grundzustand ist also entartet. Die Auszeichnung einer bestimmten Richtung bricht die Symmetrie. Es liegt spontane Symmetriebrechung (SSB) vor.

3.2 Beispiel: Feldtheorie für ein komplexes Feld

Wir betrachten die Lagrangedichte für ein komplexes Skalarfeld

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad \text{mit dem Potential} \quad V = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 . \quad (3.2)$$

(Hinzufügen höherer Potenzen in ϕ führt zu einer nicht-renormierbaren Theorie.) Die Lagrangedichte ist invariant unter einer $U(1)$ -Symmetrie,

$$\phi \rightarrow \exp(i\alpha) \phi . \quad (3.3)$$

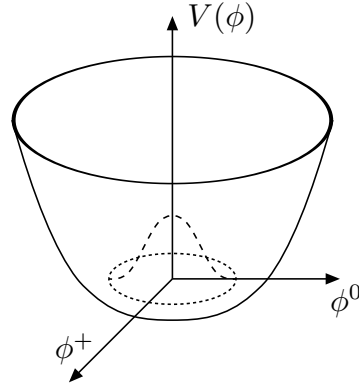


Abbildung 3.1: Das Higgspotential.

Wir betrachten den Grundzustand. Dieser ist gegeben durch das Minimum von V ,

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = \mu^2 \phi + 2\lambda(\phi^* \phi) \phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu^2 > 0 \\ \phi^* \phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} & \text{für } \mu^2 < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Der Parameter λ muß positiv sein, damit das System nicht instabil wird. Für $\mu^2 < 0$ nimmt das Potential die Form eines Mexikanerhutes an, siehe Fig. 3.1. Bei $\phi = 0$ liegt ein lokales Maximum, bei

$$|\phi| = v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}} \quad (3.5)$$

ein globales Minimum. Teilchen entsprechen harmonischen Oszillatoren für die Entwicklung um das Minimum des Potentials. Fluktuationen in Richtung der (unendlich vielen degenerierten) Minima besitzen Steigung null und entsprechen masselosen Teilchen, den Goldstone Bosonen. Fluktuationen senkrecht zu dieser Richtung entsprechen Teilchen mit Masse $m > 0$. Sie entsprechen dem(dem) Higgs Boson(en). Die Entwicklung um das Maximum bei $\phi = 0$ würde zu Teilchen negativer Masse (Tachyonen) führen, da die Krümmung des Potentials hier negativ ist.

Entwicklung um das Minimum bei $\phi = v$ führt zu (wir haben für das komplexe skalare Feld zwei Fluktuationen φ_1 und φ_2)

$$\phi = v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) = \left(v + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1\right) + i\frac{\varphi_2}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad (3.6)$$

$$\phi^* \phi = v^2 + \sqrt{2}v\varphi_1 + \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2). \quad (3.7)$$

Damit erhalten wir für das Potential

$$V = \lambda(\phi^* \phi - v^2)^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda^2} \quad \text{mit} \quad v^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \quad \Rightarrow \quad (3.8)$$

$$V = \lambda \left(\sqrt{2}v\varphi_1 + \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \right)^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda^2}. \quad (3.9)$$

Vernachlässige den letzten Term in V , da es sich nur um eine konstante Nullpunktverschiebung handelt. Damit ergibt sich für die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_2)^2 - 2\lambda v^2 \varphi_1^2 - \sqrt{2}v\lambda \varphi_1(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2. \quad (3.10)$$

Die in den Feldern quadratischen Terme liefern die Massen, die in den Feldern kubischen und quartischen Terme sind die Wechselwirkungsterme. Es gibt ein massives und ein masseloses Teilchen,

$$m_{\varphi_1} = 2v\sqrt{\lambda} \quad \text{und} \quad m_{\varphi_2} = 0 . \quad (3.11)$$

Bei dem masselosen Teilchen handelt es sich um das Goldstone Boson.

3.3 Das Goldstone Theorem

Seien

- N = Dimension der Algebra der Symmetriegruppe der vollständigen Lagrangedichte.
- M = Dimension der Algebra der Gruppe, unter welcher das Vakuum nach der spontanen Symmetriebrechung invariant ist.

$\Rightarrow$ Es gibt N-M Goldstone Bosonen ohne Masse in der Theorie.

Das Goldstone Theorem besagt, daß es für jeden spontan gebrochenen Freiheitsgrad der Symmetrie ein masseloses Goldstone Boson gibt.

Sei $\phi_i(x)$ ein Satz von Operatoren mit nichttrivialem Transformationsverhalten unter einer Symmetriegruppe G . Das Transformationsverhalten ist gegeben durch

$$[Q^a, \phi_i(x)] = T_{ij}^a \phi_j(x) \quad \text{mit} \quad Q^a = \int d^3y j^{0a}(y) \quad \text{und} \quad \partial_\mu j^{\mu a} = 0 . \quad (3.12)$$

Die T^a sind die Darstellungsmatrizen der Generatoren. Ist der Vakuumerwartungswert (VEV) $\langle 0 | \phi_j(x) | 0 \rangle \neq 0$ eines dieser nichttrivial transformierenden Felder ungleich null, dann existieren masselose Anregungen.

Beweis:

Falls $\langle 0 | \phi_j | 0 \rangle \neq 0$ gibt es ein T^a mit $0 \neq \langle 0 | T_{ij}^a \phi_j | 0 \rangle$, da der Satz von Generatoren T^a linear unabhängig ist. Damit gilt

$$0 \neq \langle 0 | T_{ij}^a \phi_j | 0 \rangle = \langle 0 | [Q^a, \phi_i] | 0 \rangle . \quad (3.13)$$

Es existiert also ein Ladungsoperator Q und ein Feld $\phi(x)$, für die $\langle 0 | [Q, \phi(x)] | 0 \rangle \neq 0$. Daraus ergibt sich $Q|0\rangle \neq 0$. Das Vakuum hat also eine Ladung $\neq 0$. Es transformiert sich nichttrivial unter Symmetrietransformationen. Da es auf x nicht ankommt, wähle den Nullpunkt. Damit

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} [Q(t), \phi(0)] = 0 . \quad (3.14)$$

Und damit also

$$\langle 0 | [Q(t), \phi(0)] | 0 \rangle = C \neq 0 . \quad (3.15)$$

Es ist

$$j^0(y) = \exp(-iP \cdot y) j^0(0) \exp(iP \cdot y) , \quad (3.16)$$

wobei P^μ der Impulsoperator ist. Sei die Translationssymmetrie spontan gebrochen,

$$\begin{aligned}
C &= \sum_n \int d^3y \langle 0 | \exp(-iP \cdot y) j^0(0) \exp(iP \cdot y) | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle \\
&\quad - \langle 0 | \phi(0) | n \rangle \langle n | \exp(-iP \cdot y) j^0(0) \exp(iP \cdot y) | 0 \rangle \\
&= \sum_n \int d^3y [\langle 0 | j^0(0) \exp(iP_n \cdot y) | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle \\
&\quad - \langle 0 | \phi(0) | n \rangle \langle n | \exp(-iP_n \cdot y) j^0(0) | 0 \rangle] \\
&= (2\pi)^3 \sum_n [\langle 0 | j^0(0) | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle \exp(iE_n t) - \\
&\quad \langle 0 | \phi(0) | n \rangle \langle n | j^0(0) | 0 \rangle \exp(-iE_n t)] \delta^{(3)}(\vec{P}_n) .
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Hier wurde

$$\int d^3y \exp(\pm i \vec{P}_n \vec{y}) = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{P}_n) \tag{3.18}$$

verwendet. Da

$$\exp(-iE_n t) = \exp(-iM_n t) \tag{3.19}$$

kann der Beitrag zu $C = \text{const.}$ nur von $M_n = 0$ kommen. Der Vakuumzustand $|n\rangle = |0\rangle$ trägt nicht bei, da sich beide Terme wegheben. Das heisst

$$\text{Es gibt einen Zustand } |n\rangle \neq |0\rangle \quad \text{mit } M_n = 0 \quad \text{und } \langle n | \phi(0) | 0 \rangle \neq 0 \neq \langle n | j^0(0) | 0 \rangle \tag{3.20}$$

Der Beweis verlangt

- Manifeste Lorentz-Kovarianz
- Vollständigkeit der physikalischen Zustände.

Diese Bedingung kann von Eichtheorien nicht erfüllt werden. Um beispielsweise die Elektrodynamik zu quantisieren, muß zwischen dem Lorentz-kovarianten Gupta-Bleuler Formalismus mit unphysikalischen indefiniten metrischen Zuständen oder der Quantisierung in einer physikalischen Eichung, wo manifeste Lorentz-Kovarianz verloren geht, gewählt werden.

Für Eichtheorien gilt das Goldstone Theorem nicht: Masselose skalare Freiheitsgrade werden von den Eichbosonen absorbiert, um ihnen Masse zu geben. Das Goldstone Phänomen führt zum Higgs Phänomen.

3.4 Chirale Symmetriebrechung in der QCD

Die Masse der Pionen ist sehr klein, $0 \approx m_\pi \approx 10^{-1} m_P$. Es stellt sich die Frage, warum. Da Pionen nur u und d -Quarks enthalten, betrachten wir nur diese beiden Quark-Flavours. Für die Masse der u, d -Quarks haben wir $m_{u,d} \approx \mathcal{O}(5 \text{ MeV}) \ll \Lambda_{QCD}$. Betrachten wir nun die Lagrangedichte für verschwindende u und d -Quarkmassen,

$$\mathcal{L} = \bar{u} i \not{D} u + \bar{d} i \not{D} d . \tag{3.21}$$

Mit $\psi = (u, d)^T$ können wir die Lagrangedichte in einen links- und rechtshändigen Anteil aufspalten,

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi \quad \text{und} \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi. \quad (3.22)$$

Also

$$\mathcal{L} = \sum_{s=L,R} \bar{u}_s i \not{D} u_s + \bar{d} i \not{D} d_s. \quad (3.23)$$

Sie ist invariant unter einer $SU(2)$ -Symmetrie

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \rightarrow \exp\left(i\theta_L \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} \rightarrow \exp\left(i\theta_R \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Die Lagrangedichte ist separat symmetrisch für die links- und rechtschiralen Terme. Sie ist also symmetrisch unter einer $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Es gibt die erhaltenen Ströme

$$(\bar{u}, \bar{d}) \gamma^\mu \frac{\vec{\sigma}}{2} \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (\bar{u}, \bar{d}) \gamma^\mu \frac{\vec{\sigma}}{2} \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Addition und Subtraktion der Ströme führt auf Vektor- (V_μ) und Axialvektorstrom (A_μ)

$$V_\mu^i = (\bar{u}, d) \gamma_\mu \frac{\sigma^i}{2} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_\mu^i = (\bar{u}, d) \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\sigma^i}{2} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.26)$$

Damit verbunden sind 6 erhaltene Ladungen. Die Felder selbst können keinen von null verschiedenen VEV haben. (Farbneutralität des QCD-Vakuums). Allerdings kann das Kondensat aus Quark und Antiquark einen nichtverschwindenden VEV besitzen,

$$\langle 0 | \bar{u}(x) u(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{d}(x) d(x) | 0 \rangle \neq 0. \quad (3.27)$$

Dieser erhält zwar die $SU(2)$ -Symmetrie, bricht aber die axiale Symmetrie spontan. Diese SSB führt auf drei masselose Goldstonebosonen, die Pionen π^+ , π^- und π^0 . Es handelt sich um pseudoskalare ($\leftarrow$ spontane Brechung der axialen Symmetrie) Mesonen. Dabei

$$\pi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 + i\pi_2) \quad \text{und} \quad \pi^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 - i\pi_2). \quad (3.28)$$

Ferner ($i, j = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_\mu^i(y) | \pi^j(k) \rangle &\neq 0 = \langle 0 | \exp(iP \cdot y) A_\mu^i(0) \exp(-iP \cdot y) | \pi^j(k) \rangle \\ &= \langle 0 | A_\mu^i(0) \exp(-ik \cdot y) | \pi^j(k) \rangle \\ &= \exp(-ik \cdot y) \langle 0 | A_\mu^i(0) | \pi^j(k) \rangle \\ &= i f_\pi \delta^{ij} \exp(-iky) k_\mu. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dies ist die Grundlage, um die Lebensdauer für Pionen auszurechnen. Dabei ist f_π die Zerfallskonstante des Pions.

Die Dimension von $SU(2)_L \times SU(2)_R$ ist $d_i = 6$. Diese wurde heruntergebrochen auf die $SU(2)$ mit Dimension $d_f = 3$. Die Anzahl der Goldstone Bosonen entspricht der Anzahl der spontan gebrochenen Generatoren $d_i - d_f = 3$. Wir haben also drei masselose Pionen.

In Wirklichkeit sind die u - und d -Quarks nicht masselos. Die chirale Symmetrie ist also nicht nur spontan, sondern auch explizit gebrochen. Da die betroffenen Quarkmassen jedoch sehr klein sind, ist auch die Masse der Pionen recht klein.

3.5 Spontane Brechung einer $O(N)$ Symmetrie

Wir betrachten die Lagrangedichte für N reelle skalare Felder

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1\dots N} \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - V \left(\sum_{i=1\dots N} \phi_i^2 \right) \quad \text{mit} \quad V \left(\sum_{i=1\dots N} \phi_i^2 \right) = V(\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}) . \quad (3.30)$$

Die Lagrangedichte ist symmetrisch bezüglich einer $O(N)$ Transformation $\phi_i \rightarrow O_{ij} \phi_j$ ($i, j = 1\dots N$). Bei O handelt es sich um orthogonale $N \times N$ Matrizen. Das Minimum von V sei bei $|\vec{\phi}| = v \neq 0$, z.B. $V = \lambda(\phi^2 - v^2)^2$. Wir entwickeln ϕ um das Minimum. O.B.d.A.,

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{N-1} \\ \varphi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{N-1} \\ v + \varphi_N \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Und

$$\phi^2 = v^2 + 2v\varphi_N + \sum_{i=1\dots N} \varphi_i^2 . \quad (3.32)$$

Die Richtung N bzw. φ_N ist damit ausgezeichnet. Die restlichen $N - 1$ Felder sind nach wie vor invariant unter einer $N - 1$ -dimensionalen Rotation. Für das Potential erhalten wir

$$V = \lambda \left(2v\varphi_N + \sum_{i=1\dots N} \varphi_i^2 \right)^2 = 4\lambda v^2 \varphi_N^2 + 4\lambda v \varphi_N \sum_{i=1\dots N} \varphi_i^2 + \lambda \left(\sum_{i=1\dots N} \varphi_i^2 \right)^2 . \quad (3.33)$$

Die in den Feldern kubischen und quartischen Terme beschreiben die Wechselwirkungen. Der in φ_N quadratische Term ist der mit φ_N assoziierte Massenterm. Die Masse zum Quadrat ist

$$m_{\varphi_N}^2 = 8\lambda v^2 . \quad (3.34)$$

Es handelt sich hier um ein massives *Higgs Boson*, welches einen nichtverschwindenden VEV v besitzt. Die übrigen $N - 1$ Felder sind masselos, $m_i = 0$ für $i = 1\dots N - 1$. Es handelt sich um die Goldstone Bosonen. Die ursprüngliche Symmetrie $O(N)$ mit $N(N-1)/2$ Generatoren wurde heruntergebrochen auf die Symmetrie $O(N-1)$ mit $(N-1)(N-2)/2$ Generatoren. Die Anzahl der Goldstone Bosonen d_G entspricht der Anzahl der gebrochenen Generatoren, also

$$\frac{1}{2} [N(N-1) - (N-1)(N-2)] = N-1 . \quad (3.35)$$

Wir haben also $N - 1$ Goldstone Bosonen.

3.6 Spontan gebrochene Eichsymmetrien

Wir betrachten als Beispiel die Lagrangedichte eines komplexen skalaren Feldes Φ , welches an ein Photonfeld A_μ koppelt, die invariant ist unter $U(1)$. Die lokalen Transformationen sind gegeben durch

$$\Phi \rightarrow \exp(-ie\Lambda(x))\Phi(x) \quad \text{und} \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda . \quad (3.36)$$

Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu - ieA_\mu)\Phi^*][(\partial^\mu + ieA^\mu)\Phi] \underbrace{-\mu^2\Phi^*\Phi - \lambda(\Phi^*\Phi)^2}_{-V(\Phi)} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.37)$$

(Bemerkung: Um die Lagrangedichte zu quantisieren muß noch ein Eichfixierungsterm eingeführt werden.) Für $\mu^2 < 0$ kommt es zu spontaner Symmetriebrechung der $U(1)$. Dann hat das Feld einen nichtverschwindenden VEV,

$$\langle 0|\Phi|0 \rangle = v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}}. \quad (3.38)$$

Die Fluktuationen um das Minimum (Entwicklung um das Minimum) sind gegeben durch

$$\Phi = v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) = \left(v + \frac{H(x)}{\sqrt{2}}\right) \exp\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\chi(x)}{v}\right) \left(\approx v + \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + i\chi(x))\right) \quad (3.39)$$

Damit

$$\begin{aligned} D_\mu\Phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\mu\varphi_1 + i\partial_\mu\varphi_2) + ieA_\mu v + \frac{e}{\sqrt{2}}A_\mu(-\varphi_2 + i\varphi_1) \\ &= \exp\left(i\frac{\chi}{\sqrt{2}v}\right) \left[\partial_\mu + ie\left(A_\mu + \frac{\partial_\mu\chi}{\sqrt{2}ev}\right)\right] \left(v + \frac{H}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Um bilineare Mischterme in den Feldern zu vermeiden, führen wir folgende Eichtransformation durch,

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\left(\frac{\chi}{\sqrt{2}ev}\right). \quad (3.41)$$

Damit ergibt sich für die kinetische Energie (nenne A' ab jetzt A)

$$\begin{aligned} (D_\mu\Phi)^*(D^\mu\Phi) &= \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + e^2 A_\mu A^\mu \left(v + \frac{H}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \underbrace{(e^2 v^2)}_{\frac{1}{2}m_A^2} A_\mu A^\mu \\ &\quad + \underbrace{e^2 A_\mu A^\mu \left(\sqrt{2}vH + \frac{H^2}{2}\right)}_{\text{Wechselwirkungsterme}}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Und die gesamte Lagrangedichte lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu + e^2 A_\mu A^\mu \left(\sqrt{2}vH + \frac{H^2}{2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \underbrace{2\lambda v^2}_{\frac{1}{2}m_H^2} H^2 - \sqrt{2}v\lambda H^3 - \frac{\lambda}{4}H^4. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Hierbei wurde der konstante Term λv^4 , welcher lediglich den Nullpunkt des Vakuums verschiebt, weggelassen. Die Massen des Higgsteilchens H und des Photons ergeben sich zu

$$m_A^2 = 2e^2 v^2 \quad (3.44)$$

$$m_H^2 = 4\lambda v^2. \quad (3.45)$$

Es tritt also ein massives Photon (Eichboson) und ein massives skalares Feld, das Higgsteilchen, auf. Das Goldstone Boson tritt als Freiheitsgrad nicht in Erscheinung. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist aber erhalten geblieben. Denn bei ungebrochener $U(1)$ -Symmetrie ist das Photon masselos und besitzt 2 physikalische Freiheitsgrade, die zwei transversalen Polarisierungen. Die unphysikalische skalare und longitudinale Polarisierung tragen im Gupta-Bleuler-Formalismus nicht bei. Das komplexe skalare Feld (entspricht einem geladenen Teilchen) Φ besitzt 2 Freiheitsgrade. Bei gebrochener $U(1)$ -Symmetrie haben wir ein massives Photon mit 3 Freiheitsgraden (mit longitudinaler Polarisierung) und ein massives reelles Higgs Boson mit einem Freiheitsgrad. Das Goldstone Boson wurde *aufgegessen*, um dem Photon Masse zu geben, um den longitudinalen Freiheitsgrad des massiven Eichteilchens zu liefern.

Nochmal: In Eichtheorien treten die Goldstone Bosonen nicht in Erscheinung. Sie sind *Möchtegern* (im Englischen *would-be*) Goldstone Bosonen. Bei SSB werden sie direkt in die longitudinalen Freiheitsgrade der massiven Eichbosonen absorbiert. Es gilt bei Eichtheorien: Seien

- N = Dimension der Algebra der Symmetriegruppe der vollständigen Lagrangedichte.
- M = Dimension der Algebra der Gruppe, unter welcher das Vakuum nach der spontanen Symmetriebrechung invariant ist.
- n = Die Anzahl der skalaren Felder

$\Rightarrow$

Es gibt M masselose Vektorfelder. (M ist die Dimension der Symmetrie des Vakuums.)

Es gibt $N - M$ massive Vektorfelder. ($N - M$ ist die Anzahl der gebrochenen Generatoren.)

Es gibt $n - (N - M)$ skalare Higgsfelder.

3.7 Addendum: Goldstone Theorem - klassische Feldtheorie

Proof of the Goldstone theorem in classical field theory:

The Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(\varphi) \quad (3.46)$$

is invariant under the rotation

$$\varphi \rightarrow e^{-i\alpha_a R_a} \varphi \quad a = 1, \dots, N, \quad (3.47)$$

which can infinitesimally be written as

$$\varphi \rightarrow \varphi - i\alpha R\varphi \quad (3.48)$$

From the invariance it follows that

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \varphi} \delta \varphi = -i\alpha \frac{\partial V}{\partial \varphi} R\varphi = 0 \quad \forall \alpha, \varphi \quad (3.49)$$

so that

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \varphi} R\varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} R = 0 \quad (3.50)$$

After spontaneous symmetry breaking we have the ground state

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{for } \varphi = v \neq 0 \quad (3.51)$$

from which follows the Goldstone equation:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \varphi} = 0 \quad \text{for } \varphi = v \quad (3.52)$$

and

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \varphi} \equiv M^2 \quad (3.53)$$

is the mass matrix of the system. Expanding φ about the ground state

$$\varphi = v + \varphi' \quad (3.54)$$

we have

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - [V(v) + \overbrace{\frac{\partial V}{\partial \varphi}}^0 \varphi' + \frac{1}{2}\varphi' \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \varphi} \varphi' + \dots] \\ &= \frac{1}{2}(\partial\varphi')^2 - \frac{1}{2}\varphi' \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \varphi} \varphi' + \dots \end{aligned} \quad (3.55)$$

The Goldstone equation is thus the condition equation for the masses

$$\underline{\underline{M^2 Rv = 0}} \quad (3.56)$$

- The equation is fulfilled if the generators R^a , $a = 1, 2, \dots, M$ leave the vacuum invariant: $R^a v = 0$.
- The remaining generators R^a , $a = M + 1, \dots, N$ form a set of linearly independent vectors $R^a v$. These are eigen-vectors of the zero-eigenvalues of the mass matrix M^2 . The zero-eigenvalue is hence $N - M$ times degenerated. Q.e.d.

Kapitel 4

Das Standardmodell der Teilchenphysik

Das Standardmodell (SM) der Teilchenphysik beschreibt die uns heute bekannten grundlegenden Bausteine der Materie und (bis auf die Gravitation) ihre Wechselwirkungen untereinander. Diese umfassen die elektromagnetische und die schwache (zusammenfassend die elektroschwache) und die starke Wechselwirkung. Zunächst soll ein kurzer historischer Abriss der Schritte gegeben werden bis zur Entwicklung der elektroschwachen Theorie von Sheldon Glashow, Abdus Salam und Steven Weinberg (1967).

4.1 Eine kurze Vorgeschichte des Standardmodells der Teilchenphysik

- Schwache Wechselwirkung: β Zerfall [A. Becquerel 1896, Nobelpreis 1903¹]

Antoine Henri Becquerel (15.12.1852 - 25.8.1908) war ein französischer Physiker, Nobelpreisträger und einer der Entdecker der Radioaktivität.

1896 entdeckte Becquerel eher zufällig Radioaktivität, als er die Phosphoreszenz von Uran Salzen untersuchte.

In 1903 teilte er sich den Nobelpreis mit Marie and Pierre Curie "in recognition of the extraordinary services he has rendered by his discovery of spontaneous radioactivity".

$N \rightarrow N' + e^-$ verletzt Energie- und Drehimpulserhaltung

Lise Meitner and Otto Hahn zeigten 1911, daß die Energie der emittierten Elektronen kontinuierlich ist. Da aber die freiwerdende Energie konstant ist, hatte man ein diskretes Spektrum erwartet. Um diesen offensichtlichen Energieverlust (und auch die Verletzung der Drehimpulserhaltung) zu erklären, schlug Wolfgang Pauli 1930 die Teilnahme eines neutralen extrem leichten Teilchens vor, das er "Neutron" nannte. Enrico Fermi änderte diesen Namen 1931 in "Neutrino", die verkleinerte Form des nahezu zeitgleich entdeckten Neutrons.

Lise Meitner (7. 11.1878 - 27.10.1968) war eine österreichische Physikerin, die Radioaktivität und Kernphysik untersuchte. Otto Hahn (8.3.1879 - 28.7.1968) war ein

¹geteilt mit Marie und Pierre Curie

deutscher Chemiker und erhielt 1944 den Nobelpreis in Chemie. Wolfgang Ernst Pauli (25.4.1900 - 15.12.1958) war ein österreichischer Physiker.

- Die Neutrino Hypothese: [W. Pauli 1930, Nobelpreis 1945]

$$N \rightarrow P + e^- + \bar{\nu}_e$$

Spin = 1/2, Masse ≈ 0

Der erste experimentelle Nachweis des Neutrinos gelang Clyde Cowan und Frederick Reines 1956 in einem der ersten großen Kernreaktoren.

Clyde Lorrain Cowan Jr (6.12.1919 - 24.5.1974) war der Mitentdecker des Neutrinos, zusammen mit Frederick Reines. Frederick Reines (6.3.1918 - 26.8.1998) war ein amerikanischer Physiker und erhielt 1995 den Nobelpreis für Physik in beider Namen.

- Die Fermi-Theorie: [E. Fermi, Nobelpreis 1938]

Enrico Fermi entwickelte eine Theorie der schwachen Wechselwirkungen analog zur Quantenelektrodynamik (QED), in der vier Fermionen direkt miteinander wechselwirken:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu J^\mu$$

[Für kleine Impulsüberträge können die Reaktionen durch eine punkrtartige Wechselwirkung genähert werden.]

Enrico Fermi (29.9.1901 - 28.11.1954) war ein italienischer Physiker. Er bekam 1938 den Nobelpreis für Physik für seine Arbeit über 'induced radioactivity'.

Bei der Fermi-Wechselwirkung wechselwirken 4 Fermionen direkt miteinander. Diese Wechselwirkung kann beispielsweise ein Neutron (oder ein down-Quark) in ein Elektron, ein Antineutrino und ein Proton (oder up-Quark) splitten. Baumgraphen Feynmandiagramme beschreiben die Wechselwirkung bemerkenswert gut. Allerdings können keine Schleifendiagramme berechnet werden, da die Fermi-Wechselwirkung **nicht renormierbar** ist. Die Lösung besteht darin, die 4-Fermion-Kontaktwechselwirkung durch eine vollständigere Theorie zu ersetzen - mit einem Austausch eines W oder eines Z Bosons wie in der elektroschwachen (EW) Theorie. Diese ist renormierbar. Bevor die EW Theorie konstruiert wurde konnten George Sudarshan und Robert Marshak, und unabhängig auch Richard Feynman und Murray Gell-Mann die korrekte Tensorstruktur (Vektor- minus Axialvektor $V - A$) der 4-Fermion Wechselwirkung bestimmen.

- Die Yukawa Hypothese: [H. Yukawa, Nobelpreis 1949 für 'his prediction of mesons based on the theory of nuclear forces']

Die punkrtartige Fermikopplung ist der Grenzfall des Austausches eines "schweren Photons" $\rightarrow W$ boson.

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \text{ punkrtartige Kopplung} \approx \frac{g^2}{m_W^2 + Q^2} \approx \frac{g^2}{m_W^2} \text{ mit Austausch eines } W\text{-Bosons}$$

Hideki Yukawa (23.1.1907 - 8.9.1981) war ein japanischer theoretischer Physiker und der erste Japaner, der den Nobelpreis gewann.

Hideki Yukawa etablierte die Hypothese, daß Kernkräfte durch den Austausch neuer hypothetischer Teilchen zwischen den Nukleonen erklärt werden können, in der gleichen Art und Weise, in der die elektromagnetische Kraft zwischen Elektronen durch den

Austausch von Photonen beschrieben werden kann. Dieses Teilchen, das die Kernkraft übermittelt, sollte aber im Gegensatz zu den Photonen nicht masselos sein, sondern eine Masse von 100 MeV haben. Dieser Wert kann aus der Reichweite der Kernkräfte abgeschätzt werden. Je größer die Masse des Teilchens, desto kleiner ist die Reichweite der Wechselwirkung, die von dem Teilchen vermittelt wird.

- Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung [*T.D. Lee, C.N. Yang, Nobelpreis 1957, und C.-S. Wu*]

Das $\tau - \theta$ Rätsel: Ursprünglich waren zwei verschiedene positive geladene Mesonen mit strangeness ($S \neq 0$) bekannt. Diese konnten aufgrund ihrer Zerfallsprozesse unterschieden werden:

$$\begin{array}{ll} \Theta^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0 & P_{2\pi} = +1 \\ \tau^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- & P_{3\pi} = -1 \end{array}$$

Die Endzustände dieser beiden Zerfälle haben unterschiedliche Parität. Da zu dieser Zeit angenommen wurde, daß die Parität in allen Reaktionen erhalten ist, hätten τ und θ zwei verschiedene Teilchen sein müssen. Präzisionsmessungen ihrer Masse und Lebensdauer wiesen jedoch keinen Unterschied zwischen den beiden Teilchen auf. Die Lösung dieses $\theta - \tau$ Rätsels war, die Paritätsverletzung der schwachen Wechselwirkung. Da beide Mesonen über die schwache Wechselwirkung zerfallen, erhält diese Reaktion nicht die Parität im Gegensatz zur ursprünglichen Annahme. Damit konnten beide Zerfälle vom selben Teilchen kommen, welches dann K^+ genannt wurde.

$\Theta^+ = \tau^+ = K^+ \Rightarrow \mathcal{P}$ verletzt. (π hat negative Parität.)

Tsung-Dao Lee (geboren 24.11.1926) ist ein chinesisch-amerikanischer Physiker. 1957 erhielt Lee mit C. N. Yang den Nobelpreis für Physik für ihre Arbeiten über Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung, die Chien-Shiung Wu experimentell nachwies. Lee and Yang waren die ersten chinesischen Nobelpreisgewinner. Chien-Shiung Wu (31. Mai 1912 in Liuho, Province Jiangsu, China ; - 16. Februar 1997 in New York, USA) war eine chinesisch-amerikanische Physikerin.*

V - A Theorie: Die Parität ist maximal verletzt. Dies bedeutet, daß die Axialkopplung die gleiche Stärke hat wie die Vektorkopplung $|c_V| = |c_A|$. Tatsächlich ist $c_V = -c_A$. Deshalb nennt man die Theorie "V - A Theorie".

- Nachweis des Neutrinos:

$$N \rightarrow P + e^- + \bar{\nu}_e \quad \bar{\nu}_e + P \rightarrow N + e^+$$

Das Neutrino konnte 1956 experimentell von Clyde L. Cowan und Frederick Reines im inversen β -Zerfall ($\bar{\nu}_e + P \rightarrow e^+ + N$) in einem Kernreaktor nachgewiesen werden. (Nobelpreis 1995 nur an Reines, da Cowan 1974 gestorben war.)

Das muon Neutrino wurde 1962 von Jack Steinberger, Melvin Schwartz und Leon Max Lederman entdeckt. Alle drei Physiker erhielten 1988 den Nobelpreis für ihre grundlegenden Experimente über Neutrinos.

Das tau-Neutrino wurde 2000 im DONUT-Experiment entdeckt.

- $\mathcal{CP}$ -Verletzung [*Cronin, Fitch, Nobelpreis 1980*]

$$\begin{array}{ll} K_L^0 \rightarrow 3\pi & \mathcal{CP} = - \\ K_S^0 \rightarrow 2\pi & \mathcal{CP} = + \end{array}$$

Details: Nach der Entdeckung der Paritätsverletzung wurde weitgehend angenommen, daß $\mathcal{CP}$ erhalten ist. Bei $\mathcal{CP}$ Symmetrie wären die physikalischen Kaon-Zustände durch $\mathcal{CP}$ Eigenzustände gegeben. Die starken Eigenzustände K^0 , $\bar{K}^0$ sind jedoch keine $\mathcal{CP}$ Eigenzustände, da die beiden Teilchen ihr jeweiliges Antiteilchen sind. $\mathcal{CP}$ Eigenzustände sind also Linearkombinationen dieser beiden Zustände.

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad \text{with} \quad \mathcal{CP}|K_1^0\rangle = |K_1^0\rangle \quad (4.1)$$

$$|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \quad \text{with} \quad \mathcal{CP}|K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle \quad (4.2)$$

Nimmt man $\mathcal{CP}$ Symmetrie an, so können diese Zustände nur unter $\mathcal{CP}$ Erhaltung zerfallen. Für die neutralen Kaonen führt dies auf zwei verschiedene Zerfallskanäle für K_1 und K_2 , mit sehr unterschiedlichen Phasenräumen und also sehr unterschiedlichen Lebensdauern:

$$K_1^0 \rightarrow 2\pi \quad (\text{schnell, da großer Phasenraum}) \quad (4.3)$$

$$K_2^0 \rightarrow 3\pi \quad (\text{langsam, da kleiner Phasenraum}) \quad (4.4)$$

Es wurden tatsächlich zwei verschiedene Arten neutraler Kaonen gefunden, die sehr verschiedene Lebensdauern haben. Diese heißen K_L^0 (long-lived, durchschnittliche Lebensdauer $(5.16 \pm 0.04) \cdot 10^{-8}$ s) und K_S^0 (short-lived, durchschnittliche Lebensdauer $(8.953 \pm 0.006) \cdot 10^{-11}$ s). Die durchschnittliche Lebensdauer des long-lived Kaon ist etwa einen Faktor 600 größer als die des short-lived Kaon.

$\mathcal{CP}$ Verletzung: Aufgrund der angenommenen $\mathcal{CP}$ war es natürlich, K_1^0, K_2^0 mit K_S^0, K_L^0 zu identifizieren. Damit würde K_L^0 immer in drei und nie in zwei Pionen zerfallen. Aber James Cronin und Val Fitch fanden 1964 heraus, daß das K_L^0 mit einer kleinen Wahrscheinlichkeit (etwa 10^{-3}) auch in zwei Pionen zerfällt. Die physikalischen Zustände sind also keine reinen $\mathcal{CP}$ Eigenzustände, sondern erhalten jeweils eine kleine Menge ϵ von dem anderen $\mathcal{CP}$ Eigenzustand. Man hat (ohne Normierung):

$$|K_S^0\rangle = (|K_1^0\rangle + \epsilon|K_2^0\rangle) \quad (4.5)$$

$$|K_L^0\rangle = (|K_2^0\rangle + \epsilon|K_1^0\rangle) \quad (4.6)$$

Dieses Phänomen wurde sorgfältig in den Experimenten überprüft und $\mathcal{CP}$ Verletzung durch Mischung genannt, da es durch die Mischung der $\mathcal{CP}$ Eigenzustände zu den physikalischen Zuständen gegeben ist. Cronin und Fitch erhielten 1980 den Nobelpreis für die Entdeckung. Da auf diese $\mathcal{CP}$ Verletzung nur indirekt durch die Beobachtung der Zerfälle geschlossen werden kann, nennt man diese auch **indirekte $\mathcal{CP}$ Verletzung**. Auch die **direkte $\mathcal{CP}$ Verletzung**, also eine Verletzung direkt in dem beobachteten Zerfall, ist auch beobachtet worden. Die direkte $\mathcal{CP}$ Verletzung ist für Kaonen einen weiteren Faktor 2000 kleiner als die indirekte und wurde experimentell erst 3 Jahrzehnte später nachgewiesen.

Val Logsdon Fitch (10.3.1923 in Merriman, Nebraska), amerikanischer Physiker. Fitch erhielt 1980 zusammen mit James Cronin den Physik Nobelpreis. James Watson Cronin (* 29.9.1931 in Chicago), US-amerikanischer Physiker.*

- Glashow-Salam-Weinberg Theorie (GSW): [*S.L. Glashow, A. Salam, S. Weinberg, Nobelpreis 1979*]

Sheldon Lee Glashow (5.12.1932 in New York) ist ein US-amerikanischer Physiker und Nobelpreisgewinner. Er erhielt 1979 zusammen mit Abdus Salam und Steven Weinberg den Physik Nobelpreis für ihre Arbeit an der 'theory of the unification of the weak and electromagnetic interaction between elementary particles', die unter anderem das Z Boson und die neutralen schwachen Ströme vorhersagt. Abdus Salam (* 29.1.1926 in Jhang, Pakistan; - 21. November 1996 in Oxford, England) war ein pakistanischer Physiker und Nobelpreisgewinner. Steven Weinberg (* 3.5.1933 in New York City) ist ein US-amerikanischer Physiker und Nobelpreisgewinner.*

Die elektroschwache Wechselwirkung ist die vereinigte Theorie der Quantenelektrodynamik und der schwachen Wechselwirkung. Zusammen mit der Quantenchromodynamik bildet sie die Säulen des Standardmodells der Physik. Die Vereinigung wurde ursprünglich theoretisch von S.L. Glashow, A. Salam and S. Weinberg 1967 beschrieben. Experimentell wurde die Theorie 1973 indirekt durch die Entdeckung der neutralen Ströme bestätigt und 1983 durch den experimentellen Nachweis der W und Z Bosonen. Eine Besonderheit der elektroschwachen Wechselwirkung ist die Paritätsverletzung.

4.2 Unitarität: der Pfad zu Eichtheorien

Die Fermi-Theorie beschreibt die μ, β Zerfälle, geladene Strom (charged current CC) Reaktionen bei kleinen Energien.

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_\lambda^* j^\lambda \quad \begin{array}{l} j_\lambda = \bar{e} \gamma_\lambda (1 - \gamma_5) \nu_e + (\mu) + (q) \\ G_F = 1.16 \cdot 10^{-5} / \text{GeV}^2 \end{array}$$

CC Streuung bei hohen Energien:

$$\sigma_{LL}(\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e) = \frac{G_F^2 s}{\pi}$$

s-Wellen Unitarität $\sigma_{LL} < \frac{4\pi}{s}$

Gültigkeitsbereich/Unitaritätsbeschränkung: $\sqrt{s} < \lesssim 600 \text{ GeV}$

$\Rightarrow$ 4 Schritte sind nötig, um aus der Fermi-Theorie eine konsistente Feldtheorie zu konstruieren, welche die 4-Punktkopplung dämpft.

Man nimmt an, daß die schwache Wechselwirkung wie die QED durch Vektorboson-Austausch vermittelt wird. Das intermediäre schwache Boson muß die folgenden 3 Eigenschaften haben:

- (i) Es trägt Ladung ± 1 , da die Manifestationen der schwachen Wechselwirkung (wie z.B. β -Zerfall) Ladungs-ändernd sind.
- (ii) Es muß recht massiv sein, um die kurze Reichweite der schwachen Kraft zu reproduzieren.
- (iii) Seine Parität muß indefinit sein.

1.) Einführung der geladenen $W^\pm$ Bosonen [*Yukawa*]:

Wechselwirkungsreichweite $\sim m_W^{-1} \Rightarrow$

$E \rightarrow \infty : \sigma \sim \frac{G_F^2 m_W^2}{\pi} \rightarrow$ Partialwellenunitarität ist erfüllt; $G_F = g_W^2/m_W^2$.

2.) Einführung eines neutralen Vektorbosons W^3 [*Glashow*]:

Die Einführung des intermediären geladenen Bosons schwächt die Divergenz der s -Wellen Amplitude des obigen Prozesses. Sie ruft jedoch eine neue Divergenz in anderen Prozessen hervor:

Produktion von longitudinal polarisierten W 's in $\nu\bar{\nu}$ Kollisionen.

$$\epsilon_\lambda^L = (\frac{k_\lambda}{m_W}, 0, 0, \frac{E}{m_W}) \Rightarrow \frac{k_\lambda}{m_W} \text{ im Limes hoher Energien}$$

$$\sigma(\nu\bar{\nu} \rightarrow W_L W_L) \sim \frac{g_W^4}{s} (\frac{\sqrt{s}}{m_W})^4 \sim \frac{g_W^4 s}{m_W^4}$$

$\leftarrow$ verletzt die Unitarität für $\sqrt{s} \gtrsim 1 \text{ TeV}$.

Lösung: Einführung eines neutralen W^3 , das an Fermionen und $W^\pm$ koppelt:

Bedingung für das Verschwinden der linearen s Singularität:

$$I_{ik}^a I_{kj}^b - I_{ik}^b I_{kj}^a - i f_{abc} I_{ij}^c = 0$$

$[I^a, I^b] = i f_{abc} I^c$ Die Fermion-Boson Kopplungen bilden eine Lie-Algebra
[assoziiert mit einer nicht-Abelschen Gruppe].

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Fermion-Boson Kopplung} & \sim g_W \times \text{Darstellungsmatrix} \\ \text{Boson-Boson Kopplung} & \sim g_W \times \text{Strukturkonstanten} \end{array} \right\} g_W \text{ universell.}$$

3.) 4-Punkt-Kopplung:

$$W_L W_L \rightarrow W_L W_L$$

Amplitude $\sim g_W^2 f^2 \frac{s^2}{m_W^4} + \dots$ kompensiert durch: $-g_W^2 f^2 \frac{s^2}{m_W^4}$:
 4-Boson Vertex: $\sim g_W^2 f \star f$

4.) Higgsteilchen: [Weinberg, Salam]

Die verbleibende lineare s Divergenz wird durch den Austausch eines skalaren Teilchens mit Kopplung $\sim$ Masse der Quelle kanzelliert.

Amplitude $\sim -(g_W m_W)^2 \frac{1}{s} \left(\frac{\sqrt{s}}{m_W} \right)^4 \sim -g_W^2 \frac{s}{m_W^2}$

Der gleiche Mechanismus kanzelliert die verbleibende Singularität in $f\bar{f} \rightarrow W_L W_L$ (f massiv!)

Nach Summation der Eichdiagramme verbleibt $\sim g_W^2 \frac{m_f \sqrt{s}}{m_W^2}$

skalares Diagramm $\sim \sqrt{s} \left(g_W \frac{m_f}{m_W} \right) \frac{1}{s} (g_W m_W) \left(\frac{\sqrt{s}}{m_W} \right)^2 \sim g_W^2 \frac{\sqrt{s} m_f}{m_W^2}$

Zusammenfassung:

Eine Theorie massiver Eichbosonen und Fermionen, die bis zu sehr hohen Energien schwach koppeln, verlangt, aus Unitaritätsgründen, die Existenz eines Higgsteilchens. Das Higgsteilchen ist ein skalares 0^+ Teilchen, das an andere Teilchen proportional zu der Masse der Teilchen koppelt.

$\Rightarrow$ Nicht-abelsche Eichtheorien mit spontaner Symmetriebrechung.

4.3 Eichsymmetrie und Teilcheninhalt

Die dem SM zugrundeliegende Eichsymmetrie ist die $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Die $SU(3)_C$ beschreibt die QCD, und die $SU(2)_L \times U(1)_Y$ den elektroschwachen Sektor. Die mit der QCD verbundene erhaltene Ladung ist die Farbladung. Die mit dem elektroschwachen Sektor verbundenen Ladungen sind der schwache Isospin und die schwache Hyperladung. Die entsprechenden Eichbosonen sind in der QCD die 8 Gluonen und im elektroschwachen Sektor die W^+ , W^- , Z Bosonen und das Photon γ . Die Massen der Teilchen werden durch Spontane

Symmetrie Brechung generiert. Dazu wird ein komplexes Higgsdublett ($d_D = 4$ Freiheitsgrade) mit Higgspotential V hinzugefügt. Die SSB bricht die $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ($d_{EW} = 4$) herunter auf die elektromagnetische $U(1)_{em}$ ($d_{em} = 1$). Die elektromagnetische Ladung ist also nach wie vor erhalten. Mit der SSB sind $d_{EW} - d_{em} = 4 - 1 = 3$ would-be Goldstone Bosonen verbunden, die absorbiert werden, um den W und Z Bosonen Masse zu geben. Das Photon bleibt masselos. Ferner verbleibt nach SSB $d_D - (d_{EW} - d_{em}) = 4 - (4 - 1) = 4 - 3 = 1$ Higgsteilchen im Spektrum. Die Materiefelder sind durch 6 Quarks und 6 Leptonen gegeben. Es gibt 6 verschiedene Quark-Flavours: up (u), down (d), charm (c), strange (s), top (t) und bottom (b). Diese sind in 3 Familien (Generationen) angeordnet, u, d sowie c, s und t, b . Die Leptonen sind gegeben durch das Elektron (e), das Myon (μ), das Tauon (τ) und die assoziierten Neutrinos ν_e, ν_μ, ν_τ . Je ein Lepton und sein zugehöriges Neutrino bilden eine der drei Leptonfamilien. Die 3 Lepton- und 3 Quarkfamilien haben jeweils identische Quantenzahlen und werden durch ihre Massen unterschieden. Bei der Betrachtung der Eichwechselwirkung ist es deshalb ausreichend, nur eine Familie zu betrachten. Noch eine Bemerkung: Inzwischen wissen wir, daß die Neutrinos Masse haben. Bei der Formulierung des SM hier werden wir aber ihre Masse vernachlässigen und als masselos annehmen. Für die Behandlung massiver Neutrinos wird auf die entsprechende Literatur verwiesen.

4.4 Glashow-Salam-Weinberg theory für Leptonen

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir die erste Leptongeneration, d.h. e, ν_e . Wir haben die

elektromagnetische Wechselwirkung:

$$\mathcal{L}_{int} = -e_0 j_\mu^{elm} A^\mu \quad \text{mit} \quad (4.7)$$

$$j_\mu^{elm} = -\bar{e} \gamma_\mu e, \quad (4.8)$$

wobei e_0 die Elementarladung bezeichnet, mit $\alpha = e_0^2/4\pi$. Und wir haben die schwache Wechselwirkung:

$$\mathcal{L}_W = -\frac{4G_F}{\sqrt{2}} j_\mu^- j^{\mu+} \quad (4.9)$$

in der Fermiform für geladene Ströme,

mit

$$j_\mu^+ = \bar{\nu}_e \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} e = \bar{\nu}_{eL} \gamma_\mu e_L \quad (\text{left-chiral}) \quad (4.10)$$

$$j_\mu^- = (j_\mu^+)^* \quad (4.11)$$

G_F bezeichnet die Fermi-Kopplungskonstante, $G_F = 10^{-5}/m_P^2$.

Die nächsten Schritte sind

- Auflösen der 4-Fermionkopplung durch Austausch eines sehr schweren Vektorbosons. Abgesehen von der Vektorbosonmasse ist die Struktur der Theorie der schwachen Wechselwirkung ähnlich zu der der Elektrodynamik.
- Formulierung der Theorie als Eichfeldtheorie mit spontaner Symmetriebrechung, um Renormierbarkeit zu gewährleisten.
- Analyse der physikalischen Konsequenzen aus der Symmetrie und ihrer Brechung.

Die freie Lagrangedichte für Elektronen und linkshändige Neutrinos² ist durch folgenden Ausdruck gegeben, der berücksichtigt, daß die Teilchen bei chiraler Invarianz masselos sind,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \bar{e}i\partial e + \bar{\nu}_{eL}i\partial\nu_{eL} \\ &= \bar{e}_Li\partial e_L + \bar{e}_Ri\partial e_R + \bar{\nu}_{eL}i\partial\nu_{eL},\end{aligned}\quad (4.12)$$

wobei

$$f_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)f \quad (4.13)$$

Die freie Lagrangedichte $\mathcal{L}_0$ ist $SU(2)_L$ symmetrisch. Die damit verbundene erhaltene Ladung ist der schwache Isospin:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L &: \text{Isodublett mit } I(\nu_{eL}) = I(e_L) = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad I_3(\nu_{eL}) = +\frac{1}{2} \\ &I_3(e_L) = -\frac{1}{2} \\ e_R &: \text{Isosingulett mit } I(e_R) = I_3(e_R) = 0\end{aligned}\quad (4.14)$$

Die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_0 = \overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L} i\partial \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L + \bar{e}_R i\partial e_R \quad (4.15)$$

ist invariant unter der globalen Isospin Transformation

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L &\rightarrow e^{-\frac{i}{2}g\vec{\alpha}\vec{\tau}} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\ e_R &\rightarrow e_R\end{aligned}\quad (4.16)$$

Die Theorie wird lokal $SU(2)_L$ invariant durch die Einführung eines Isovektors $\vec{W}_\mu$ von Vektorfeldern mit minimaler Kopplung:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Dublett} &: i\partial \rightarrow i\partial - \frac{g}{2}\vec{\tau}\vec{W} \\ \text{Singulett} &: i\partial \rightarrow i\partial \end{array} \right\} \quad \text{aus: } i\partial \rightarrow i\partial - g\vec{I}\vec{W} \quad (4.17)$$

²Das Goldhaber Experiment (1957) hat gezeigt, daß Neutrinos in der Natur nur linkshändig vorkommen. Es ist damit eine Bestätigung der $V - A$ Theorie welche die Paritätsverletzung der schwachen Wechselwirkung vorhersagt.

Die sich ergebende Wechselwirkungslagrangedichte für die Lepton- W -Kopplung lautet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= -\frac{g}{2} \overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L} \gamma_\mu \vec{\tau} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \vec{W}^\mu \\ &= -\frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e W^{+\mu} + h.c. - \frac{g}{4} \{ \bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e - \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e \} W^{3\mu} \quad (4.18)\end{aligned}$$

wo

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W^1 \mp iW^2) \quad (4.19)$$

eingeführt wurde. Aus Glg. (4.18) sehen wir

- Der geladene Leptonstrom hat per Konstruktion die richtige Form.
- W_μ^3 , das neutrale Isektorfeld kann nicht mit dem Photonfeld A_μ identifiziert werden, da der elektromagnetische Strom keine ν 's enthält und außerdem einen reinen Vektorcharakter hat (also kein γ_5).

Dies führt auf die Formulierung der Minimalen $SU(2)_L \times U(1)$ Eichtheorie:

Die Lagrangedichte $\mathcal{L}_0$, Eq. (4.18), hat eine zusätzliche $U(1)$ Eichsymmetrie (nach der Kopplung von $\vec{W}$) und damit verbunden die schwache Hyperladung. Die Quantenzahlen sind so definiert, daß sich der richtige elektromagnetische Strom ergibt:

(Um den Elektromagnetismus miteinzuschließen definiert man die “schwache Hyperladung”.)

$$\begin{aligned}j_\mu^{elm} = -\bar{e} \gamma_\mu e &= -\bar{e}_L \gamma_\mu e_L - \bar{e}_R \gamma_\mu e_R \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L} \gamma_\mu \tau_3 \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L}_{\text{Isektor Strom, koppelt an } W_\mu^3} - \underbrace{\frac{1}{2} \overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L} \gamma_\mu 1 \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L - \bar{e}_R \gamma_\mu e_R}_{\text{Isosingulets, für die Konstruktion des Hyperladungsstroms}} \quad (4.20)\end{aligned}$$

Die Hyperladungsquantenzahlen sind

$$Y(\nu_{eL}) = Y(e_L) = -1 \quad (4.21)$$

$$Y(e_R) = -2 \quad (4.22)$$

aus der Forderung, daß die Gell-Mann Nishijima Beziehung³ erfüllt ist:

$$\underline{\underline{Q = I_3 + \frac{1}{2}Y}}} \quad (4.23)$$

Lokale Eichinvarianz wird durch die minimale Kopplung eines Vektorfeldes erreicht,

$$i\partial \rightarrow i\partial - \frac{g'}{2} Y B. \quad (4.24)$$

³Ursprünglich ging dies Gleichung aus empirischen Beobachtungen hervor. Sie wird jetzt als Resultat des Quarkmodells verstanden.

Dies führt auf die Lagrangedichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} = & -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_{eL}\gamma_\mu e_L W^{+\mu} + h.c. - \frac{g}{2}\{\bar{\nu}_{eL}\gamma_\mu \nu_{eL} - \bar{e}_L\gamma_\mu e_L\}W^{3\mu} \\ & + g'\{\frac{1}{2}\bar{\nu}_{eL}\gamma_\mu \nu_{eL} + \frac{1}{2}\bar{e}_L\gamma_\mu e_L + \bar{e}_R\gamma_\mu e_R\}B^\mu\end{aligned}\quad (4.25)$$

Aus der Lagrangedichte Glg. (4.25) kann man ablesen:

- Die geladenen Ströme bleiben unverändert.
- Es kann eine Mischung zwischen W^3 und B so eingeführt werden, daß eine reine Paritäts-invariante Elektron-Photon-Wechselwirkung erzeugt wird. Es bleibt eine neutrale Stromwechselwirkung mit der orthogonalen Feldkombination übrig:

$$\left. \begin{aligned} A_\mu &= \cos\theta_W B_\mu + \sin\theta_W W_\mu^3 \\ Z_\mu &= -\sin\theta_W B_\mu + \cos\theta_W W_\mu^3 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} B_\mu &= \cos\theta_W A_\mu - \sin\theta_W Z_\mu \\ W_\mu^3 &= \sin\theta_W A_\mu + \cos\theta_W Z_\mu \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Hier bezeichnet θ_W den Weinbergwinkel. Umschreiben der Lagrangedichte mithilfe von A_μ und Z_μ führt auf die A_μ Kopplung

$$A_\mu\{\bar{\nu}_{eL}\gamma_\mu \nu_{eL}\{-\frac{g}{2}\sin\theta_W + \frac{g'}{2}\cos\theta_W\} + \bar{e}_L\gamma_\mu e_L\{\frac{g}{2}\sin\theta_W + \frac{g'}{2}\cos\theta_W\} + \bar{e}_R\gamma_\mu e_R g'\cos\theta_W\} \quad (4.27)$$

Das Neutrino ν kann durch

$$\tan\theta_W = \frac{g'}{g} \quad (4.28)$$

eliminiert werden. (Das Photon koppelt nur an geladene Teilchen!) Die korrekte e -Kopplung ergibt sich durch

$$\left. \begin{aligned} g'\cos\theta_W &= e_0 \\ g\sin\theta_W &= e_0 \end{aligned} \right\} \frac{1}{e_0^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g'^2} \quad (4.29)$$

Die Lepton-Boson-Wechselwirkung lautet also

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} = & -\frac{g}{2\sqrt{2}}\bar{\nu}_e\gamma_\mu(1-\gamma_5)eW^{+\mu} + h.c. \\ & - \frac{g}{4\cos\theta_W}\{\bar{\nu}_e\gamma_\mu(1-\gamma_5)\nu_e - \bar{e}\gamma_\mu(1-\gamma_5)e + 4\sin^2\theta_W\bar{e}\gamma_\mu e\}Z^\mu \\ & + e_0\bar{e}\gamma_\mu eA^\mu\end{aligned}\quad (4.30)$$

Die erste Zeile beschreibt die geladenen Stromwechselwirkungen, die zweite die neutralen Stromreaktionen und die dritte Zeile die elektromagnetischen Wechselwirkungen.

Die Kopplungskonstanten der Theorie sind: $[g, g']$ or $[e_0, \sin\theta_W]$.

- Die elektromagnetische Kopplung $e_0 = \sqrt{4\pi\alpha} \sim \frac{1}{3}$ wird innerhalb des Elektromagnetismus festgelegt.
- Der zweite Parameter ist nicht durch die schwachen Wechselwirkungen festgelegt, da der geladene Strom nur die Beziehung $\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}$ festlegt.

Mit der Notation

$$\begin{aligned} j_\mu^+ &= \bar{\nu}_e \gamma_\mu \frac{1 - \gamma_5}{2} e \\ j_\mu^3 &= \overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}}_L \gamma_\mu \frac{\tau^3}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\ j_\mu^{em} &= -\bar{e} \gamma_\mu e \end{aligned} \quad (4.31)$$

läßt sich die Wechselwirkungslagrangedichte schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} j_\mu^- W^{+\mu} + h.c. \\ &\quad - \frac{g}{\cos \theta_W} \{j_\mu^3 - \sin^2 \theta_W j_\mu^{em}\} Z^\mu \\ &\quad - e_0 j_\mu^{em} A^\mu \end{aligned} \quad (4.32)$$

wobei $g = \frac{e_0}{\sin \theta_W}$.

Diese Lagrangedichte enthält aber noch keine Massenterme für die Fermionen und die Eichbosonen. Die Theorie muß so modifiziert werden, daß die Teilchen ihre Masse erhalten ohne in Konflikt mit der der Theorie zugrundeliegenden Eichsymmetrie geraten.

4.5 Einführung der W, Z Boson- und Fermionmassen

Wiederholen wir. Mit den Strömen

$$\begin{aligned} j_\mu^\pm &= \bar{l}_L \gamma_\mu \tau^\pm l_L \quad \text{where } l_L = (\nu_e, e)_L \\ j_\mu^3 &= \bar{l}_L \gamma_\mu \frac{1}{2} \tau^3 l_L \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$j_\mu^{em} = -\bar{e} \gamma_\mu e \quad (4.34)$$

kann die Wechselwirkungslagrangedichte geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} j_\mu^+ W^{+\mu} + h.c. \\ &\quad - \frac{g}{\cos \theta_W} \{j_\mu^3 - \sin^2 \theta_W j_\mu^{em}\} Z^\mu \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$-e_0 j_\mu^{em} A^\mu \quad (4.36)$$

und die Kopplungen erfüllen die Relationen

$$\begin{aligned} \frac{g'}{g} &= \tan \theta_W \\ \frac{G_F}{\sqrt{2}} &= \frac{g^2}{8m_W^2} \\ e_0 &= g \sin \theta_W . \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die Erzeugung der Massen für die 3 Vektorfelder, also die Absorption der 3 Goldstonebosonen, ist nicht möglich mit 3 skalaren Feldern. Die minimale Lösung ist die Einführung eines komplexen Dubletts mit 4 Freiheitsgraden,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \begin{aligned} \phi_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \\ \phi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 + i\phi_4) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Die Lagrangedichte des Dublettfeldes ϕ lautet

$$\underline{\underline{\mathcal{L}_\phi = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2}} \quad (4.39)$$

Sie ist $SU(2) \times U(1)$ invariant. Das Feld ϕ transformiert sich gemäß

$$\phi \rightarrow e^{-\frac{i}{2}g\vec{\alpha}\vec{\tau}} e^{-\frac{i}{2}g'\beta} \cdot \phi \quad (4.40)$$

Nach spontaner Symmetriebrechung ist der Vakuumerwartungswert des skalaren Feldes

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad v^* = v \quad (4.41)$$

Dieser bricht die $SU(2)_L \times U(1)_Y$ Symmetrie, aber ist invariant unter der $U(1)_{em}$ Symmetrie, welche durch den elektrischen Ladungsoperator erzeugt wird. Da jedes (would-be) Goldstoneboson mit einem Generator assoziiert ist, der das Vakuum bricht, gibt es $4 - 1 = 3$ Goldstonebosonen. Die Quantenzahlen des Feldes ϕ sind

$$\left. \begin{aligned} I_3(\phi_+) &= +\frac{1}{2} & Y(\phi_+) &= +1 \\ I_3(\phi_0) &= -\frac{1}{2} & Y(\phi_0) &= +1 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} Q(\phi_+) &= 1 \\ Q(\phi_0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

(Das Feld Φ transformiert sich wie ein $SU(2)_L$ Dubett und muß daher die Hyperladung $Y_\phi = 1$ haben.) Die Eichfelder werden durch die minimale Kopplung eingeführt,

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - \frac{g}{2}\vec{\tau}\vec{W}_\mu - \frac{g'}{2}B_\mu. \quad (4.43)$$

Entwickelt man um das Minimum des Higgspotentials

$$\begin{aligned} \phi_+(x) &\rightarrow 0 \\ \phi_0(x) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \chi(x)] \quad \chi^* = \chi \end{aligned} \quad (4.44)$$

so erhält man aus dem kinetischen Teil der Lagrangedichte des skalaren Feldes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= \left| \left[\left(i\frac{g}{2}\vec{\tau}\vec{W} + i\frac{g'}{2}B \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right] \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & & & \\ & g^2 & & \\ & & g^2 & -gg' \\ & & -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ B \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.45)$$

mit den Eigenwerten der Massenmatrix

$$\begin{aligned} m_1^2 &= m_2^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \\ m_3^2 &= \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{4} \\ m_4^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Also sind die Massen der Eichbosonen

$$m_\gamma^2 = 0 \quad (4.47)$$

$$m_W^2 = \frac{1}{4}g^2v^2 \quad (4.48)$$

$$m_Z^2 = \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)v^2 \quad (4.49)$$

Sie erfüllen die folgenden Massenbeziehungen:

(i) W Boson Masse: Wir haben $e_0^2 = g^2 \sin^2 \theta_W = 4\sqrt{2}G_F \sin^2 \theta_W m_W^2$, woraus folgt

$$m_W^2 = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} \frac{1}{\sin^2 \theta_W} \quad (4.50)$$

mit $\alpha \approx \alpha(m_Z^2)$ (effektive Strahlungskorrektur). Mit $\sin^2 \theta_W \approx 1/4$ ist die W Boson Masse $m_W \approx 80$ GeV.

(ii) Z Boson Masse: Mit

$$\frac{m_W^2}{m_Z^2} = \cos^2 \theta_W \quad (4.51)$$

erhalten wir

$$\sin^2 \theta_W = 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2} \quad (4.52)$$

Schließlich erhält man mit Eq. (4.48) für den Higgs Vakuumerwartungswert

$$\frac{1}{v^2} = \frac{g^2}{4m_W^2} = \sqrt{2}G_F \quad (4.53)$$

und also

$$v = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}G_F}} \approx 246 \text{ GeV} \quad (4.54)$$

Der Vakuumerwartungswert v ist die charakteristische Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung.

Der Higgsmechanismus für geladene Leptonmassen: Die Fermionen koppeln über die eichinvariante Yukawakopplung an das Higgsfeld ϕ :

Die Wechselwirkungslagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}(ee\Phi) = -f_e \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \phi e_R + h.c. \quad (4.55)$$

Sie ist invariant unter $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Nach Entwicklung des Higgsfeldes um den VEV erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(ee\Phi) &= -f_e \frac{v}{\sqrt{2}} [\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L] + \dots \\ &= -f_e \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{e} e + \dots \\ &= -m_e \bar{e} e + \dots\end{aligned}\tag{4.56}$$

Die Elektronmasse ist gegeben durch

$$m_e = \frac{f_e v}{\sqrt{2}} \tag{4.57}$$

4.6 Quarks in der Glashow-Salam-Weinberg Theorie

In diesem Kapitel wird der hadronische Sektor in das Standardmodell der schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkungen implementiert. Dies wird im Kontext des Quarkmodells getan. Da Quarks und Leptonen sich ähneln, ist die Konstruktion auf Quarkniveau zwar klar, aber nicht trivial.

Aus den vorigen Kapiteln wissen wir, daß die Leptonströme aus Multipletts aufgebaut sind.

$$\left(\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad e_R^- \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L \quad \mu_R^- \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L \quad \tau_R^- \right) \tag{4.58}$$

Dies kann auf die Quarkströme verallgemeinert werden.

Für die Quarkströme für u, d, s haben wir:

- 1) Der elektromagnetische Strom, nach Summation über alle möglichen Ladungen, ist gegeben durch

$$j_\mu^{elm} = \sum_{Q_q} Q_q \bar{q} \gamma_\mu q = \frac{2}{3} \bar{u} \gamma_\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma_\mu d - \frac{1}{3} \bar{s} \gamma_\mu s \tag{4.59}$$

- 2) Aus Niederenergieexperimenten (Pion-, Kaonzerfällen) weiß man, daß der linkshändige schwache Strom, d.h. der Cabibbo-Strom, gegeben ist durch

$$\begin{aligned}j_\mu^- &= \cos \theta_c \bar{u} \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) d + \sin \theta_c \bar{u} \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) s \\ &= \bar{u} \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) [\cos \theta_c d + \sin \theta_c s]\end{aligned}\tag{4.60}$$

mit $\sin^2 \theta_c \approx 0.05$. Wir definieren die Cabibbo-gedrehten Quarks

$$\begin{aligned}d_c &= \cos \theta_c d + \sin \theta_c s \\ s_c &= -\sin \theta_c d + \cos \theta_c s\end{aligned}\tag{4.61}$$

Hier,

d, s sind verschiedene Richtungen im (u, d, s) Raum der Quarks, charakterisiert durch unterschiedliche Massen, d.h. sie sind in der Massenbasis.

d_c, s_c sind Richtungen im Quarkraum, die charakterisiert sind durch die schwache Wechselwirkung; sie stellen die Strombasis dar.

Der Strom $j_\mu^\pm$ kann ausgedrückt werden in der Form $j_\mu^\mp = \bar{Q}_L \gamma_\mu \tau^\pm Q_L$ mit den Multi-plett Definitionen

$$\begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix}_L \quad s_{cL} \quad \begin{pmatrix} u_R \\ d_{cR} \end{pmatrix} \quad s_{cR} \quad (4.62)$$

3) Der entsprechende neutrale Isektor-Strom ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} j_\mu^3 &= \sum_{\text{Doublets}} \bar{Q}_L \gamma_\mu \frac{1}{2} \tau^3 Q_L \\ &\sim \bar{u}_L \gamma_\mu u_L - \bar{d}_{cL} \gamma_\mu d_{cL} \\ &= \bar{u}_L \gamma_\mu u_L - \cos^2 \theta_c \bar{d}_L \gamma_\mu d_L - \sin^2 \theta_c \bar{s}_L \gamma_\mu s_L \\ &\quad - \sin \theta_c \cos \theta_c [\bar{d}_L \gamma_\mu s_L + \bar{s}_L \gamma_\mu d_L] \end{aligned} \quad (4.63)$$

Die erste Zeile ist ein diagonaler neutraler Strom. Die zweite Zeile ist ein Strangeness ändernder neutraler Strom mit der Stärke $\sim \sin \theta_c$, wie der Strangeness ändernde geladene Strom.

Dies ist im eklatanten Widerspruch zu dem experimentellen Nicht-Vorhandensein von Strangeness ändernden neutralen Stromreaktionen. Es existieren strikte experimentelle Grenzen an die Zerfallsraten, die durch Strangeness ändernde neutrale Ströme vermittelt werden, wie etwa

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(K \rightarrow \mu^+ \mu^-)}{\Gamma(K \rightarrow \mu \nu_\mu)} &\sim \left[\frac{G_F \sin \theta_c}{G_F \sin \theta_c} \right]^2 = 1 \quad \text{exp} \sim 4 \cdot 10^{-9} \\ \frac{\Gamma(K \rightarrow \pi e^+ e^-)}{\Gamma(K \rightarrow \pi e \nu_e)} &\sim \left[\frac{G_F \sin \theta_c}{G_F \sin \theta_c} \right]^2 = 1 \quad \text{exp} < 10^{-4} \\ \frac{|m(K_L) - m(K_S)|}{m(K)} &\sim G_F \sin^2 \theta_c m_K^2 \sim 10^{-8} \quad \text{exp} \sim 10^{-14} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Der Prozess $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ kann im Rahmen der QED und der bekannten Übergangsrate $K_L \rightarrow \gamma \gamma$ verstanden werden und läßt wenig Raum für einen elementaren $\bar{s}d \rightarrow \mu^+ \mu^-$ Übergang. Ein ähnlicher Schluß kann aus der Kleinheit der Observablen gezogen werden, die einer $\Delta S = 2$ Übergangsamplitude entsprechen, wie etwa die $K_L - K_S$ Massendifferenz.

Deshalb ist es wichtig, in dem Weinberg-Salam Modell, oder allgemeiner in Modellen, die neutrale Stromreaktionen zulassen, die proportional sind zu der dritten Komponente des schwachen Isostroms, das Auftreten von Strangeness ändernden neutralen Strömen zu unterbinden. Eine elegante Lösung des Problems von flavour-ändernden neutralen Strömen wurde von Glashow, Iliopoulos und Maiani vorgeschlagen.

Wir benötigen also einen "natürlichen Mechanismus", d.h. hervorgerufen durch eine Symmetrie, stabil gegen Störungen, der 8 Größenordnungen unterdrückt. Dies kann erreicht werden

durch die Einführung eines vierten Quarks, das Charm Quark c . [Glashow, Iliopoulos, Maiani, PRD2(70)1985]

Die neue Multiplett-Struktur ist dann

$$\left(\begin{array}{cc} u & c \\ d_c & s_c \end{array} \right)_L \quad \left(\begin{array}{cc} u_R & c_R \\ d_{cR} & s_{cR} \end{array} \right) \quad (4.65)$$

(a) Der Isektorstrom lautet nun:

$$j_\mu^3 = \sum_{\text{doublets}} \bar{Q}_L \gamma_\mu \frac{1}{2} \tau^3 Q_L = \frac{1}{2} [\bar{u}_L \gamma_\mu u_L - \bar{d}_L \gamma_\mu d_L + \bar{c}_L \gamma_\mu c_L - \bar{s}_L \gamma_\mu s_L] \quad (4.66)$$

Das Hinzufügen des Charm Quarks c diagonalisiert den neutralen Strom (*GIM Mechanismus*) und eliminiert ($\Delta S \neq 0$, NC) Reaktionen.

(b) Der elektromagnetische Strom ist gegeben durch:

$$j_\mu^{em} = \frac{2}{3} [\bar{u} \gamma_\mu u + \bar{c} \gamma_\mu c] - \frac{1}{3} [\bar{d} \gamma_\mu d + \bar{s} \gamma_\mu s] \quad (4.67)$$

(c) Der geladene Strom lautet:

$$j_\mu^- = \bar{u} \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) [\cos \theta_c d + \sin \theta_c s] + \bar{c} \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) [-\sin \theta_c d + \cos \theta_c s] \quad (4.68)$$

Der erste Term ist der Cabibbo Strom, der zweite der Charm-Strom mit starker (c, s) Kopplung.

4.7 Die CKM Matrix

4.7.1 Die Fermion Yang-Mills Lagrangedichte

Wenn man die Down-artigen Quarks in der Strombasis nimmt, so ist die Matrix für die schwache Wechselwirkung der Fermionen diagonal (siehe auch Glgen. 4.61 und 4.68). Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} & D' &= \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} \\ E &= \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} & N_L &= \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

wo ' die Felder in der Strombasis bezeichnen, bekommen wir für die Yang-Mills Fermion Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM-F} &= (\bar{U}_L, \bar{D}'_L) i \gamma^\mu (\partial_\mu + i g W_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + i g' Y_L B_\mu) \begin{pmatrix} U_L \\ D'_L \end{pmatrix} \\ &+ (\bar{N}_L, \bar{E}_L) i \gamma^\mu (\partial_\mu + i g W_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + i g' Y_L B_\mu) \begin{pmatrix} N_L \\ E_L \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{\Psi_R = U_R, D'_R, E_R} \bar{\Psi}_R i \gamma^\mu (\partial_\mu + i g' Y_R B_\mu) \Psi_R \\ &= \bar{U} i \not{\partial} U + \bar{D}' i \not{\partial} D' + \bar{E} i \not{\partial} E + \bar{N}_L i \not{\partial} N_L + \mathcal{L}_{int}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Die Wechselwirkungs Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}_{int} = -e J_{em}^\mu A_\mu - \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} J_{NC}^\mu Z_\mu - \frac{e}{\sqrt{2} \sin \theta_W} (J^{-\mu} W_\mu^+ + h.c.) . \quad (4.71)$$

Der elektromagnetische Strom ist gegeben durch

$$J_{em}^\mu = Q_u \bar{U} \gamma^\mu U + Q_d \bar{D}' \gamma^\mu D' + Q_e \bar{E} \gamma^\mu E , \quad (4.72)$$

der neutrale schwache Strom durch

$$\begin{aligned} J_{NC}^\mu &= (\bar{U}_L, \bar{D}'_L) \gamma^\mu \frac{\tau_3}{2} \begin{pmatrix} U_L \\ D'_L \end{pmatrix} + (\bar{N}_L, \bar{E}_L) \gamma^\mu \frac{\tau_3}{2} \begin{pmatrix} N_L \\ E_L \end{pmatrix} - \sin^2 \theta_W J_{em}^\mu \\ &= \frac{1}{2} \bar{U}_L \gamma^\mu U_L - \frac{1}{2} \bar{D}'_L \gamma^\mu D'_L + \frac{1}{2} \bar{N}_L \gamma^\mu N_L - \frac{1}{2} \bar{E}_L \gamma^\mu E_L - \sin^2 \theta_W J_{em}^\mu \end{aligned} \quad (4.73)$$

und der geladene schwache Strom durch

$$\begin{aligned} J^{-\mu} &= (\bar{U}_L, \bar{D}'_L) \gamma^\mu \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2} \begin{pmatrix} U_L \\ D'_L \end{pmatrix} + (\bar{N}_L, \bar{E}_L) \gamma^\mu \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2} \begin{pmatrix} N_L \\ E_L \end{pmatrix} \\ &= \bar{U}_L \gamma^\mu D'_L + \bar{N}_L \gamma^\mu E_L . \end{aligned} \quad (4.74)$$

(Letzterer ist rein linkshändig und diagonal im Generationenraum.)

4.7.2 Massenmatrix und CKM Matrix

Vorbemerkung: Seien χ_1, χ_2 $SU(2)$ Dubletts. Dann gibt es zwei Möglichkeiten, ein $SU(2)$ Singulett zu bilden:

- 1) $\chi_1^\dagger \chi_2$ und $\chi_2^\dagger \chi_1$
- 2) $\chi_1^T \epsilon \chi_2$ und $\chi_2^T \epsilon \chi_1$, wobei

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Beweis: Führe eine $SU(2)$ Transformation durch

$$\begin{aligned} \chi_1(x) &\rightarrow U(x) \chi_1(x) & \chi_1^\dagger &\rightarrow \chi_1^\dagger U^{-1} \\ \chi_2(x) &\rightarrow U(x) \chi_2(x) & \chi_2^\dagger &\rightarrow \chi_2^\dagger U^{-1} , \end{aligned} \quad (4.75)$$

wobei

$$U(x) = e^{i\omega_a(x)\tau^a/2} . \quad (4.76)$$

1) ist invariant unter dieser Transformation.

2) Hier haben wir

$$(U\chi_1)^T \epsilon U\chi_2 = \chi_1^T U^T \epsilon U\chi_2 = \chi_1^T \epsilon \chi_2 \quad (4.77)$$

denn mit

$$U = e^{iA} = \sum_0^\infty \frac{(iA)^n}{n!} \Rightarrow U^T = \sum_n \frac{(iA^T)^n}{n!} , \quad A = \omega_a(x) \frac{\tau^a}{2} . \quad (4.78)$$

Und da $(\tau^a)^T \epsilon = -\epsilon \tau^a$, erhalten wir

$$U^T \epsilon U = \epsilon U^{-1} U = \epsilon, \quad (4.79)$$

so daß 2) auch invariant ist.

Die Yukawa Lagrangedichte: Wir schreiben die allgemeinste, renormierbare, $SU(2)_L \times U(1)_Y$ invariante Hermitesche Fermion-Fermion-Boson Lagrangedichte auf. Mit den $SU(2)$ Dubletts

$$\begin{pmatrix} U_L \\ D'_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N_L \\ E_L \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

und den $SU(2)$ Singulets

$$U_R, D'_R, E_R \quad (4.81)$$

können wir 2 $SU(2)$ invariante Wechselwirkungen konstruieren,

$$\Phi^\dagger \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \end{pmatrix} = (\phi^+)^* \psi_{1L} + (\phi^0)^* \psi_{2L} \quad (4.82)$$

und

$$\Phi^T \epsilon \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \end{pmatrix} = \phi^+ \psi_{2L} - \phi^0 \psi_{1L}, \quad (4.83)$$

so daß wir für die Yukawa Lagrangedichte bei Erhaltung der Hyperladung erhalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk} = & -(\bar{e}_R, \bar{\mu}_R, \bar{\tau}_R) C_E \begin{pmatrix} \Phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \\ \Phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix} \\ \Phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (\bar{u}_R, \bar{c}_R, \bar{t}_R) C_U \begin{pmatrix} \Phi^T \epsilon \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\ \Phi^T \epsilon \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix} \\ \Phi^T \epsilon \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ & -(\bar{d}'_R, \bar{s}'_R, \bar{b}'_R) C_D \begin{pmatrix} \Phi^\dagger \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\ \Phi^\dagger \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix} \\ \Phi^\dagger \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} + h.c. . \end{aligned} \quad (4.84)$$

Die C_E, C_U, C_D sind beliebige komplexe Matrizen. Wir machen durch die folgenden unitären Transformationen einen Übergang in eine äquivalente Feldbasis (Felder sind keine Observablen!)

$$\begin{aligned} N_L(x) & \rightarrow V_1 N_L(x) & U_L(x) & \rightarrow V_2 U_L(x) \\ E_L(x) & \rightarrow V_1 E_L(x) & D'_L(x) & \rightarrow V_2 D'_L(x) \\ E_R(x) & \rightarrow U_1 E_R(x) & U_R(x) & \rightarrow U_2 U_R(x) \\ & & D'_R(x) & \rightarrow U_3 D'_R(x), \end{aligned} \quad (4.85)$$

wobei U_1, U_2, U_3, V_1, V_2 unitäre 3×3 Matrizen sind. Da sich Lepton und Quarkdubletts auf dieselbe Weise transformieren, ändert dies nicht die Yang-Mills-, die Higgs- und die Yang-Mills Fermion Lagrangedichte. Lediglich die C Matrizen werden verändert:

$$C_E \rightarrow U_1^\dagger C_E V_1 \quad C_U \rightarrow U_2^\dagger C_U V_2 \quad C_D \rightarrow U_3^\dagger C_D V_2. \quad (4.86)$$

Indem man die $U_1^\dagger$ und V_1 Matrizen geeignet wählt, kann C_E diagonalisiert werden,

$$U_1^\dagger C_E V_1 = \begin{pmatrix} h_e & & \\ & h_\mu & \\ & & h_\tau \end{pmatrix} \quad \text{with } h_e, h_\mu, h_\tau \geq 0. \quad (4.87)$$

Genauso,

$$U_2^\dagger C_U V_2 = \begin{pmatrix} h_u & & \\ & h_c & \\ & & h_t \end{pmatrix} \quad \text{with } h_u, h_c, h_t \geq 0. \quad (4.88)$$

Glg. (4.88) legt die Matrix V_2 fest. Indem man U_3 geeignet wählt, erhält man

$$U_3^\dagger C_D V_2 = \begin{pmatrix} h_d & & \\ & h_s & \\ & & h_b \end{pmatrix} V^\dagger \quad \text{with } h_u, h_c, h_t \geq 0. \quad (4.89)$$

wobei $V^\dagger$ eine unitäre Matrix bezeichnet. Wir transformieren D'_R durch $D'_R \rightarrow V^\dagger D'_R$ und erhalten

$$C_D \rightarrow V \begin{pmatrix} h_d & & \\ & h_s & \\ & & h_b \end{pmatrix} V^\dagger. \quad (4.90)$$

Wir entwickeln Φ um den Vakuumerwartungswert

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (4.91)$$

wobei $H(x)$ ein reelles Feld ist, und erhalten

$$\begin{aligned} & (\bar{d}'_R, \bar{s}'_R, \bar{b}'_R) V \begin{pmatrix} h_d & & \\ & h_s & \\ & & h_b \end{pmatrix} V^\dagger \begin{pmatrix} \Phi^\dagger \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\ \Phi^\dagger \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix} \\ \Phi^\dagger \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= (\bar{d}'_R, \bar{s}'_R, \bar{b}'_R) V \begin{pmatrix} h_d & & \\ & h_s & \\ & & h_b \end{pmatrix} V^\dagger \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H(x))d'_L \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H(x))s'_L \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H(x))b'_L \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Nach einer Basistransformation

$$\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} = V^\dagger \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} \quad (4.93)$$

haben wir schließlich

$$(\bar{d}_R, \bar{s}_R, \bar{b}_R) \begin{pmatrix} h_d & & \\ & h_s & \\ & & h_b \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H(x)) \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}. \quad (4.94)$$

Die Yang-Mills und die Higgs-Lagrangedichte ändern sich nicht unter der Transformation (4.93). Aber die Yang-Mills Fermion Lagrangedichte wird

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM-F} = & \bar{U}i\partial U + \bar{D}i\partial D + \bar{E}i\partial E + \bar{N}_L i\partial N_L - eJ_{em}^\mu A_\mu \\ & - \frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W} J_{NC}^\mu Z_\mu - \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} (J^{-\mu} W_\mu^+ + h.c.) . \end{aligned} \quad (4.95)$$

with

$$J^{-\mu} = \bar{U}_L \gamma^\mu D'_L + \bar{N}_L \gamma^\mu E_L = \bar{U}_L \gamma^\mu V D_L + \bar{N}_L \gamma^\mu E_L . \quad (4.96)$$

Die unitäre 3×3 Matrix V wird CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) Mischungsmatrix genannt.

Die Matrix V ist unitär, *d.h.* $V^\dagger V = VV^\dagger = 1$. Schauen wir die Anzahl der freien Parameter an. Für eine $n \times n$ komplexe Matrix haben wir $2n^2$ freie Parameter. Da die Matrix unitär ist, ist die Anzahl freier Parameter um n^2 Bestimmungsgleichungen reduziert. Außerdem können die Phasen durch eine Redefinition der Fermionfelder absorbiert werden, so daß die Anzahl der freien Parameter um weitere $(2n-1)$ Bedingungen reduziert ist:

<u>Parameter:</u>	$n \times n$ komplexe Matrix:	$2n^2$
	Unitarität:	n^2
	freie Phasenwahl:	$\frac{2n-1}{(n-1)^2}$ freie Parameter

In der Euler Parametrisierung bekommen wir

Drehwinkel:	$\frac{1}{2}n(n-1)$
Phasen:	$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

So finden wir für $n = 2, 3$

n	Winkel	Phasen
2	1	0
3	3	1

So finden wir, daß in einer

2 – Familien Theorie	~ Cabibbo:	keine $\mathcal{CP}$ Verletzung mit L Strömen
3 – Familien Theorie	~ KM:	komplexe Matrix $\rightarrow \mathcal{CP}$ Verletzung
		<u>“Vorhersage einer 3-Familien Struktur“</u>

Als nächstes schauen wir uns an, wie wir die Matrix parametrisieren können:

(i) Ästhetische Parametrisierung:

$$V_{CKM} = R_{sb}(\theta_2)U(\delta)R_{sd}(\theta_1)R_{sb}(\theta_3) \quad (4.97)$$

mit

$$\begin{aligned} 0 & \leq \theta_i \leq \pi/2 \\ -\pi & \leq \delta \leq +\pi \end{aligned} \quad (4.98)$$

und

$$R_{sb}(\theta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ 0 & -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad \text{etc.} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (4.99)$$

(ii) Günstige Parametrisierung (Wolfenstein):

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.100)$$

Die Bestimmung der Parameter erfolgt durch

- (a) Cabibbo theory: $\lambda = 0.221 \pm 0.002$
- (b) $b \rightarrow c$ decays: $V_{cb} = A\lambda^2 \rightarrow A = 0.78 \pm 0.06$
- (c) $b \rightarrow u$ decays: $|V_{ub}/V_{cb}| = 0.08 \pm 0.02 \rightarrow (\rho^2 + \eta^2)^{1/2} = 0.36 \pm 0.09$
- (d) t Matrixelemente durch Unitarität

(e) $\mathcal{CP}$ Verletzung:

Die Unitarität der CKM Matrix führt uns zu dem Unitaritäts-Dreieck

$$\begin{aligned} V_{ud}^* V_{td} + V_{us}^* V_{ts} + V_{ub}^* V_{tb} &= 0 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) - A\lambda^3 + A\lambda^3(\rho + i\eta) &= 0 \\ \Rightarrow (\rho + i\eta) + (1 - \rho - i\eta) &= 1 \end{aligned} \quad (4.101)$$

Wir haben also das Unitaritäts-Dreieck

mit den Ecken $(0, 0)$, $(1, 0)$, (ρ, η) (in der komplexen Ebene) und den Winkeln α, β, γ . Die Bestimmung erfolgt durch

- (i) $\rho^2 + \eta^2$, Kreis um 0, aus $b \rightarrow u/b \rightarrow c$ Zerfällen.
- (ii) $\eta > 0$ aus der $\mathcal{CP}$ Verletzung im K System.
- (iii) $B_d - \bar{B}_d$ Oszillationen:

- $|1 - \rho - i\eta| = 1.03 \pm 0.22$
- (iv) β aus $\mathcal{CP}$ Verletzung in $B \rightarrow J/\Psi K$
- α aus $\mathcal{CP}$ Verletzung in $B \rightarrow \pi\pi$
- γ aus $\mathcal{CP}$ Verletzung in $B \rightarrow \rho K$

4.8 Eichung

In Eichtheorien haben wir das Problem, daß die eichinvariante Lagrangedichte die Eichfelder nicht eindeutig festlegt. Aufgrund der Eichsymmetrie haben viele Feldkonfigurationen dieselbe Wirkung. Dies wird gelöst, indem die Eichung festgelegt wird. Im folgenden werden wir im Detail untersuchen, wie die Eichfixierungsbedingung in die Lagrangedichte eingebaut werden kann.

4.8.1 Feynman Pfadintegrale

Die Lagrangefunktion L ist das fundamentale Objekt in der klassischen Mechanik. Davon ausgehend wird die klassische Wirkung konstruiert,

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}) , \quad (4.102)$$

wobei $q(t)$ die verallgemeinerte Koordinate und $\dot{q}(t) \equiv dq/dt$ die verallgemeinerte Geschwindigkeit ist. Die Bewegungsgleichungen folgen aus dem Hamilton-Prinzip der kleinsten Wirkung, nach der die Variation

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}) = 0 \quad (4.103)$$

unter der Nebenbedingung, daß die Variationen der verallgemeinerten Koordinaten an den Endpunkten t_1 und t_2 verschwinden. Der physikalische Pfad ist also die spezielle Trajektorie, die $q_1 \equiv q(t_1)$ und $q_2 \equiv q(t_2)$ verbindet und entlang derer die Wirkung stationär ist. Eine wichtige Verallgemeinerung auf die Quantenmechanik als eine gewichtete Summe über die Pfade ist von Feynman entwickelt worden. Wir haben in der Quantenmechanik

$$\langle t_2 | t_1 \rangle \sim \int Dq \exp iS \quad (4.104)$$

In der Quantenfeldtheorie ist die Theorie bestimmt durch das Pfadintegral

$$W \sim \int D\phi e^{iS} \quad (4.105)$$

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad (4.106)$$

Das Integral wird über alle ϕ Feldwerte an jedem Punkt x ausgeführt,

$$W \sim \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \Pi_\alpha d\phi_\alpha \exp \left\{ i \sum_\beta \epsilon^4 \mathcal{L}(\phi_\beta) \right\} \quad (4.107)$$

Quantenmechanik: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit diskutieren wir Quantenmechanik in 1 Dimension. Sei q die Raumkoordinate. Ein Zustand im Heisenberg-Bild und im Schroedinger-Bild sind verbunden durch

$$|\psi, t\rangle_S = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t \right) |\psi\rangle_H . \quad (4.108)$$

Der Raumoperator im Heisenberg-Bild ist durch den im Schroedinger-Bild gegeben durch

$$\hat{Q}_H(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{Q}_S e^{-i\hat{H}t} . \quad (4.109)$$

Wir definieren:

$$|q, t\rangle = \exp \left(\frac{i}{\hbar} \hat{H} t \right) |q\rangle . \quad (4.110)$$

Damit

$$\psi(q, t) = \langle q | \psi, t \rangle_S = \langle q | \exp(-i/\hbar \hat{H} t) | \psi \rangle_H = \langle q, t | \psi \rangle_H . \quad (4.111)$$

Wir interessieren uns für den Zustand am Ort q_f zur Zeit t_f ,

$$\begin{aligned} \psi(q_f, t_f) &= \langle q_f, t_f | \psi \rangle_H = \int dq_i \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \langle q_i, t_i | \psi \rangle_H \\ &= \int dq_i K(q_f, t_f; q_i, t_i) \psi(q_i, t_i) . \end{aligned} \quad (4.112)$$

Die gesamte Information über die Dynamik des Systems steckt im Integranden $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$. Man nennt diesen Propagator. Wir betrachten nun das Übergangsmatrixelement (im folgenden ist $\hbar = 1$ gesetzt)

$${}_S \langle q', t' | q, t \rangle_S = {}_H \langle q' | e^{i\hat{H}(t'-t)} | q \rangle_H . \quad (4.113)$$

Wir teilen es in $(n+1)$ Teilintervalle $\tau = (t' - t)/(n+1)$.

Wir benutzen die Vollständigkeitsrelation $1 = \int dq |q\rangle \langle q|$ und erhalten für Glg. (4.113) (im Folgenden werden die Indizes H, S vernachlässigt):

$$\int dq_n \dots dq_1 \langle q', t' | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q, t \rangle . \quad (4.114)$$

Wir betrachten ein Matrixelement genauer

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle &= \langle q_{j+1} | e^{-i\hat{H}\tau} | q_j \rangle = \langle q_{j+1} | 1 - i\hat{H}\tau + \mathcal{O}(\tau^2) | q_j \rangle \\ &= \delta(q_{j+1} - q_j) - i\tau \langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle + \mathcal{O}(\tau^2) . \end{aligned} \quad (4.115)$$

Mit dem Hamilton-Operator $\hat{H} = \hat{P}^2/(2m) + V(\hat{Q})$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \frac{\hat{P}^2}{2m} | q_j \rangle &= \int dp dp' \langle q_{j+1} | p' \rangle \langle p' | \frac{\hat{P}^2}{2m} | p \rangle \langle p | q_j \rangle \\ &= \int dp dp' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(p'q_{j+1} - pq_j)} \frac{p^2}{2m} \delta(p - p') = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q_{j+1} - q_j)} \frac{p^2}{2m} \end{aligned} \quad (4.116)$$

Und

$$\langle q_{j+1} | V(\hat{Q}) | q_j \rangle = V(q_j) \langle q_{j+1} | q_j \rangle = V(q_j) \delta(q_{j+1} - q_j) = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q_{j+1} - q_j)} V(q_j) \quad (4.117)$$

Damit bekommen wir für das Matrixelement

$$\langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q_{j+1} - q_j)} H(p, q_j) . \quad (4.118)$$

Und schließlich

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \int \frac{dp_j}{2\pi} e^{ip_j(q_{j+1} - q_j)} e^{-i\tau H(p_j, q_j)} . \quad (4.119)$$

Damit haben wir für das Übergangmatrixelement (4.113)

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=0}^n \frac{dp_j}{2\pi} \left(\prod_{j=1}^n dq_j \right) e^{i \sum_{j=0}^n [p_j(q_{j+1} - q_j) - \tau H(p_j, q_j)]} . \quad (4.120)$$

Mit der symbolischen Notation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{a=1}^n dq_a \prod_{b=0}^n \frac{dp_b}{2\pi} = \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) , \quad (4.121)$$

welches die Defintion des Funktionalintegrals (= "Integration über Funktionen") ist, haben wir

$$\langle q', t_b | q, t_a \rangle = \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) e^{i \int_{t_a}^{t_b} dt [p\dot{q} - H(p, q)]} , \quad (4.122)$$

wobei $q(t_a) = q$ und $q(t_b) = q'$. Das quantenmechanische Übergangsmatrixelement ist durch das ∞ -dimensionale Integral über die klassischen "Pfade" gegeben. Falls $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ kann die Integration über p ausgeführt werden. Mit der Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2 + bx + c} = e^{\frac{b^2}{4a} + c} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (4.123)$$

erhalten wir

$$\langle q', t_b | q, t_a \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{n+1} \left(\frac{2\pi m}{i\tau} \right)^{\frac{n+1}{2}} \int \prod_{j=1}^n dq_j e^{i \sum_j [\tau \frac{m}{2} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\tau} \right)^2 - V\tau]} . \quad (4.124)$$

Im Kontinuumlimes erhalten wir

$$\langle q', t_b | q, t_a \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q e^{i \int_{t_a}^{t_b} dt L(q, \dot{q})}, \quad (4.125)$$

wobei $\mathcal{N}$ ein Normierungsfaktor ist. In einer analogen Rechnung erhalten wir für

$$\langle q', t' | \hat{Q}(t_0) | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p q(t_0) e^{i \int_t^{t'} d\tau [p\dot{q} - H]}. \quad (4.126)$$

Denn

$$\begin{aligned} \langle q_j, t_j | q_j | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle &= \langle q_j | q_j \exp(-i\hat{H}(t_j - t_{j-1})) | q_{j-1} \rangle \\ &= \langle q_j | \hat{Q} \exp(-i\hat{H}(t_j - t_{j-1})) | q_{j-1} \rangle \\ &= \langle q_j | \exp(-i\hat{H}t_j) \exp(i\hat{H}t_j) \hat{Q} \exp(-i\hat{H}(t_j - t_{j-1})) | q_{j-1} \rangle \\ &= \langle q_j, t_j | \hat{Q}(t_j) | q_{j-1}, t_{j-1} \rangle. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Betrachten wir $A = \langle q', t' | \hat{Q}(t_1) \hat{Q}(t_2) | q, t \rangle$. If $t_1 > t_2$:

$$\begin{aligned} A &= \int (\Pi dq_j) \langle q', t' | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \dots \langle q_{j_1}, t_{j_1} | \hat{Q}(t_1) | q_{j_1-1}, t_{j_1-1} \rangle \\ &\quad \dots \langle q_{j_2}, t_{j_2} | \hat{Q}(t_2) | q_{j_2-1}, t_{j_2-1} \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q, t \rangle. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Und wir erhalten (Rechnung wie oben)

$$A = \underbrace{\int \mathcal{D}q \mathcal{D}p q(t_1) q(t_2) e^{i \int_t^{t'} d\tau [p\dot{q} - H]}}_P. \quad (4.129)$$

Wenn $t_2 > t_1$ then P corresponds to

$$P = \langle q', t' | \hat{Q}(t_2) \hat{Q}(t_1) | q, t \rangle. \quad (4.130)$$

Die Pfadintegralformel entspricht also dem Matrixelement des zeitgeordneten Produkts $T[\hat{Q}(t_1) \hat{Q}(t_2)]$. Wir haben dann im allgemeinen

$$\langle q', t' | T[\hat{Q}(t_1) \dots \hat{Q}(t_N)] | q, t \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p q(t_1) q(t_2) \dots q(t_N) e^{i \int_t^{t'} d\tau [p\dot{q} - H]}. \quad (4.131)$$

Wir wollen nun die Vakuum-nach-Vakuum-Amplitude bei Anwesenheit einer “Quelle” J haben, welche die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen beschreibt. Wir ersetzen die Lagrangedichte durch

$$L \rightarrow L + \hbar J(t) q(t) \quad (\hbar = 1), \quad (4.132)$$

wobei J die Quelle bezeichnet. Unser Ziel ist, $\langle 0, t = \infty | 0, t = -\infty \rangle_J$ zu erhalten.

Wir haben die Pfadintegralformel

$$\begin{aligned} \langle Q', T' | Q, T \rangle_J &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}q e^{i \int_T^{T'} dt [L + Jq]} \\ &= \int dq dq' \langle Q', T' | q', t' \rangle_{J=0} \langle q', t' | q, t \rangle_{J \neq 0} \langle q, t | Q, T \rangle_{J=0} \end{aligned} \quad (4.133)$$

$\mathcal{N}$ ist ein Normierungsfaktor, der von der p Integration kommt. Wir haben

$$\langle Q', T' | q', t' \rangle_{J=0} = \langle Q' | e^{i\hat{H}T'} e^{-i\hat{H}t'} | q' \rangle = \sum_m \phi_m(Q') \phi_m^*(q') e^{iE_m(T'-t')}, \quad (4.134)$$

wo wir $1 = \sum_E |\text{Energie}\rangle \langle \text{Energie}|$ eingefügt haben. Und analog

$$\langle q, t | Q, T \rangle_{J=0} = \sum_n \phi_n(q) \phi_n^*(Q) e^{-iE_n(T-t)}. \quad (4.135)$$

Wir benützen einen Trick und rotieren die Zeitachse ein wenig, $t \rightarrow te^{i\delta}$, und bilden die Limites $T' \rightarrow \infty e^{i\delta}$ und $T \rightarrow -\infty e^{i\delta}$. Dies bedeutet, daß in der Summe nur die Beiträge des Grundzustandes $E_0 < E_i$ übrig bleiben, so daß wir

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{T' \rightarrow +\infty e^{i\delta} \\ T \rightarrow -\infty e^{i\delta}}} \langle Q', T' | Q, T \rangle_J &= \phi_0^*(Q) \phi_0(Q') e^{iE_0(T'-T)} \\ &\int dq dq' \phi_0^*(q', t') \phi_0(q, t) \langle q', t' | q, t \rangle_J \end{aligned} \quad (4.136)$$

erhalten. Dieses Integral ist äquivalent zu $\langle 0, t' | 0, t \rangle_J$. Wir bilden nun auch $t' \rightarrow \infty$, $t \rightarrow -\infty$ und erhalten

$$\begin{aligned} \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle_J &= \lim_{\substack{T' \rightarrow +\infty e^{i\delta} \\ T \rightarrow -\infty e^{i\delta}}} \frac{\langle Q', T' | Q, T \rangle_J}{\phi_0^*(Q) \phi_0(Q') e^{iE_0(T'-T)}} \\ \text{mit} \quad \langle Q', T' | Q, T \rangle_J &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}q e^{i \int_T^{T'} dt [L(q, \dot{q}) + J(t)q(t)]} \end{aligned} \quad (4.137)$$

Bemerkung: Anstatt die t -Achse zu rotieren, kann der Grundzustands-Beitrag auch durch $H \rightarrow H - i\frac{\epsilon}{2}q^2$, $\epsilon > 0, \epsilon \rightarrow 0$, i.e. $L \rightarrow L + i\frac{\epsilon}{2}q^2$ isoliert werden. Damit haben wir schließlich

$$\begin{aligned} \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle_J &\sim \mathcal{Z}[J] \quad \text{erzeugendes Funktional} \\ \text{wobei} \quad \mathcal{Z}[J] &\equiv \int \mathcal{D}q e^{i \int_{-\infty}^{\infty} dt [L + J \cdot q + \frac{i}{2}\epsilon q^2]} \end{aligned} \quad (4.138)$$

Wir definieren die Funktionalableitung für ein Funktional $F[f]$ das $C^n(M) \rightarrow \mathbb{C}$ abbildet, wobei der Funktionenraum durch $M = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gegeben ist:

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(x) + \epsilon \delta(x-y)] - F[f(x)]}{\epsilon} . \quad (4.139)$$

Wir haben dann z.B.,

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x-y) . \quad (4.140)$$

Für die n -fache Ableitung von $\mathcal{Z}[J]$ nach J bekommen wir

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\delta^n \mathcal{Z}[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0} &= (i)^n \int \mathcal{D}q \, q(t_1) \dots q(t_n) e^{i \int_{-\infty}^{\infty} dt [L + \frac{i}{2} \epsilon q^2]} \\ &\sim (i)^n < 0 | T[\hat{Q}(t_1) \dots \hat{Q}(t_n)] | 0 > \end{aligned}} \quad (4.141)$$

4.8.2 Skalare Felder

Ein 1-dimensionales quantenmechanisches System entspricht einer Feldtheorie in 0 Raumdimensionen. (In der Quantenmechanik haben wir die Operatoren $\hat{Q}(t), \hat{P}(t), \hat{H}(t)$.)

In der skalaren Feldtheorie haben wir die skalaren Felder $\hat{\phi}(\vec{x}, t)$ und den Impuls $\hat{\Pi}(\vec{x}, t)$ und die Hamilton- und Lagrangedichte $\hat{\mathcal{H}}(\hat{\phi}, \hat{\Pi}), \hat{\mathcal{L}}(\hat{\phi}, \partial_\mu \hat{\phi})$. Wir betrachten als Beispiel die klassische Lagrangedichte der ϕ^4 Theorie

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 . \quad (4.142)$$

Die Vakuum-nach-Vakuum Amplitude der Quantenfeldtheorie bei Anwesenheit einer "Quelle" $J(x)$ ist gegeben durch

$$< 0, \infty | 0, -\infty >_J \sim \mathcal{Z}[J] \quad (4.143)$$

mit

$$\mathcal{Z}[J] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x [\mathcal{L}(x) + \frac{1}{2} i \epsilon \phi^2(x) + J(x) \phi(x)]} . \quad (4.144)$$

Die Felder ϕ sind klassische Felder. Und

$$\mathcal{D}\phi = \Pi_{\vec{x}, t} d\phi(\vec{x}, t) . \quad (4.145)$$

Um die Funktionalintegrale genau zu definieren, diskretisieren wir Raum und Zeit.

Wir haben die partielle Ableitung

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{(\vec{x}_n, t_n)} = \frac{\phi(x_n + a, y_n, z_n, t_n) - \phi(x_n, y_n, z_n, t_n)}{a} . \quad (4.146)$$

Für das Integral über die Lagrangedichte erhalten wir

$$\int d^4x \mathcal{L}(\phi) \approx \sum_{\text{Gitterpunkte}} a^4 \mathcal{L}(\phi(\vec{x}_n, t_n)) . \quad (4.147)$$

Das Maß $\Pi_x d\Phi(x)$ wird

$$\mathcal{D}\phi = \Pi_{j=1}^{N^4} d\phi(x_j) . \quad (4.148)$$

Das Funktionalintegral $\mathcal{Z}[J]$ wird dann ein N^4 dimensionales, also gewöhnliches endlich dimensionales Integral (das z.B. auf einem Computer bestimmt werden kann $\rightarrow$ numerische Simulationen der Gitterfeldtheorie). Schließlich bilden wir die Limes

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & L \rightarrow \infty, \quad i.e. \quad N = \frac{L}{a} \rightarrow \infty \quad \text{unendlicher Volumen-Limes} \\ \text{b)} \quad & a \rightarrow 0 \quad \text{Kontinuum-Limes} . \end{aligned} \quad (4.149)$$

Wir erhalten die Green's Funktion der skalaren Quantenfeldtheorie durch die Funktionalableitung (*):

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Big|_{J=0} &= \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{i \int d^4x [\mathcal{L} + \frac{i\epsilon}{2} \phi^2]} \\ &= \langle 0, \infty | T[\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n)] | 0, -\infty \rangle_{J=0} \end{aligned}} \quad (4.150)$$

mit

$$\mathcal{N} = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L} + \frac{i\epsilon}{2} \phi^2]} . \quad (4.151)$$

Um (*) zu zeigen, benötigen wir zunächst einige Formeln für die Funktionalintegration über c -Zahl Funktionen. Wir betrachten zuerst Integrale über endliche Dimensionen:

1) 1-dimensionale Gauß Formel, $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2} dx = \left(\frac{2\pi}{a} \right)^{1/2} . \quad (4.152)$$

2) Reelles Integral über n Dimensionen:

$$\int \Pi_{j=1}^n dx_j e^{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k x_k^2} = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\Pi_k a_k}} . \quad (4.153)$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} , \quad (4.154)$$

und wir benützen für das Skalarprodukt die Notation

$$\sum_k a_k x_k^2 = (\vec{x}, A\vec{x}) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (4.155)$$

Wir definieren das Maß

$$(dx) \equiv \frac{d^n x}{(2\pi)^{n/2}}. \quad (4.156)$$

Dann haben wir

$$\int e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}, A\vec{x})} (dx) = \frac{1}{\sqrt{\det A}}. \quad (4.157)$$

Die Formel gilt für jede reelle, symmetrische positive Matrix A .

3) Verallgemeinerung auf beliebige quadratische Formen der Art

$$Q(\vec{x}) = \frac{1}{2}(\vec{x}, A\vec{x}) + (\vec{b}, \vec{x}) + c, \quad (4.158)$$

wobei A eine positive Matrix ist. Q kann geschrieben werden als

$$Q = Q(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0, A(\vec{x} - \vec{x}_0)) \quad (4.159)$$

mit $\vec{x}_0 = -A^{-1}\vec{b}$. Damit haben wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-[\frac{1}{2}(\vec{x}, A\vec{x}) + (\vec{b}, \vec{x}) + c]} (dx) = \frac{e^{\frac{1}{2}(\vec{b}, A^{-1}\vec{b}) - c}}{\sqrt{\det A}}. \quad (4.160)$$

4) Komplexe Variablen. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $z^* = x - iy$. Damit $dx dy = -\frac{1}{2}i dz dz^*$. Unter Verwendung von

$$\int e^{-a(x^2+y^2)} dx dy = \frac{2\pi}{2a} \quad (4.161)$$

erhalten wir

$$\int e^{-az^*z} \underbrace{\frac{dz^*}{\sqrt{2\pi i}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi i}}}_{\equiv (dz^*)(dz)} = \frac{1}{a}. \quad (4.162)$$

Mit n komplexen Variablen $\vec{z}$, A als einer positiv definiten Hermiteschen Matrix und der Definition des Maßes $(dz) \equiv \frac{d^n z}{(2\pi i)^{n/2}}$, analog (dz^*) , haben wir

$$\int (dz^*) (dz) e^{-(\vec{z}^*, A\vec{z})} = \frac{1}{\det A}. \quad (4.163)$$

Wir verallgemeinern die Gleichungen (4.157),(4.160),(4.163) auf unendlich-dimensionale Funktionalintegrale

$$\vec{x} = (x_i) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \phi(x) \in \mathcal{F}(M_4) , \quad (4.164)$$

x ist ein kontinuierlicher Index, ϕ eine reelle Funktion. Das Skalarprodukt ist definiert als

$$(\phi_1, \phi_2) = \int d^4x \phi_1(x) \phi_2(x). \quad (4.165)$$

Die Verallgemeinerung von Glg. (4.157) ist

$$\int \Pi_x \left(\frac{d\phi(x)}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{-\frac{1}{2} \int d^4y \phi(y) A \phi(y)} = \frac{1}{\sqrt{\det A}} , \quad (4.166)$$

wobei A ein positiver Operator ist und ϕ eine reelle Funktion. Falls $\phi(x)$ eine komplexe Funktion ist, dann

$$\int \left(\Pi_x \frac{d\phi^*(x)}{\sqrt{2\pi i}} \frac{d\phi(x)}{\sqrt{2\pi i}} \right) e^{-\int d^4y \phi^*(y) A \phi(y)} = \frac{1}{\det A} , \quad (4.167)$$

Die Verallgemeinerung der Glgen. (4.157),(4.160),(4.163) ist, genauer aufgeschrieben, im Fall von komplexen Feldern (analog für reelle Felder)

$$\int \left(\Pi_x \frac{d\phi^*(x)}{\sqrt{2\pi i}} \frac{d\phi(x)}{\sqrt{2\pi i}} \right) e^{-\int d^4x_1 d^4x_2 \phi^*(x_1) A(x_1, x_2) \phi(x_2)} = \frac{1}{\det A} , \quad (4.168)$$

wobei $A(x_1, x_2)$ ein positiver Operator ist, der unabhängig von ϕ ist.

Wir wenden dies nun auf die reelle skalare Feldtheorie an. Sei die klassische Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) . \quad (4.169)$$

Das normierte erzeugende Funktional ist

$$\mathcal{Z}[J] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_0 + \frac{i\epsilon}{2} \phi^2 + J\phi]} . \quad (4.170)$$

Der Exponent ist

$$\int d^4x \left[-\frac{i}{2} \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi + iJ\phi \right] + \underbrace{\frac{i}{2} \int_{\text{Rand von } M_4} dn_\mu \phi \partial^\mu \phi}_{=0 \text{ falls } \phi(x) \text{ schnell genug abfällt}} . \quad (4.171)$$

Wir benützen Eq. (4.160), verallgemeinert auf Funktionalintegrale: Setze $A = i(\square + m^2 - i\epsilon)$, $b = -iJ$, $c = 0 \Rightarrow$

$$\mathcal{Z}_0[J] = \frac{1}{\mathcal{N}} e^{\frac{i}{2} \int J(x) (\square + m^2 - i\epsilon)^{-1} J(y) d^4x d^4y} \cdot \underbrace{[\det i(\square + m^2 - i\epsilon)]^{-1/2}}_{\int \Pi_x \frac{d\phi(x)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i}{2} \int d^4x \phi (\square + m^2 - i\epsilon) \phi}} \quad (4.172)$$

Bemerkungen:

- 1) Die Faktoren $1/\sqrt{2\pi}$ im Zähler und $\mathcal{N}$ eliminieren sich.
- 2) Da $\mathcal{Z}_0[0] = 1$, haben wir $\mathcal{N} = [\det i(\square + m^2 - i\epsilon)]^{-1/2}$.
- 3) Das Inverse des Differentialoperators $(\square + m^2 - i\epsilon)$ ist

$$(\square + m^2 - i\epsilon)^{-1} = -\Delta_F(x - y) , \quad (4.173)$$

wo Δ_F der Feynman-Propagator (=kausale 2-Punkt Green's Funktion) ist, der definiert ist als

$$(\square_x + m^2 - i\epsilon)\Delta_F(x - y) = -\delta^4(x - y) . \quad (4.174)$$

Also

$$\Delta_F(x - y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot (x - y)} . \quad (4.175)$$

Damit haben wir schließlich

$$\mathcal{Z}_0[J] = e^{-\frac{i}{2} \int J(x) \Delta_F(x - y) J(y) d^4 x d^4 y} . \quad (4.176)$$

So ist z.B. die 2-Punkt Green's Funktion

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y)] | 0 \rangle &= \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \Big|_{J=0} \\ &= \frac{1}{i^2} \frac{\delta}{\delta J(x)} \left[\left(\frac{-i}{2} \int d^4 x_2 \Delta_F(y - x_2) J(x_2) - \frac{i}{2} \int d^4 x_1 J(x_1) \Delta_F(x_1 - y) \right) e^{-\frac{i}{2} \int J \dots} \right]_{J=0} \\ &= \frac{-1}{i} \Delta_F(x - y) = i \Delta_F(x - y) , \end{aligned} \quad (4.177)$$

wo wir $\Delta_F(x - y) = \Delta_F(y - x)$ benutzt haben.

4.8.3 Grassmann Variablen

Im folgenden werden wir antikommutierende Felder im Pfadintegralformalismus behandeln. Dafür benötigen wir "antikommutierende Zahlen". Diese werden Grassmann-Variablen genannt. Wir betrachten zunächst ihre Eigenschaften, bevor wir sie benützen.

Gewöhnliche Zahlen: x_i mit $[x_i, x_j] = 0$ kommutierend

Grassmann Zahlen: η_i mit $\{\eta_i, \eta_j\} = 0$ antikommutierend

Die Grassmann-Zahlen sind also über die Algebra $\{\eta_i, \eta_j\} = \eta_i \eta_j + \eta_j \eta_i = 0$ für alle i, j , definiert. Dies führt direkt zur Nilpotenz der Grassmann-Variablen,

$$\boxed{\eta_i^2 = 0}$$

Eigenschaften:

1) Funktionen $f(\eta_i)$ der Grassmann-Variablen.

Sei f eine analytische Funktion, dann enthält die Taylor-Entwicklung von $f(\eta_i)$ nur eine endliche Anzahl von Termen. Zum Beispiel

$$f(\eta) = f_0 + f_1 \eta \quad \text{da } \eta^2 = 0. \quad f(\eta_1, \eta_2) = f_0 + f_1 \eta_1 + f_2 \eta_2 + f_{12} \eta_1 \eta_2 \quad (4.178)$$

2) Ableitungen

Die Ableitung (=Links-Ableitung) einer Grassmann-Variablen ist definiert durch

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} \eta_j = \delta_{ij} , \quad \frac{\partial}{\partial \eta_i} a = 0 \quad \text{wobei } a \text{ eine c Zahl ist.} \quad (4.179)$$

Zu beachten: Die Ableitungsoperatoren sind antikommutierend untereinander und mit Grassmann-Variablen $(\partial/\partial \eta_j, \eta_j)$. Zum Beispiel

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} (\eta_1 \eta_2) = \delta_{i1} \eta_2 - \delta_{i2} \eta_1 . \quad (4.180)$$

Bemerkung: Manchmal ist es geeignet, auch eine Rechts-Ableitung zu definieren.

$$\frac{\partial^R}{\partial \eta_i} (\eta_1 \eta_2) = (\eta_1 \eta_2) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \eta_i} = \eta_1 \delta_{i2} - \eta_2 \delta_{i1} . \quad (4.181)$$

Da der Ableitungsoperator selbst antikommutierend ist, haben wir

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta_i}, \frac{\partial}{\partial \eta_j} \right\} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \eta_i^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \eta_i} \right)^2 = 0 , \quad (4.182)$$

was bedeutet, daß die Ableitungen nilpotent sind genau wie η_i . Dies impliziert, daß das Integral über Grassmann-Variablen nicht definiert werden kann als Inverses der Ableitung, da die Ableitung kein Inverses hat.

3) Integration

Das Integral ist so definiert, daß es dasselbe liefert wie die Ableitung.

a) 1 Grassmann-Variable η

Sei f eine analytische Funktion von η , $f(\eta) = a_0 + a_1 \eta$. Dann haben wir $\frac{d}{d\eta} f = a_1$ und $\frac{d^2}{d\eta^2} f(\eta) = 0$. Die Integrationsregeln sind also definiert durch

$$\begin{aligned} \int d\eta a &= 0, & \text{für eine c-Zahl } a \\ \int d\eta a\eta &= a \\ \Rightarrow \int d\eta f(\eta) &= \int d\eta (a_0 + a_1 \eta) = a_1 \end{aligned} \quad (4.183)$$

b) n Variablen η_i

$$\int d\eta_j = 0 , \quad \int d\eta_j \eta_i = \delta_{ij} \quad (4.184)$$

c) Seien $\eta, \bar{\eta}$ unabhängige Grassmann-Variablen, d.h.

$$\begin{aligned} \int d\eta &= \int d\bar{\eta} = 0 \\ \int d\eta \eta &= \int d\bar{\eta} \bar{\eta} = 1 . \end{aligned} \quad (4.185)$$

Wir haben

$$e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - \bar{\eta}\eta + \underbrace{\frac{(\bar{\eta}\eta)^2}{2}}_{0, \text{ da } \eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0} + \dots = 1 - \bar{\eta}\eta$$

$$\Rightarrow \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} = \int d\bar{\eta} d\eta - \int d\bar{\eta} d\eta \bar{\eta}\eta = 0 + \int d\bar{\eta} \bar{\eta} \int d\eta \eta = +1 . \quad (4.186)$$

d) Verallgemeinerung auf mehrere Variablen

Sei

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 \\ \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \bar{\eta}\eta = \bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2 \quad (4.187)$$

dann

$$(\bar{\eta}\eta)^2 = 2\bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 \quad (4.188)$$

und höhere Potenzen

$$(\bar{\eta}\eta)^P = 0 \quad \text{für } p \geq 3 \quad (4.189)$$

Also

$$e^{-\bar{\eta}\eta} = 1 - (\bar{\eta}_1\eta_1 + \bar{\eta}_2\eta_2) + \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 . \quad (4.190)$$

Mit der Definition

$$d\bar{\eta}d\eta \equiv d\bar{\eta}_1d\eta_1d\bar{\eta}_2d\eta_2 \quad (4.191)$$

finden wir

$$\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} = 0 + \int d\bar{\eta}_1 d\eta_1 d\bar{\eta}_2 d\eta_2 \bar{\eta}_1\eta_1\bar{\eta}_2\eta_2 = +1 . \quad (4.192)$$

Variablenänderung

Sei

$$\eta = Bc \quad \text{und} \quad \bar{\eta} = \bar{c}H \quad (4.193)$$

wobei B, H 2×2 c -Zahl Matrizen sind, mit $\det H \neq 0$, $\det B \neq 0$. (η, c sind Grassmann-Zahlen.) Wir haben

$$\eta_1\eta_2 = (B_{11}c_1 + B_{12}c_2)(B_{21}c_1 + B_{22}c_2) = (B_{11}B_{22} - B_{21}B_{12})c_1c_2 = \det B c_1c_2 \quad (4.194)$$

Wir müssen fordern, daß

$$d\eta_1d\eta_2 = (\det B)^{-1}dc_1dc_2 \quad (4.195)$$

so daß die Integrationsregel

$$\int d\eta_1d\eta_2 \eta_1\eta_2 = \int dc_1dc_2 c_1c_2 \quad (4.196)$$

erhalten bleibt. Damit finden wir

$$(\det(BH))^{-1} \int d\bar{c}dc e^{-\bar{c}HBc} = 1 \quad (4.197)$$

Sei $A = HB$. Dann $\det A = \det HB = \det BH$ und damit

$$\int d\bar{c} dc e^{-\bar{c}Ac} = \det A \quad (4.198)$$

Dies kann sofort auf $2n$ Variable $c_j, \bar{c}_j$ verallgemeinert werden.

$$\begin{aligned} \int d\bar{c} dc e^{-\sum_{ij} \bar{c}_i A_{ij} c_j} &= \det A \\ d\bar{c} dc &\equiv d\bar{c}_1 dc_1 \dots d\bar{c}_n dc_n \end{aligned} \quad (4.199)$$

Bemerkung: Für komplexe Zahlen x, y haben wir

$$\int dx dy e^{-xQy} = (\det Q)^{-1} \int dx dz e^{-xz} \sim (\det Q)^{-1} . \quad (4.200)$$

4.8.4 Eichfixierung

Im folgenden betrachten wir die Eichgruppe $SU(N)$ mit den Eichfeldern $A_\mu^a(x)$, $a = 1, \dots, N^2 - 1$. In Bezug auf die Eichinvarianz gibt es in der Pfadintegralformulierung ein Problem: Wir betrachten das Eichfeld $\bar{A}_\mu(x) = \bar{A}_\mu^a(x)T^a$. Der so genannte Orbit $\bar{A}_\mu$ ist definiert als der Satz von Funktionen $\{\bar{A}_\mu^U\}$ mit

$$\bar{A}_\mu^U = U \bar{A}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1} , \quad (4.201)$$

wobei

$$U(x) = \exp\{i\omega_a(x)T^a\} \in SU(N) . \quad (4.202)$$

Das bedeutet, daß der gesamte Eichfeldraum in Äquivalenzklassen $\{\bar{A}_\mu^U\}$ zerlegt werden

kann, mit $\bar{A}_\mu$ als Repräsentant. Wir betrachten das Pfadintegral

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{iS} \quad (4.203)$$

mit

$$\mathcal{D}A = \prod_{a=1}^{N^2-1} \prod_{\mu=0}^3 \prod_x dA_\mu^a(x) . \quad (4.204)$$

Die Wirkung S ist unter lokalen Eichtransformationen invariant, d.h.

$$S[\bar{A}_\mu^U] = S[\bar{A}_\mu] \quad (4.205)$$

Und für das Integrationsmaß haben wir (schematisch)

$$\int \mathcal{D}A = \int \mathcal{D}\bar{A} \int \mathcal{D}U , \quad (4.206)$$

so daß wir für das Pfadintegral

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \int \mathcal{D}\bar{A} e^{iS[\bar{A}]} \int \mathcal{D}U \quad (4.207)$$

erhalten. Letzteres ergibt ∞ . Und den unendlichen Faktor zu vermeiden, schränken wir die Eichfreiheit ein. D.h. wir führen die Eichfixierungsbedingung $F(A) = 0$ ein.

Eichfixierung, Fadeev-Popov Trick

Wir wollen die Eichfixierungsbedingung $F^a(A_\mu^b) = 0$ in das Funktionalintegral einbauen, und dies auf eichinvariante Weise. Geometrisch:

Bemerkung: In nicht-Abelschen Eichtheorien sind die Coulomb-Eichung $\vec{\nabla} \vec{A}_\mu^a = 0$ oder die Euklidische Lorentz-Bedingung $\partial_\mu^E A_\mu^a = 0$ nicht eindeutig für “große” Eichfelder (d.h. Eichfeldkonfigurationen jenseits der Störungstheorie). Dies bedeutet, daß $\vec{\nabla} \vec{A}^U = 0$ mehrere Lösungen $U(x)$ für ein gegebenes $\vec{A}^a$ jenseits der Störungstheorie hat. Dieses Phänomen heißt Gribov Ambiguität.

Mathematische Bemerkungen:

a) The functional integration measure $\mathcal{D}A \equiv \Pi_{x,a,\mu} dA_\mu^a(x)$ is gauge invariant.

Demonstration:

Look at the gauge transformation $A_\mu \rightarrow A'_\mu = UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1}$. The gauge fields are $A_\mu^a = \text{Tr}(2T^a A_\mu)$ and hence $A_\mu^a \rightarrow A'^b_\mu = \text{Tr}(2T^b A'_\mu)$. The measure gets

$$\mathcal{D}A' = \mathcal{D}A \det_{\substack{x, x' \\ \mu, \nu \\ a, b}} \left(\frac{\partial A'^b_\mu}{\partial A^a_\nu} \right) \quad (4.208)$$

and $(A_\mu = A_\mu^a T^a)$

$$\frac{\partial A'^b_\mu(x)}{\partial A^a_\nu(x')} = \text{Tr}[2T^b U(x) T^a U^{-1}(x)] \delta^{(4)}(x - x') g_\mu{}^\nu \quad (4.209)$$

where $U(x) = e^{i\omega_s(x)T^s}$. Use the formula

$$e^{iB} T^a e^{-iB} = T^a + i[B, T^a] + \frac{i^2}{2} [B, [B, T^a]] + \dots \quad (4.210)$$

Mit $e^{iB} = U(x)$ bekommen wir

$$[B, T^a] = \sum_s \omega_s [T^s, T^a] = i \sum_s f_{sac} T^c \omega_s \quad (4.211)$$

Und damit erhalten wir für Glg. (4.209) mit Glg. (4.210)

$$\delta^{(4)}(x-x') g_\mu^\nu \underbrace{(\delta_{ab} + i^2 \sum_s f_{sab} \omega_s + \dots)}_{\text{Matrix } \delta_{ab} + C_{ab}} \quad (4.212)$$

Wir verwenden die Formel

$$\det(I + C) = \exp \text{Tr} \ln(I + C) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{Tr}(C^n) \right) \quad (4.213)$$

Wir wenden dies auf Glg. (4.212) an und erhalten

$$\det \left(\frac{\partial A_\mu^b}{\partial A_\nu^a} \right) = 1 \quad (4.214)$$

in der Gitter-Regularisierung. (Die Gitter-Regularisierung macht aus $\delta^{(4)}(x-x')$ das Kronecker $\delta_{x,x'}$.) Dies bedeutet, daß $\det(\dots)$ unabhängig von $\omega_a(x)$ ist und damit auf die Invarianz von $\mathcal{D}A$ führt.

(Bemerkung: Es würde auch ausreichen, die Invarianz von $\mathcal{D}A$ unter der infinitesimalen Eichtransformation $U(x) = I + i\omega_s(x)T^s + \mathcal{O}(\omega^2)$ zu zeigen.)

b) Invariante Gruppenintegration über kompakte Gruppen G (= Haar Maß)

Sei $g \in G$ eine kompakte Lie-Gruppe und $f(g)$ eine Funktion von g . Für kompakte Liegruppen existiert ein invariantes Gruppenmaß (= Haar Maß) dg , für das gilt

$$\begin{aligned} \int_G dg f(\underbrace{gg_0}_{g'}) &= \int_G dg' f(g') && \text{Rechtsinvarianz} \\ \int_G dg f(\underbrace{g_0g}_{g''}) &= \int_G dg'' f(g'') && \text{Linksinvarianz} \end{aligned} \quad (4.215)$$

für beliebige $g_0 \in G$.

Eine Integration über G entspricht einer Integration über Gruppenparameter. Mit

$$G = \{g(\omega) | \omega = (\omega_1, \dots, \omega_{d(G)}) \in Dc\mathbf{R}^{d(G)}\} \quad (4.216)$$

und dem metrischen Tensor auf der Gruppe

$$M_{ij} = \text{Tr}[g^{-1}(\partial_i g) g^{-1}(\partial_j g)] , \quad (4.217)$$

wobei

$$\partial_i g = \frac{\partial}{\partial \omega_i} g(\omega) \quad (4.218)$$

haben wir die explizite Formel

$$\int_G dg f(g) = K \int_D \Pi_{j=1}^{d(G)} d\omega_j |\det M|^{1/2} f(g(\omega)) \quad (4.219)$$

in welcher die Normierungskonstante K durch die Forderung

$$1 \stackrel{!}{=} \int_G dg = K \int_D d\omega |\det M|^{1/2} \quad (4.220)$$

festgelegt wird. Beispiel:

$$\begin{aligned} U(1) &= \{e^{i\theta} | -\pi \leq \theta \leq \pi\} \\ |\det M|^{1/2} &= |i^2|^{1/2} = 1 \\ \int dg f(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta f(e^{i\theta}) \end{aligned} \quad (4.221)$$

Fadeev-Popov-Trick

Wir betrachten das Funktional

$$\Delta^{-1}[A] \equiv \int DU \delta(F[A^U]) \quad (4.222)$$

wo $DU = \Pi_x dU(x)$ das Gruppenmaß (links- und rechts-invariant, da U eine kompakte Gruppe ist). Das δ Funktional ist explizit $\Pi_{x,a} \delta(F^a[A_\mu^{bU}(x)])$ und $A_\mu^U = U A_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1}$.

Δ^{-1} ist eichinvariant

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}[A^U] &= \int DU' \delta(F[A^{UU'}]) = \int D(UU') \delta(F[A^{UU'}]) \\ &= \int DU'' \delta(F[A^{U''}]) = \Delta^{-1}[A] \end{aligned} \quad (4.223)$$

Trick: Baue dies in das Pfadintegral ein. Wir haben

$$1 = \Delta[A] \int DU \delta(F[A^U]) \quad (4.224)$$

und damit

$$\int DA e^{iS} = \int DA \Delta[A] \int DU \delta(F[A^U]) e^{iS}. \quad (4.225)$$

Wir führen eine Eichtransformation $A_\mu^U \rightarrow A_\mu$ durch und benützen, daß $DA, S[A], \Delta[A]$ eichinvariant sind, so daß wir

$$\int DA e^{iS} = \int DA \Delta[A] \int DU \delta(F[A]) e^{iS} = \int DA \Delta[A] \delta(F[A]) e^{iS} \int DU \quad (4.226)$$

erhalten und damit jetzt das Funktional $\mathcal{Z} = \int DA e^{iS}$ definieren als

$$\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z} = \frac{1}{\mathcal{N}} \int DA \Delta[A] \delta(F[A]) e^{iS} \quad (4.227)$$

Wir berechnen nun $\Delta^{-1}[A]$. Mit der Reskalierung des minimalen Eichtransformations-Parameters mit der Eichkopplung g , $\omega^a \rightarrow g\omega^a$, und $U(x) = 1 + ig\omega_a T^a + \mathcal{O}(\omega^2)$ und $U^{-1} = 1 - ig\omega_a(x)T^a + \mathcal{O}(\omega^2)$ erhalten wir

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^{'a}(x) = \text{Tr}(2T^a A_\mu') = A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b \omega^c - \partial_\mu \omega^a + \mathcal{O}(\omega^2) \quad (4.228)$$

Wir haben

$$DU = \Pi_x dU(x) = \Pi_x \Pi_{a=1}^{d(G)} d\omega_a(x) \sqrt{|\det J|} K \equiv D\omega \quad (4.229)$$

und damit

$$\Delta^{-1}[A] = \int D\omega \Pi_{a,x} \delta(F^a[A^{U(\omega)}(x)]) \quad (4.230)$$

was nach der Variablentransformation $\omega^a(x) \rightarrow F^a[A^{U(\omega)}]$ auf

$$= \int DF \frac{\delta(F[A^U])}{|\det \frac{\delta F^a}{\delta \omega^b}|} = \sum_{\bar{A}} \frac{1}{|\det \frac{\delta F^a[A^U]}{\delta \omega^b}|_{A^U=\bar{A}}} \quad (4.231)$$

führt, wo $\bar{A}$ die Lösung von $F[A^U] = 0$ ist für gegebenes A . (Im allgemeinen gibt es mehrere Lösungen für $F[A^U] = 0$, Gribov Ambiguität. Aber wir machen hier Störungstheorie.) Wir wollen Störungstheorie machen und schauen nur Fluktuationen um (die Feldkonfiguration) $A_\mu = 0$ an. Damit hat $F^a[A^U] = 0$ eine eindeutige Lösung und wir erhalten

$$= \frac{1}{|\det \frac{\delta F}{\delta \omega}|_{\vec{\omega}=0}} \quad (4.232)$$

so daß

$$\Delta[A] = |\det \frac{\delta F^a}{\delta \omega^b}[A^U]|_{\vec{\omega}=0} \quad (4.233)$$

Dies wird genannt:

Fadeev-Popov-Determinante

$$\Delta[A] = |\det_{x,y} M_{ab}(x,y)| \quad (4.234)$$

wobei

$$M_{ab}(x,y) = \frac{\delta F^a[A_\omega(x)]}{\delta \omega^b(y)}|_{\vec{\omega}=0} \quad (4.235)$$

Es reicht aus, $F^a[A^U]$ für infinitesimale Eichtransformationen auszuarbeiten. Für die Berechnung von $M_{ab}(x,y)$ benützen wir, daß

$$\frac{\delta A_{\omega\mu}^a(x)}{\delta \omega^b(y)} = - \underbrace{(\partial_\mu \delta_{ab} + gf_{eab}A_\mu^e(x))}_{\equiv \Delta_\mu} \delta^{(4)}(x-y) \quad (4.236)$$

Δ_μ ist die kovariante Ableitung in der adjungierten Darstellung. Für die kovariante Eichfixierungsbedingung $F^a[A] = \partial^\mu A_\mu^a = 0$ finden wir

$$F^a[A_\omega] = \partial^\mu A_{\mu\omega}^a(x) = \partial^\mu A_\mu^a(x) - \partial^\mu (\Delta_\mu^{ac} \omega^c(x)) \quad (4.237)$$

Der erste Summand ist 0 aufgrund der Eichfixierungsbedingung. Und damit

$$\begin{aligned}
M_{ab}(x, y) &= \frac{\delta F^a[A_\omega(x)]}{\delta \omega^b(y)} \Big|_{\vec{\omega}=0} = -\partial^\mu \Delta_\mu^{ac} \delta_{cb} \delta^{(4)}(x-y) \\
&= -\partial^\mu (\partial_\mu \delta_{ab} + g f_{cab} A_\mu^c(x)) \delta^{(4)}(x-y)
\end{aligned} \tag{4.238}$$

Für die Eichfixierungsbedingung $F^a[A] = 0 \rightarrow F^a[A] = B^a(x)$ (B^a sind Funktionen unabhängig von A) haben wir die gleiche Fadeev-Popov Determinante wie für den kovarianten Eichfixierungsfall und damit das Funktional $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z} \sim \int DA \Delta[A] \delta(F[A] - B) e^{iS} \tag{4.239}$$

Eichinvariante Größen sind unabhängig von einem Wechsel der Eichfixierungsbedingung. Deshalb mitteln wir über $B^a(x)$ mit

$$\int DB \exp \left(-\frac{i}{2\xi} \int d^4x \sum_a B_a^2(x) \right) \quad \xi \in \mathbf{R} \tag{4.240}$$

Dies ändert lediglich den Normierungsfaktor. Wir benützen, daß

$$\det(A_{ij}) = \int d\bar{c} dc e^{-\sum_{ij} \bar{c}_i A_{ij} c_j} \tag{4.241}$$

wobei $\{c_i, c_j\} = 0$, c_i Grassmann Variablen sind. Für die Fadeev-Popov Determinante

$$\Delta[A] = \left| \det \begin{pmatrix} -iM \\ x, y \\ a, b \end{pmatrix} \right| \tag{4.242}$$

(der Faktor $(-i)$ ist Konvention) haben wir dann

$$|\det(-iM)| = \text{const.} \int D\bar{c} Dc \exp \left(i \int d^4x_1 d^4x_2 \bar{c}_a(x_1) M_{ab}(x_1, x_2) c_b(x_2) \right) \tag{4.243}$$

wobei

$$D\bar{c} Dc = \Pi_{x,a} d\bar{c}_a(x) dc_a(x) \tag{4.244}$$

und $c_a(x), \bar{c}_a(x)$ Grassmann-Felder sind. D.h.

$$\{c_a(x), c_b(y)\} = 0 \quad \{\bar{c}_a(x), \bar{c}_b(y)\} = 0 \quad \{c_a(x), \bar{c}_b(y)\} = 0. \tag{4.245}$$

Die Felder $c_a, \bar{c}_a$ transformieren sich als skalare Felder unter Lorentz-Transformationen, d.h. sie sind antikommutierende Spin-0 Felder. Sie haben die falsche Statistik. Sie werden Fadeev-Popov Geistfelder genannt und sind pure Hilfsfelder. In der kovarianten Eichung $\partial_\mu A^{\mu} = 0$ haben wir Glg. (4.238) und nach partieller Integration

$$i \int d^4x d^4y \bar{c}_a(x) M_{ab} c_b(y) = i \int d^4x \partial^\mu \bar{c}_a(x) (\partial_\mu \delta_{ab} + g f_{cab} A_\mu^c(x)) c_b(x) \tag{4.246}$$

so daß das Funktional

$$\mathcal{Z} \sim \int DA D\bar{c} Dc e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{eff}(x)} \tag{4.247}$$

mit

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{class}(x) + \mathcal{L}_{gauge\ fix}(x) + \mathcal{L}_{ghost}(x) \quad (4.248)$$

$$= \mathcal{L}_{class} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 + \partial^\mu \bar{c}_a(x)(\partial_\mu \delta_{ab} + gf_{cab}A_\mu^c)c_b(x) \quad (4.249)$$

Fassen wir zusammen: Wir haben für das gesamte Wirkungsfunctional mit Fermionen

$\mathcal{Z} \sim \int D\bar{\psi} D\psi DA Dc^* Dc \exp i \int d^4x [\mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}] \quad (4.250)$ $\mathcal{L}$ = übliche Lagrangedichte $\mathcal{L}_{GF}$ = Eichfixierung, $\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial A)^2$ etc. $\mathcal{L}_{FP}$ = $\partial\bar{c}\Delta c$ für Eichtheorien, nicht-Abelsche und nicht-lineare Eichfixierung
--

Propagatoren: Die Matrizen zwischen den Bilinearformen der Felder in der gesamten Lagrangedichte hängen von der Eichung ab.

Beispiel: Landau Eichung ($\xi = 0$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GF} &= \frac{-1}{2\xi} \partial A \cdot \partial A \\ \mathcal{Z} &\sim \int DA \exp i \int d^4x d^4y \frac{1}{2} A_\mu^a [\Delta_F^{-1}(x-y)]_{\mu\nu}^{ab} A_\nu^b \\ \Delta_{\mu\nu}^{-1ab} &= [-\partial^2 g_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{\xi} \partial_\mu \partial_\nu] \delta_4(x-y) \delta^{ab} \\ \Delta_{\mu\nu}^{ab}(q) &= \frac{d_{\mu\nu}}{q^2 + i\epsilon} \quad d_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + (1-\xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \end{aligned} \quad (4.251)$$

't Hooft-Feynman Eichung:

Higgs Phänomen in $SO(2)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} (D_\mu \vec{\phi})^2 - V(\vec{\phi}) \\ V(\vec{\phi}) &= \frac{\lambda}{4} \left(\vec{\phi}^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 \quad iD_\mu = i\partial_\mu - gtA_\mu \end{aligned} \quad (4.252)$$

wobei $t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Mit $\vec{\phi} = (\phi_1, v + \eta)$ haben wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{g^2 v^2}{2} A_\mu^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \mu^2 \eta^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 \\ &\quad + igv \partial_\mu (A^\mu \phi_1) - igv (\partial_\mu A^\mu) \phi_1 + \text{3er und 4er Kopplungen} \end{aligned} \quad (4.253)$$

Eichfixierung: Die Eichfixierung ist so gewählt, daß $\mathcal{L}_{tot}$ diagonal in den bilinearen Ausdrücken ist (Eichfelder, Goldstonefelder). Es gibt also keine Übergänge zwischen Eich- und Goldstonefeld.

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\xi} [\partial_\mu A^\mu - i\xi m_A \phi_1]^2 \quad m_A = gv \quad (4.254)$$

Die diagonalen Propagatoren sind:

$$\text{Goldstone Feld: } \frac{i}{q^2 - \xi m_A^2} \quad (4.255)$$

$$\text{Eichfeld: } i \frac{-g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 - \xi m_A^2}}{q^2 - m_A^2} \quad (4.256)$$

und

$$\begin{aligned} \xi \rightarrow \infty & : \text{ unitäre Theorie (kein Goldstone-Beitrag)} \\ \xi \rightarrow 1 & : \text{ Feynman Eichung (Goldstone Propagator } \sim m_A \text{ Masse)} \\ & \text{Renormierung maximal vereinfacht} \end{aligned} \quad (4.257)$$

Geister: Kancellieren die unphysikalischen longitudinalen Beträge in den Propagatoren der Eichfelder

$$\begin{aligned} \Delta_F^{\mu\nu} &= \frac{i}{q^2 - m_A^2} [-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}] - \frac{i\xi}{q^2 - \xi m_A^2} \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \\ &= \frac{i}{q^2 - m_A^2} [-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{m_A^2}] - \frac{i}{q^2 - \xi m_A^2} \frac{q_\mu q_\nu}{m_A^2} \end{aligned} \quad (4.258)$$

Die Eichfixierungslagrangedichte für die GSW Theorie in der R_ξ Eichung lautet:

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2} [F_\gamma^2 + F_Z^2 + 2F_+ F_-] \quad (4.259)$$

$$F_\gamma = \frac{1}{\xi_\gamma^{1/2}} \partial_\mu A^\mu \quad (4.260)$$

$$F_Z = \frac{1}{\xi_Z^{1/2}} [\partial_\mu Z^\mu - \xi_Z m_Z \chi] \quad (4.261)$$

$$F_\pm = \frac{1}{\xi_W^{1/2}} [\partial_\mu W^{\pm\mu} \mp i\xi_W m_W \phi^\pm] \quad (4.262)$$

Die Propagatoren für die Eichbosonen in der R_ξ Eichung sind

$$\begin{aligned} & \frac{i}{k^2 - m_V^2 + i\epsilon} [-g_{\mu\nu} + (1 - \xi_V) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi_V m_V^2 + i\epsilon}] \quad \text{for } V = W^\pm, Z \\ & \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \quad \text{for } V = A. \end{aligned} \quad (4.263)$$

Die Geistpropagatoren sind

$$\begin{aligned} & \frac{i}{k^2 - \xi_V m_V^2 + i\epsilon} \quad \text{for } V = W, Z \\ & \frac{i}{k^2 + i\epsilon} \quad \text{for } V = A. \end{aligned} \quad (4.264)$$

4.9 Wechselwirkungen

Wir gehen von der folgenden Lagrangedichte aus

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}(m^2 - i\epsilon)\phi^2 - \frac{g}{n!}\phi^n(x) = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{WW} \text{ mit } \mathcal{L}_{WW} = -\frac{g}{n!}\phi^n(x) \quad (4.265)$$

Das Vakuumfunktional kann geschrieben werden als

$$\mathcal{Z}[J] = \mathcal{N} \int D\phi \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4z \mathcal{L}_{WW}(\phi(z)) \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J\phi] \right) . \quad (4.266)$$

Mit

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \mathcal{Z}_0[J] = \mathcal{N} \int D\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J\phi] \right) \quad (4.267)$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] &= \mathcal{N} \int D\phi \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4z \mathcal{L}_{WW} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x [\mathcal{L}_0 + J\phi] \right) \\ &= \mathcal{N}' \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}_{WW} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \right) \mathcal{Z}_0[J] . \end{aligned} \quad (4.268)$$

$\mathcal{N}'$ ist gegeben durch $\mathcal{Z}[0] = 1$. Damit ist die Meister(innen)formel der Störungsrechnung

$$\boxed{\mathcal{Z}[J] = \frac{\exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4z \mathcal{L}_{WW} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \right) \mathcal{Z}_0[J]}{\exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4z \mathcal{L}_{WW} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \right) \mathcal{Z}_0[J] \Big|_{J=0}}} \quad (4.269)$$

Für wechselwirkende n -Punkt-Funktionen haben wir dann

$$\langle 0 | T[\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n)] | 0 \rangle_{WW} = \frac{\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4z \mathcal{L}_{WW} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \right) \mathcal{Z}_0[J] \Big|_{J=0}}{\exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4z \mathcal{L}_{WW} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \right) \mathcal{Z}_0[J] \Big|_{J=0}} \quad (4.270)$$

Der Nenner beschreibt die Vakuumgraphen, die herausdividiert werden.

4.9.1 ϕ^4 Theory

Wir werten Glg. (4.269) bis zur Ordnung λ aus für (ab jetzt wieder $\hbar \equiv 1$)

$$\mathcal{L}_{WW} = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4 . \quad (4.271)$$

Für den Zähler Z haben wir

$$Z = \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] \underbrace{\exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right)}_{\mathcal{Z}_0[J]} \quad (4.272)$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
(1) \quad \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \mathcal{Z}_0[J] &= - \int d^4x J(x) \Delta_F(z-x) \mathcal{Z}_0[J] \\
(2) \quad \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2}{\delta J(z) \delta J(z)} \mathcal{Z}_0[J] &= \left\{ i \Delta_F(0) + \left[\int d^4x \Delta_F(z-x) J(x) \right]^2 \right\} \mathcal{Z}_0[J] \\
(3) \quad \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^3 \mathcal{Z}_0[J] &= \left\{ -3i \Delta_F(0) \int d^4x \Delta_F(z-x) J(x) - \left[\int d^4x J(x) \Delta_F(z-x) \right]^3 \right\} \mathcal{Z}_0[J] \\
(4) \quad \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 \mathcal{Z}_0[J] &= \left\{ -3[\Delta_F(0)]^2 + 6i \Delta_F(0) \left[\int d^4x \Delta_F(z-x) J(x) \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \left[\int d^4x \Delta_F(z-x) J(x) \right]^4 \right\} \mathcal{Z}_0[J] .
\end{aligned}$$

Darstellung im Diagramm:

$$\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right)^4 \mathcal{Z}_0[J] = \left\{ -3 \text{ Vakuumdiagramm} \right\} + 6i \int d^4x_1 d^4x_2 \text{ Bild} + \int \Pi_{j=1}^4 d^4x_j \text{ Bild} \\
\left\{ +\mathcal{O}(\lambda^2) \right\} \mathcal{Z}_0[J] . \quad (4.273)$$

Der Nenner N :

$$N = Z|_{J=0} = 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z (-3 \text{ Vakuumdiagramm} + \mathcal{O}(\lambda^2)) . \quad (4.274)$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[J] &= \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \text{Zähler} \left(1 + \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z (-3 \text{ Vakuumdiagramm} + \mathcal{O}(\lambda^2)) \right) \\
&= \left\{ 1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \left(6i \int d^4x_1 d^4x_2 \text{ Bild} + \int \Pi_{j=1}^4 d^4x_j \text{ Bild} \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \right\} \mathcal{Z}_0[J] .
\end{aligned} \quad (4.275)$$

Das heißt, Vakuumdiagramme treten in normierten $\mathcal{Z}[J]$ nicht auf. Dies gilt in allen Ordnungen der Störungstheorie. Für die 4-Punkt-Funktion

$$\langle 0 | T[\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_3) \hat{\phi}(x_4)] | 0 \rangle_{WW} \quad (4.276)$$

bekommen wir mit Glg. (4.270) und (4.138) dann

BILD

$$= \tau(x_1 x_2) \tau(x_3 x_4) + \tau(x_1 x_3) \tau(x_2 x_4) + \tau(x_1 x_4) \tau(x_2 x_3) + \tau_c(x_1, x_2, x_3, x_4) . \quad (4.277)$$

Dabei bezeichnet τ_c zusammenhängende Greenfunktionen. Gesucht ist ein Erzeugenden-Funktional $W[J]$ für zusammenhängende Greenfunktionen $\tau_c(x_1, \dots, x_n)$. Dieses ist gegeben durch

$$\mathcal{Z}[J] = \exp(iW[J]) . \quad (4.278)$$

Dies sieht man folgendermaßen. Wegen $\mathcal{Z}[0] = 1$ ist $W[0] = 0$. Und für die Ableitungen haben wir

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \mathcal{Z} = \frac{\delta W}{\delta J(x_1)} \exp(iW) \Rightarrow \left. \frac{\delta W}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = 0 \quad (4.279)$$

$$\frac{1}{i^2} \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \mathcal{Z} = \frac{\delta W}{\delta J(x_1)} \frac{\delta W}{\delta J(x_2)} \exp(iW) - i \frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \exp(iW) . \quad (4.280)$$

Für $J = 0$ gilt:

$$\left. \frac{\delta^2 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \right|_{J=0} = i\tau(x_1, x_2) \quad (4.281)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{i^4} \frac{\delta^4}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \mathcal{Z} \right|_{J=0} &= \tau(x_1, x_3) \tau(x_2, x_4) + \tau(x_1, x_4) \tau(x_2, x_3) \\ &\quad + \tau(x_1, x_2) \tau(x_3, x_4) \\ &\quad + (-i) \frac{1}{i^2} \frac{\delta^4 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \end{aligned} \quad (4.282)$$

Und damit

$$i \left. \frac{\delta^4 W}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \right|_{J=0} = \tau_c(x_1, x_2, x_3, x_4) . \quad (4.283)$$

Somit erzeugt $W[J] = -i \ln \mathcal{Z}[J]$ die zusammenhängenden Greenfunktionen.

4.10 Fermifelder

Mit der kanonischen Feldquantisierung der Diracfeldoperatoren

$$\hat{\psi}(x) , \hat{\bar{\psi}}(x) = \hat{\psi}^\dagger \gamma^0 , \quad (4.284)$$

muß man, damit sich die Fermistatistik ergibt, die Antivertauschungsregeln postulieren,

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}_r(x), \hat{\psi}_s(y)\} &= \{\hat{\bar{\psi}}_r(x), \hat{\bar{\psi}}_s(y)\} = 0 \\ \{\hat{\psi}_r(x), \hat{\bar{\psi}}_s(y)\}_{x^0=y^0} &= \delta_{rs} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) . \end{aligned} \quad (4.285)$$

In der Funktionalintegralquantisierung benötigen wir, da es kein c -Zahl-Äquivalent zu $\hat{\psi}, \hat{\bar{\psi}}$ gibt, Grassmann-Variablen.

Wir hatten für die Grassmann-Variablen $c_i, \bar{c}_i$ ($i = 1, \dots, n$) gesehen

$$\begin{aligned} \int d\bar{c} dc \quad e^{-\sum_{ij} \bar{c}_i A_{ij} c_j} &= \det A \\ d\bar{c} dc &\equiv d\bar{c}_1 dc_1 \dots d\bar{c}_n dc_n . \end{aligned} \quad (4.286)$$

Um Fermifelder zu beschreiben, machen wir nun den Übergang zur unendlich-dimensionalen Grassmann-Algebra

$$c_i \rightarrow \psi(x) = \psi_r(x) \quad , \quad r = \text{Spinor-Index} . \quad (4.287)$$

Hier ist $\psi(x)$ ein Grassmann-„Feld“, d.h. eine Grassmann-Variable mit kontinuierlichem Index $x \in M_4$. Es gilt die Grassmann-Algebra

$$\{\psi_r(x), \psi_s(y)\} = 0 \quad (4.288)$$

und

$$\frac{\delta}{\delta\psi_s(y)}\psi_r(x) = \delta_{rs}\delta^{(4)}(x-y), \quad \int d\psi_r(x) = 0, \quad \int d\psi_r(x)\psi_s(x) = \delta_{rs}. \quad (4.289)$$

Wir benötigen noch das unabhängige Grassmann-Feld $\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}_r(x)$. Es gilt die Algebra

$$\{\bar{\psi}_r(x), \bar{\psi}_s(y)\} = \{\psi_r(x), \bar{\psi}_s(y)\} = 0. \quad (4.290)$$

Die Differentiation und Integration sind analog zum Fall $\psi(x)$.

Die Lagrangedichte für die freie Diractheorie lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \\ &= \bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\psi. \end{aligned} \quad (4.291)$$

Wir schreiben ein normiertes erzeugendes Funktional analog zum skalaren Feld. Dazu führen wir die Grassmann-Felder $\eta = \eta_r(x)$ und $\bar{\eta} = \bar{\eta}_s(x)$ ein, welche als Quellen für die Felder $\bar{\psi}_r(x)$ bzw. $\psi_s(x)$ dienen. Damit haben wir für das normierte erzeugende Funktional

$$\mathcal{Z}_0[\bar{\eta}, \eta] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left(i \int d^4x [\mathcal{L}_0 + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)\eta(x)]\right), \quad (4.292)$$

wobei

$$\mathcal{N} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}_0(x)\right) \quad (4.293)$$

und

$$\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \Pi_x \Pi_{r=1}^4 d\bar{\psi}_r(x) d\psi_r(x). \quad (4.294)$$

Die Greenfunktionen sind gegeben durch

$$\langle 0|T[\hat{\psi}_{r_1}(x_1)\dots\hat{\psi}_{r_n}(x)\hat{\bar{\psi}}_{s_1}(y_1)\dots\hat{\bar{\psi}}_{s_n}(y_n)]|0\rangle = \left|\frac{1}{i^n} \left(\frac{1}{-i}\right)^n \frac{\delta^{2n}\mathcal{Z}_0[\bar{\eta}, \eta]}{\delta\bar{\eta}_{r_1}(x_1)\dots\delta\eta_{s_n}(y_n)}\right|_{\eta=\bar{\eta}=0}. \quad (4.295)$$

Die Faktoren $1/(-i)$ treten deswegen auf, weil

$$\frac{\delta}{\delta\eta_{s_i}(y_i)}\bar{\psi}_r(x)\eta_r(x) = -\bar{\psi}_r(x)\frac{\delta}{\delta\eta_{s_i}(y_i)}\eta_r(x) = -\bar{\psi}_{s_i}(y_i). \quad (4.296)$$

Beachte weiter, daß

$$\frac{\delta^2}{\delta\eta(x)\delta\bar{\eta}(y)} = -\frac{\delta^2}{\delta\bar{\eta}(y)\delta\eta(x)}. \quad (4.297)$$

Wir suchen nach einer Formel $\mathcal{Z}_0$ analog zum skalaren Fall. Wir führen die folgende Notation ein

$$S_F^{-1} \equiv i\gamma_\mu\partial^\mu - m. \quad (4.298)$$

Dann

$$(i\gamma_\mu \partial_x^\mu - m)_{rr_1} S_{F r_1 s}(x - y) = \delta_{rs} \delta^{(4)}(x - y) , \quad (4.299)$$

wobei $S_f(x - y)$ der Feynman-Propagator für ein freies Diracfermion ist. Wir haben

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} . \quad (4.300)$$

Außerdem gilt die Darstellung

$$S_F(x - y) = (i\gamma \cdot \partial_x + m) \Delta_F(x - y) . \quad (4.301)$$

Wir schreiben deshalb Glg. (4.292) als

$$\mathcal{Z}_0[\bar{\eta}, \eta] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4 x Q} , \quad (4.302)$$

wobei

$$Q = \underbrace{\bar{\psi} S_F^{-1} \psi}_{\mathcal{L}_0} + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta . \quad (4.303)$$

Es ist

$$Q = Q_0 + (\bar{\psi} - \bar{\psi}_0) S_F^{-1} (\psi - \psi_0) , \quad (4.304)$$

wobei

$$Q_0 = -\bar{\eta} S_F \eta = -\bar{\eta}(x) \int d^4 z S_F(x - z) \eta(z) \quad (4.305)$$

$$\psi_0 = -S_F \eta = - \int d^4 z S_F(x - z) \eta(z) \quad (4.306)$$

$$\bar{\psi}_0 = -\bar{\eta} S_F = - \int d^4 z \bar{\eta}(z) S_F(z - x) . \quad (4.307)$$

Damit also

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0[\bar{\eta}, \eta] &= \frac{1}{\mathcal{N}} \exp \left(-i \int d^4 x d^4 z \bar{\eta}(x) S_F(x - z) \eta(z) \right) \\ &\quad \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left(i \int d^4 x (\bar{\psi} - \bar{\psi}_0) S_F^{-1} (\psi - \psi_0) \right) . \end{aligned} \quad (4.308)$$

Wir führen eine Feldtransformation durch:

$$\psi'(x) = \psi(x) - \psi_0(x) \quad \text{und} \quad \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) - \bar{\psi}_0(x) . \quad (4.309)$$

Es ist

$$\mathcal{D}\bar{\psi}' \mathcal{D}\psi' = \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi . \quad (4.310)$$

Wir wenden Glg. (4.286) auf das 2. Integral an und erhalten

$$\det(iS_F^{-1}) = \det[i(i\gamma \cdot \partial - m)] . \quad (4.311)$$

Damit haben wir

$$\mathcal{N} = \det(iS_F^{-1}) \quad (4.312)$$

und also für das normierte erzeugende Funktional

$$\mathcal{Z}_0[\bar{\eta}, \eta] = e^{-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y)} . \quad (4.313)$$

Check:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T[\hat{\psi}(x) \hat{\bar{\psi}}(y)] | 0 \rangle &= \left. \frac{-1}{i^2} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}_0}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} \right|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= \frac{\delta^2}{\delta \bar{\eta}(x) \delta \eta(y)} \left\{ 1 - i \int d^4z_1 d^4z_2 \bar{\eta}(z_1) S_F(z_1 - z_2) \eta(z_2) + \dots \right\} \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= i S_F(x - y) . \end{aligned} \quad (4.314)$$

4.10.1 Erzeugendes Funktional für wechselwirkende Feldtheorien

Wir betrachten eine wechselwirkende Feldtheorie für ein hermitesches skalares Feld und ein Diracfeld. Die klassische Lagrangedichte sei von der Form

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\Phi) + \mathcal{L}_0(\bar{\psi}, \psi) + \mathcal{L}_I(\bar{\psi}, \psi, \Phi) , \quad (4.315)$$

wobei der Index 0 die freien Lagrangedichten bezeichnet und der Index I für interaction, d.h. Wechselwirkung steht. Ein Beispiel für eine Wechselwirkung ist die Yukawa-Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_I = -h \bar{\psi} \psi \Phi , \quad (4.316)$$

wobei h die Yukawa-Kopplung bezeichnet. Bemerkung: Bei Diracfermionen enthält $\mathcal{L}_I$ die gleiche Zahl von ψ und $\bar{\psi}$, da sonst die wechselwirkende Lagrangedichte die Ladungserhaltung verletzen würde. Wir können eine Formel für das erzeugende Funktional der obigen Theorie herleiten, indem wir in $\mathcal{L}_I$ die folgenden Ersetzungen machen:

$$\bar{\psi}(z) \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(z)} , \quad \psi(z) \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(z)} , \quad \Phi(z) \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} . \quad (4.317)$$

Damit erhalten wir die Meiserformel der funktionalen Störungsrechnung

$$\mathcal{Z}[J, \bar{\eta}, \eta] = \frac{\exp \left(i \int d^4z \mathcal{L}_I \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(z)}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(z)}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \right) \mathcal{Z}_0[J] \mathcal{Z}_0[\bar{\eta}, \eta]}{\exp \left(i \int d^4z \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(z)}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(z)}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(z)} \right) \right) \mathcal{Z}_0[J] \mathcal{Z}_0[\bar{\eta}, \eta]} \Big|_{J=\bar{\eta}=\eta=0} . \quad (4.318)$$

4.11 Nicht-abelsche Eichtheorien

Im folgenden betrachten wir die Eichgruppe $SU(N)$, d.h. wir haben die Eichfelder $A_\mu^a(x)$ ($a = 1, \dots, N^2 - 1$) und ein Diracfeld $\psi_j(x)$ ($j = 1, \dots, N$) in der Fundamentaldarstellung F bzw. $\bar{\psi}_j(x)$ in der Darstellung $\bar{F}$. Die Felder transformieren sich gemäß

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U A_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1} \quad (4.319)$$

$$\psi \rightarrow \psi'(x) = U(x) \psi(x) \quad (4.320)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) U^\dagger(x) , \quad (4.321)$$

wobei

$$U(x) = \exp i\omega_a(x)T^a \in SU(N) . \quad (4.322)$$

Die Generatoren der Gruppe $SU(N)$ sind durch T^a bezeichnet. Die klassische Lagrangedichte ist gegeben durch

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a(x)F^{\mu\nu a}(x) + \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) . \quad (4.323)$$

Dabei ist $F^{\mu\nu}$ der Feldstärkentensor, D_μ die kovariante Ableitung und m die Masse des Fermions. Wir haben den Fadeev-Popov-Trick kennengelernt, mit dem wir das Problem der Eichinvarianz bei der Pfadintegralquantisierung in den Griff bekommen können. Damit wird die Eichfixierungsbedingung in die Lagrangedichte implementiert. Ferner treten die Fadeev-Popov-Geister auf, die reine Hilfsfelder sind. Es handelt sich hier um skalare Felder, die aber der Fermistatistik unterliegen. Ferner haben wir gesehen, wie der Pfadintegralformalismus für Fermifelder aussieht. Damit können wir schlußendlich das erzeugende Funktional für nicht-abelsche Eichtheorien aufschreiben. Dieses ist proportional zu

$$\mathcal{Z} \sim \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{eff}(x)} . \quad (4.324)$$

Dabei ist $\mathcal{L}_{eff}$ in der kovarianten Eichung gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= \mathcal{L}_{klass}(x) + \mathcal{L}_{Eichfix}(x) + \mathcal{L}_{Geist}(x) \\ &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \bar{\psi}_l(i\gamma^\mu D_{\mu l j} - m\delta_{lj})\psi_j - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu})^2 \\ &\quad + \partial^\mu \bar{c}_a(x)(\partial_\mu \delta_{ab} + gf_{cab}A_\mu^c)c_b(x) . \end{aligned} \quad (4.325)$$

Für die Berechnung von Greenfunktionen führen wir Quellen ein:

$$A_\mu^a(x) \leftrightarrow J^{a\mu}(x) \quad \text{reelle Funktion} \quad (4.326)$$

$$\psi_{s_j}(x) \leftrightarrow \bar{\eta}_{s_j}(x) \quad \text{Grassmann-Variable} \quad (4.327)$$

$$\bar{\psi}_{s_j}(x) \leftrightarrow \eta_{s_j}(x) \quad \text{Grassmann-Variable} . \quad (4.328)$$

Aus mathematischen Gründen führen wir auch Quellen für die Geistfelder ein:

$$c_a(x) \leftrightarrow \bar{\zeta}_a(x) \quad \text{Grassmann-Variable} \quad (4.329)$$

$$\bar{c}_a(x) \leftrightarrow \zeta_a(x) \quad \text{Grassmann-Variable} . \quad (4.330)$$

Damit erhalten wir für das normierte erzeugende Funktional

$$\mathcal{Z}_0[J, \eta, \bar{\eta}, \zeta, \bar{\zeta}] = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \{ \mathcal{L}_{eff} + A^\mu J_\mu + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + \bar{c}\zeta + \bar{\zeta}c \}} , \quad (4.331)$$

wobei

$$\mathcal{N} = \text{Zähler}_{J=\eta=\bar{\eta}=\zeta=\bar{\zeta}=0} . \quad (4.332)$$

Die Greenfunktionen sind gegeben durch

$$\langle 0 | T [\hat{A}_\mu^a(x) \dots \hat{\psi}_{s_j}(y) \dots \hat{\bar{\psi}}_{r_l}(z) \dots \hat{c}_b(u) \dots \hat{\bar{c}}_d(v)] | 0 \rangle \quad (4.333)$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{a\mu}(x)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{s_j}(y)} \dots \frac{1}{-i} \frac{\delta}{\delta \eta_{r_l}(z)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\zeta}_b(u)} \dots \frac{1}{-i} \frac{\delta}{\delta \zeta_d(v)} \mathcal{Z} |_{\text{Quellen}=0} . \quad (4.334)$$

Das erzeugende Funktional für zusammenhängende Greenfunktionen ist gegeben durch

$$W[J, \eta, \bar{\eta}, \zeta, \bar{\zeta}] = \frac{1}{i} \ln \mathcal{Z}[J, \eta, \bar{\eta}, \zeta, \bar{\zeta}] . \quad (4.335)$$

Beispiel: Wir betrachten die abelsche $U(1)$ -Eichtheorie mit kovarianter Eichung,

$$\partial^\mu A_\mu = 0 . \quad (4.336)$$

Damit haben wir, da $f_{abc} = 0$,

$$M_{ab}(x, y) = -\partial^\mu \partial_\mu \delta^{(4)}(x - y) . \quad (4.337)$$

Das erzeugende Funktional für physikalische Greenfunktionen ist dann

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J, \eta, \bar{\eta}] &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \{ \mathcal{L}_{klass} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 + JA + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi \}} \\ &\quad \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \partial^\mu \bar{c} \partial_\mu c} \\ &\quad \left\{ \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \{ \mathcal{L}_{klass} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \}} \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \partial^\mu \bar{c} \partial_\mu c} \right\}^{-1} . \end{aligned} \quad (4.338)$$

Da es keine Geist-Photon-Wechselwirkung gibt, faktorisiert der Geistanteil und kürzt sich gegen den Nenner raus. Wählt man allerdings eine nichtlineare Eichfixierungsbedingung, dann gibt es auch im abelschen Fall Geister.

Nicht-abelsche Eichtheorie: Axiale Eichungen:

$$F[A_\mu^a] = n^\mu A_\mu^a = 0 , \quad (4.339)$$

wobei

$$n^\mu = \text{konst. 4-er Vektor} \quad \text{oft } n^\mu = (0, 0, 0, 1) . \quad (4.340)$$

Damit ist die Fadeev-Popov-Determinante Δ unabhängig von A_μ^a und der Geistanteil im Zähler von $\mathcal{Z}$ kürzt sich gegen den im Nenner raus. Allerdings liefert diese Eichung einen komplizierten Eichfeldpropagator.

4.11.1 Greenfunktion in der Störungstheorie

Wir benützen im folgenden die kovariante Eichfixierung. Wir zerlegen die Wirkung, d.h.

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_{eff} = \int d^4x \mathcal{L}_0 + \int d^4x \mathcal{L}_I . \quad (4.341)$$

Dabei ist mit

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (4.342)$$

und nach partieller Integration

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} A_\mu^a \left(g^{\mu\nu} \partial^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu^a + \bar{\psi}_l (i \not{\partial} - m) \psi_l - \bar{c}_a \partial^2 c_a \quad (4.343)$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I &= \mathcal{L}_I(A, \bar{\psi}, \psi, \bar{c}, c) \\ &= \frac{g}{2} f_{abc} (\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}) A^{b\mu} A^{c\nu} - \frac{g^2}{4} f_{abe} f_{cde} A^{a\mu} A^{b\nu} A_\mu^c A_\nu^d + g f_{abc} (\partial_\mu \bar{c}_a) c_b A^{c\mu} \\ &\quad - g \bar{\psi}_j T_{jl}^a \gamma^\mu \psi_l A_\mu^a, \quad j, l \text{ Farbindizes} .\end{aligned}\quad (4.344)$$

Unter der Annahme, daß die Kopplung g klein ist, können wir e^{iS} entwickeln. und erhalten

$$\begin{aligned}e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_{eff} + \text{Quellterme})} &= \left\{ 1 + i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) + \frac{i^2}{2} \left(\int d^4z \mathcal{L}_I(z) \right)^2 + \dots \right\} \\ &e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \text{Quellterme})} .\end{aligned}\quad (4.345)$$

Und somit haben wir die Meister(innen)formel der funktionalen Störungstheorie

$$\mathcal{Z}[J, \eta, \bar{\eta}, \zeta, \bar{\zeta}] = \frac{e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \zeta}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\zeta}})} \mathcal{Z}_0[J, \eta, \bar{\eta}, \zeta, \bar{\zeta}]}{\text{Zähler}|_{\text{Quellen}=0}} .\quad (4.346)$$

Dabei ist das normierte erzeugende Funktional der freien Theorie gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_0 &= \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{i \int d^4x \{ \mathcal{L}_0(x) + JA + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + \bar{\zeta}c + \bar{c}\zeta \}}}{\text{Zähler}|_{\text{Quellen}=0}} \\ &= e^{-i \int d^4x d^4y \{ \frac{1}{2} J_a^\mu(x) D_{F\mu\nu}^{ab}(x, y) J_b^\nu(y) + \bar{\eta}_{ri}(x) S_{Frs}^{lj}(x-y) \eta_{sj}(y) + \bar{\zeta}_a(x) \Delta_F^{ab}(x-y, m=0) \zeta_b(y) \}} ,\end{aligned}\quad (4.347)$$

mit der kausalen Greenfunktion $D_{F\mu\nu}$, für die gilt

$$\begin{aligned}\left(\partial^2 g_\alpha^\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial_\alpha \right)_x \delta_{ac} D_F^{bc\alpha\nu}(x-y) &= \delta_{ab} \delta^{(4)}(x-y) g^{\mu\nu} \\ D_{F\mu\nu}^{ab}(x-y) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} \left[-\frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} + (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + i\epsilon)^2} \right] \delta_{ab} .\end{aligned}\quad (4.348)$$

Wir haben folgende Eichparameter:

$$\begin{aligned}\xi = 1 : & \quad \text{Feynman-Eichung} \\ \xi = 0 : & \quad \text{Landau-Eichung} .\end{aligned}\quad (4.349)$$

Für den Geistpropagator haben wir

$$\begin{aligned}\delta_{ac} \partial^2 \Delta_F^{cb}(x-y, m=0) &= -\delta_{ab} \delta^{(4)}(x-y) \Rightarrow \\ \Delta_F^{ab}(x-y) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\delta_{ab}}{k^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} .\end{aligned}\quad (4.350)$$

Und für den Fermionpropagator

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_{rs'} \delta_{jl'} S_{F s' s}^{l' l}(x-y) &= \delta_{jl} \delta_{rs} \delta^{(4)}(x-y) \Rightarrow \\ S_{F rs}^{lj}(x-y) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + m)_{rs} \delta_{lj}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} .\end{aligned}\quad (4.351)$$

Check: Die 2-Punkt-Funktion der freien Theorie ist gegeben durch

$$\langle 0 | T[\hat{A}_\mu^a(x) \hat{A}_\nu^b(y)] | 0 \rangle_{\text{frei}} = \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 \mathcal{Z}_0}{\delta J^{a\mu}(x) \delta J^{b\nu}(y)} \Big|_{\text{Quellen}=0} = i D_{F\mu\nu}^{ab}(x-y) \quad (4.352)$$

$$\langle 0 | T[\hat{\psi}_{rj}(x) \hat{\bar{\psi}}_{st}(y)] | 0 \rangle_{\text{frei}} = i S_{Frs}^{lj}(x-y) \quad (4.353)$$

$$\langle 0 | T[\hat{c}_a(x) \hat{\bar{c}}_b(y)] | 0 \rangle_{\text{frei}} = i \Delta_F^{ab}(x-y, m=0) . \quad (4.354)$$

Im folgenden wird beschrieben, wie ein T-Matrixelement $\mathcal{T}_{fi}$ berechnet wird. Wir betrachten hierfür den Prozess $i \rightarrow f$ bis zur Ordnung g^n . Wir haben

$$\langle f | (\hat{S} - I) | i \rangle = i \mathcal{T}_{fi} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) . \quad (4.355)$$

Die Vorgehensweise ist

1. Bestimme das Funktional $\mathcal{Z}$ bzw. W bis zur Ordnung g^n .
2. Bestimme die dem Prozess entsprechende Greenfunktion

$$G_{zush.\mu\dots r\dots s}^{a\dots l\dots j}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T[A_\mu^a(x), \dots, \psi_{rl}, \dots, \bar{\psi}_{sj}] | 0 \rangle_{\text{zus.h\"angend}} \quad (4.356)$$

durch funktionale Differentiation von W .

3. Amputieren, d.h. mit inversen freien Propagatoren multiplizieren. BILD Liefert

$$G_{\text{zus.h\"angend,amputiert}}(x_1, \dots, x_n) . \quad (4.357)$$

4. Fouriertransformation

$$\tilde{G}(p_1, \dots, p_n) (2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) = \int \Pi d^4 x_j e^{-i \sum p_j x_j} G(x_j) . \quad (4.358)$$

5. Mit externen Wellenfunktionen multiplizieren und on-shell gehen.

$$\Rightarrow i \mathcal{T}_{fi} = \lim_{p_i^2 \rightarrow m_i^2} \tilde{G}_{\text{trunc}} . \quad (4.359)$$

4.12 Die Feynmanregeln der Quantenchromodynamik

Wir haben Quarks q mit Spinorindex $r = 1, \dots, 4$ und Farbindex $l = 1, \dots, 3$, $q_{rl}(x)$. Quarks sind Triplets bezüglich der $SU(3)$. Wir haben Gluonen G mit Lorentzindex $\mu = 1, \dots, 4$ und Farbindex $a = 1, \dots, 8$, $G_\mu(x)$. Es handelt sich um masselose Spin-1-Felder. Die Fourierzerlegung ist gegeben durch

$$G_\mu^a(x) = \int \frac{d^3 k}{2k_0 (2\pi)^4} \sum_\lambda \{ e^{ikx} \epsilon_\mu^{*a}(\lambda) \alpha^{a\dagger}(k, \lambda) + e^{-ikx} \epsilon_\mu^a(\lambda) \alpha^a(k, \lambda) \} , \quad (4.360)$$

wobei ϵ_μ der Polarisationsvektor ist und $\lambda = 1, \dots, 4$ den Polarisationsindex bezeichnet. Bei $\alpha^{(\dagger)}$ handelt es sich um den Vernichter (Erzeuger). Die Polarisationsindizes $\lambda = 1, 2$ bezeichnen physikalische, die Indizes 3, 4 unphysikalische Polarisationszustände. Für die Erzeuger und Vernichter gilt

$$[\alpha^a(k, \lambda), \alpha^{\dagger b}(k', \lambda')] = -(2\pi)^3 2k_0 g_{\lambda\lambda'} \delta_{ab} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') . \quad (4.361)$$

Die Polarisationssumme ist gegeben durch

$$\sum_{\text{physikal. Pol. } \lambda=1,2} \epsilon_\mu^{*a}(k, \lambda) \epsilon_\nu^b(k, \lambda) = \delta_{ab} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu \bar{k}_\nu + \bar{k}_\mu k_\nu}{k \bar{k}} \right) , \quad (4.362)$$

wobei $k = (k_0, \vec{k})$ und $\bar{k} = (k_0, -\vec{k})$. Aufgrund der Erhaltung des Fermionstromes hatten wir in der Quantenelektrodynamik (QED)

$$\sum_{\text{physikal. Pol. } \lambda=1,2} \epsilon_\mu^*(k, \lambda) \epsilon_\nu(k, \lambda) = -g_{\mu\nu} \quad \text{für QED} . \quad (4.363)$$

In der QCD gilt diese Regel aber nicht mehr. Für die Geistfelder haben wir die Fourierzerlegung

$$c^a(x) = \int \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} [f^a(k) e^{-ikx} + d^{\dagger a}(k) e^{ikx}] , \quad (4.364)$$

wobei $f^a(k)$ ($d^{\dagger a}$) einen Geist vernichtet (erzeugt) und $a = 1, \dots, 8$. Für die Quark- und Antiquark-Spinoren gilt

$$(\not{p} - m)_{ss'} u_{ls'}(p, r) = 0 \quad (4.365)$$

$$(\not{p} + m)_{ss'} v_{ls'}(p, r) = 0 \quad \text{wobei } r = \pm \frac{1}{2} . \quad (4.366)$$

Sie sind normiert auf

$$\bar{u}_l(p, r) \cdot u_j(p, r') = 2m \delta_{rr'} \delta_{lj} \quad (4.367)$$

$$\bar{v}_l(p, r) \cdot v_j(p, r') = -2m \delta_{rr'} \delta_{lj} , \quad l, j = 1, 2, 3 \quad r, r' = 1 \dots 4 . \quad (4.368)$$

Ferner gilt

$$\sum_{r=\pm 1/2} \bar{u}_{ls}(p, r) u_{js'}(p, r) = \delta_{lj} (\not{p} + m)_{ss'} \quad (4.369)$$

$$\sum_{r=\pm 1/2} \bar{v}_{ls}(p, r) v_{js'}(p, r) = \delta_{lj} (\not{p} - m)_{ss'} . \quad (4.370)$$

3-Gluon-Vertex: Als Beispiel leiten wir den 3-Gluon-Vertex her. Die Vorgehensweise wurde im vorigen Abschnitt 4.11.1 beschrieben. Wir betrachten in der Wechselwirkungslagrangedichte $\mathcal{L}_I$ (siehe Glg. (4.344)) nur den 3-Gluon-Anteil $\mathcal{L}_{3G}$ und bestimmen den relevanten Anteil von $\mathcal{Z}$ bis zur Ordnung g . Also

$$e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{3G}} = 1 + i \int d^4x \mathcal{L}_{3G} + \mathcal{O}(g^2) . \quad (4.371)$$

Und damit

$$\mathcal{Z}_{\text{relevant}} = \left[1 + i \int d^4x \mathcal{L}_{3G} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{a\mu}(x)} \right) + \dots \right] \mathcal{Z}_{0G}[J] . \quad (4.372)$$

Mit

$$\mathcal{Z}_{0G}[J] = e^{-\frac{i}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 J^{a\mu}(x_1) D_{F\mu\nu}^{ab}(x_1-x_2) J^{\nu b}(x_2)} \quad (4.373)$$

haben wir für

$$\begin{aligned} & i \int d^4x \mathcal{L}_{3G} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{a\mu}(x)} \right) \mathcal{Z}_{0G}[J] \\ &= i \frac{g}{2} f_{abc} \int d^4x \left(\partial_\mu \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{a\nu}(x)} - \partial_\nu \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J^{a\mu}(x)} \right) \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu^b(x)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\nu^c(x)} \mathcal{Z}_{0G}[J] \\ &= -i \frac{g}{2} f_{abc} \int d^4x d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 \left\{ \partial_\mu^x D_{\nu\rho_1}^{aa_1}(x-y_1) - \partial_\nu^x D_{\mu\rho_1}^{aa_1}(x-y_1) \right\} \\ & \quad D_{\rho_2}^{ba_2\mu}(x-y_2) D_{\rho_3}^{ca_3\nu}(x-y_3) J^{a_1\rho_1}(y_1) J^{a_2\rho_2}(y_2) J^{a_3\rho_3}(y_3) \mathcal{Z}_{0G}[J] \\ & \quad + \text{Terme mit } \neq 3J's . \end{aligned} \quad (4.374)$$

Wir betrachten $W = 1/i \ln \mathcal{Z}$. Durch Differentiation von W erhalten wir die zusammenhängende 3-Punkt-Greenfunktion. Also

$$\begin{aligned} G_{3G\mu_1\mu_2\mu_3}^{\text{conn. } a_1a_2a_3} &= \frac{1}{i} \frac{1}{i^3} \frac{\delta^3}{\delta J^3} \ln \mathcal{Z} |_{J=0} \\ &= \frac{1}{i} \frac{1}{i^3} \frac{\delta^3}{\delta J^{a_1\mu_1}(x_1) \delta J^{a_2\mu_2}(x_2) \delta J^{a_3\mu_3}(x_3)} \mathcal{Z}_{\text{relevant}} |_{J=0} . \end{aligned} \quad (4.375)$$

Die Differentiation ergibt 6 Terme,

$$\begin{aligned} & G_{3G\mu_1\mu_2\mu_3}^{\text{conn. } a_1a_2a_3}(x_1, x_2, x_3) \\ &= -igf_{abc} \int d^4x \left\{ \partial_\mu^x D_{\nu\mu_1}^{aa_1}(x-x_1) - \partial_\nu^x D_{\mu\mu_1}^{aa_1}(x-x_1) \right\} D_{\mu_2}^{ba_2\mu}(x-x_2) D_{\mu_3}^{ca_3\nu}(x-x_3) \\ & \quad + \{ (123) \leftrightarrow (231) \} + \{ (123) \leftrightarrow (312) \} . \end{aligned} \quad (4.376)$$

Mit der Fouriertransformierten

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x) = \delta_{ab} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\epsilon} \underbrace{\left[-g_{\mu\nu} + (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i\epsilon} \right]}_{d_{\mu\nu}(k)} \quad (4.377)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} G_{3G\mu_1\mu_2\mu_3}^{\text{conn. } a_1a_2a_3}(x_i) &= i \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \delta^{(4)}(k_1+k_2+k_3) e^{i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)} \\ & \quad \underbrace{\frac{d_{\mu_1\nu_1}(k_1) d_{\mu_2\nu_2}(k_2) d_{\mu_3\nu_3}(k_3)}{k_1^2 k_2^2 k_3^2} gf_{a_1a_2a_3} \{ (k_1-k_2)^{\nu_3} g^{\nu_1\nu_2} }_{\tilde{G}(k_i)} \\ & \quad + (k_2-k_3)^{\nu_1} g^{\nu_2\nu_3} + (k_3-k_1)^{\nu_2} g^{\nu_1\nu_3} \} . \end{aligned} \quad (4.378)$$

Die trunkierte 3-Punkt-Funktion erhält man, indem man 3-mal den Gluonpropagator

$$i\tilde{D}_{\mu\nu}(k) = \frac{id_{\mu\nu}(k)}{k^2 + i\epsilon} \quad (4.379)$$

abspaltet. Damit erhält man

$$\tilde{G}_{3G\mu_1\mu_2\mu_3}^{trunc a_1 a_2 a_3}(k_i) = -gf_{a_1 a_2 a_3} \{ (k_1 - k_2)_{\mu_3} g_{\mu_1 \mu_2} + (k_2 - k_3)_{\mu_1} g_{\mu_2 \mu_3} + (k_3 - k_1)_{\mu_2} g_{\mu_1 \mu_3} \} \quad (4.380)$$

wobei alle Impulse einlaufend sind und am Vertex 4-er Impulserhaltung $\sum_{k_i} = 0$ gilt. Der Vertex ist bosesymmetrisch unter Vertauschung von $(\mu_i, a_i, k_i) \leftrightarrow (\mu_j, a_j, k_j)$. Analog leitet man die Feynmanregel für den 4-Gluon-Vertex ab. Zusammenfassend sind die Feynmanregeln der QCD

$u(p)$ Quark im Anfangszustand

$\bar{u}(p)$ Quark im Endzustand

$\bar{v}(p)$ Antiquark im Anfangszustand

$v(p)$ Antiquark im Endzustand

1 Geist im Anfangs- oder Antigeist im Endzustand

1 Geist im End- oder Antigeist im Anfangszustand

$\epsilon^{\mu,a}$ Gluon im Anfangszustand

$\epsilon^{*\mu,a}$ Gluon im Endzustand

(4.381)

$$\delta^{ab} [-g^{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2 + i\epsilon}] \frac{i}{p^2 + i\epsilon}$$

$$\delta^{ab} \frac{i}{(p^2 + i\epsilon)}$$

$$\delta^{lj} \frac{i}{(\not{p} - m + i\epsilon)_{sr}}$$

$$-g_s f^{abc} [(p - q)^\rho g^{\mu\nu} + (q - r)^\mu g^{\nu\rho} + (r - p)^\nu g^{\rho\mu}]$$

3-Gluon-Vertex [alle Impulse einlaufend, $p + q + r = 0$]

$$-ig_s^2 f^{xac} f^{xbd} [g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}]$$

$$-ig_s^2 f^{xad} f^{xbc} [g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}]$$

$$-ig_s^2 f^{xab} f^{xcd} [g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}]$$

4-Gluon-Vertex [alle Impulse einlaufend,

Summe aller vier Impulse = 0]

$$g_s f^{abc} q^\mu$$

Geist-Geist-Gluon-Vertex, Impulse p, k von Gluon und Geist
einlaufend, Impuls q von Geist auslaufend

$$-ig_s (t^a)_{jl} \gamma^\mu$$

(4.382)

Quark-Quark-Gluon-Vertex, Impulse p, k von Quark und
Gluon einkommend, Impuls q von Quark auslaufend
 l, j Farbindex des einlaufenden Quarks, des auslaufenden Quarks

Bemerkungen: Für jede geschlossene Fermion- und jede Geistschleife muß ein Faktor (-1) hinzugefügt werden. Bei geschlossenen Gluon-Schleifen muß ein Statistikfaktor hinzugefügt werden. Diesen erhält man, indem man alle möglichen Kontraktionen von Feldoperatoren in der Störungsentwicklung zählt. (BILD)

Kapitel 5

Renormierung

Bisher haben wir nur Diagramme auf Baumgraphenniveau (Born Approximation) betrachtet. Es stellt sich die Frage, ob die Quantisierung nicht-abelscher Eichtheorien und die Entwicklung der Feynmanregeln noch konsistent ist, wenn wir dies auf Diagramme anwenden, die geschlossene Schleifen enthalten, d.h. wenn wir die Theorie jenseits der Bornapproximation betrachten.

Es zeigt sich, daß in manchen Schleifenintegralen (BILD) ultraviolette (UV) Divergenzen auftreten. D.h., diese Diagramme haben Divergenzen für $|l| \rightarrow \infty$, *i.e.* $|l_0| \rightarrow \infty$ (Energie). Dieses Problem wird durch die Renormierung gelöst, was nichts anderes ist als eine Subtraktionsvorschrift für divergente Amplituden. Wir veranschaulichen dies mehr, indem wir das folgende Diagramm betrachten.

1 Diagramm

- (i) Die Selbstenergie führt zu einer Änderung der Masse.
- (ii) Die vorübergehende Spaltung führt zu einer Änderung der Wellenfunktions-Normierung und der Kopplung des Teilchens.

Die Masse eines Teilchens wird aber durch die Experimente festgelegt, die an einer Skala μ definiert sind [physikalische Ergebnisse sind unabhängig von der Skala $\mu \leftarrow$ Renormierungsgruppengleichungen].

Renormierung bedeutet also anzugeben, mit welcher Vorschrift die Parameter gemessen werden. Dies ist eine Konsequenz der Quantenfluktuationen.

Renormierung bedeutet anschaulich folgendes: Betrachten wir die Photon-Elektron-Positron-Wechselwirkung. In Wirklichkeit mißt man den vollen Vertex, d.h. den Baumgraphenvertex plus alle Diagramme höherer Ordnung. Eine mögliche Renormierungsvorschrift ist, daß die elektrische Ladung definiert ist als die volle Elektron-Positron-Photon-Kopplung für on-shell Teilchen (also Teilchen auf der Massenschale) im Thomson Limes. BILD

Wir bezeichnen die klassischen Parameter in der Lagrangedichte mit m_0, g_0, ϕ_0 , so daß wir $\mathcal{L}(\phi_0; m_0, g_0)$ haben. Diese werden nackte Parameter genannt.

Die renormierten Parameter ϕ_R, m_R, g_R stehen zu den nackten Parametern in Beziehung

über

$$\begin{aligned} m_0 &= m_R + \delta m \\ g_0 &= Z_g g_R = [1 + \delta Z_g] g_R \\ \phi_0 &= Z_\phi^{1/2} \phi_R = [1 + \delta Z_\phi]^{1/2} \phi_R, \end{aligned} \quad (5.1)$$

wobei Z_i dimensionslose Renormierungskonstanten sind. Die quantenmechanische Lagrangedichte kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi_0; m_0, g_0) &= \mathcal{L}(Z_\phi^{1/2} \phi_R; m_R + \delta m, Z_g g_R) \\ &= \mathcal{L}_R(\phi_R; m_R, g_R) + \mathcal{L}_{counter}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Letztere ist die sogenannte Gegenterm (counterterm) Lagrangedichte. Die Feynmandiagramme werden mit den Feynmanregeln berechnet, die sich aus der renormierten und der counterterm Lagrangedichte ergeben. Der kinetische Teil für das Feld ϕ sieht beispielsweise folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 &= \frac{1}{2} Z_\phi \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R + \frac{1}{2} (Z_\phi - 1) \partial_\mu \phi_R \partial^\mu \phi_R \equiv \mathcal{L}_R^{kin} + \mathcal{L}_{counter}^{kin}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Weitere Bemerkungen: Bevor wir ins Detail gehen, sind weitere Bemerkungen angebracht: Eine Theorie wird renormierbar genannt, wenn die auftretenden UV Divergenzen, Unendlichkeiten oder anscheinend nicht Sinn ergebenden Ergebnisse durch den Prozess der Renormierung behoben werden können. Das bedeutet, daß die Anzahl der “unabhängigen Typen” von UV Unendlichkeiten endlich sein muß. Und indem sie gleich den gemessenen Werten gesetzt werden, können die Ergebnisse aller anderen Experimente vorhergesagt werden. Der Beweis der Renormierbarkeit einer Theorie ist höchst nicht-trivial. Es waren 't Hooft und Veltman, die dieses Problem für spontan gebrochene Eichtheorien gelöst haben. Sie zeigten in den frühen 70ern, wie die GSW Theorie renormiert werden kann (oder wie die Unendlichkeiten entfernt werden können) und wie diese Theorie zu benutzen ist, um genaue Rechnungen zu den Teilcheneigenschaften auszuführen. Sie erhielten 1999 den Nobelpreis “for elucidating the quantum structure of electroweak interactions in physics”.

GSW Parameter: Es gibt mehrere Schemata, die benutzt werden, um die GSW Parameter auszudrücken. Im

(i) On-shell Schema sind die gemessenen Parameter $\alpha, M_W, M_Z, m_f, m_H$. Alle anderen Parameter werden von diesen abgeleitet.

(ii) G_F Schema: Die input Parameter sind $\alpha, G_F, M_Z, m_f, m_H$.

MS Schema: Ein weiteres Renormierungsschema, das oft in den Rechnungen verwendet wird.

Regularisierung: Wie schon oben erwähnt, wenn Rechnungen jenseits der führenden Ordnung (jenseits der Bornapproximation) durchgeführt werden, können Divergenzen auftreten, die durch die Renormierung behoben werden müssen, d.h. indem die Parameter der Theorie geeignet definiert werden. Bevor dies getan werden kann, müssen die auftretenden Divergenzen isoliert werden. Regularisierung bedeutet nichts anderes als eine Vorschrift anzugeben,

wie die Divergenzen eindeutig isoliert werden. Folgendes Diagramm führt beispielsweise zu einer logarithmischen Divergenz.

Denn

$$\frac{1}{i}\Pi(p) = (-i\lambda)^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i^2}{[(p+l)^2 - m^2 + i\epsilon][l^2 - m^2 + i\epsilon]} . \quad (5.4)$$

Wir führen die analytische Fortsetzung in den Euklidischen Raum durch,

$$\begin{aligned} l_0 &= il_4 \Rightarrow l^2 = l_0^2 - \vec{l}^2 = -l_E^2 \\ \int d^4 l &= i \int d^4 l_E = i \int_0^\infty |l_E|^3 d|l_E| d\Omega_4 , \end{aligned} \quad (5.5)$$

wobei $d\Omega_4$ das 4-dimensionale Raumwinkelelement bezeichnet. Und

$$|l_E| = \sqrt{l_4^2 + \vec{l}^2} . \quad (5.6)$$

Damit ist das

$$\text{Integral} \sim \int_0^\infty \frac{|l_E|^3 d|l_E|}{|l_E|^4} \sim \int_0^\infty \frac{d|l_E|}{|l_E|} . \quad (5.7)$$

Dies ist logarithmisch divergent. Die Divergenz tritt für große $|l_E|$ auf $\leadsto$ UV-Divergenz.

Impuls cut-off Λ (für Eichtheorien nicht geeignet):

$$\int_0^\infty \rightarrow \int_0^\Lambda \frac{d|l_E|}{|l_E|} \sim \ln \Lambda . \quad (5.8)$$

Physikalische Meßgrößen dürfen natürlich nicht vom cut-off abhängen. Das naive Einführen bricht die Eichinvarianz. Besser:

Dimensionale Regularisierung: In der dimensional Regularisierung werden die Divergenzen isoliert, indem die Theorie in $D = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen $\neq 4$ Dimensionen definiert wird. Die Divergenzen treten dann als Pole in ϵ auf: $\sim 1/\epsilon^{(n)}, \epsilon \rightarrow 0$.

Regeln: Die Regeln für die Durchführung einer Rechnung in $D \neq 4$ Dimensionen sind:

- Das Integral über den Schleifenimpuls q wird in der folgenden Weise ersetzt

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \rightarrow \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \quad (5.9)$$

μ hat die Dimension einer Masse. Die Einführung der Masse μ in D Dimensionen hält die Dimension des Integrals auf derselben wie in $D = 4$ Dimensionen.

Damit im obigen Beispiel

$$\int d^4 l_E \rightarrow \int d^D l_E = \int |l_E|^{D-1} d|l_E| \int d\Omega_D . \quad (5.10)$$

Damit ist für $D < 4$

$$\int d|l_E| \frac{|l_E|^{D-1}}{|l_E|^4} \quad \text{UV-konvergent .} \quad (5.11)$$

Bemerkung: Mathematisch ist der Ursprung der UV-Divergenz das Produkt von Distributionen mit gleichem Argument. BILD

Man muß eine Vorschrift definieren

$$[\Delta_F(x-y)]^2 \rightarrow (\Delta_F(x-y))^2 - B(x-y) . \quad (5.12)$$

- Die Kopplungskonstante g^2 wird ersetzt durch

$$g^2 \rightarrow g^2 \mu^{4-D} \quad (5.13)$$

Dies wird wiederum getan, um die Dimension der Greens Funktionen unverändert zu halten.

- Für die Metrik haben wir

$$g_{\mu\nu} \quad \text{ist } D\text{-dimensional, d.h. } g_{\mu\mu} = D . \quad (5.14)$$

- Die Dirac-Matrizen werden so verallgemeinert, daß

$$\begin{aligned} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= 2g_{\mu\nu} \mathbf{1} & \gamma_\mu \gamma_\mu &= D \mathbf{1} \\ \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\rho &= 2g_{\mu\rho} \gamma_\rho - \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\rho = (2-D) \gamma_\mu & \text{etc.} \\ \gamma_5 &\text{ ist nicht-trivial in } D \text{ Dimensionen.} \end{aligned} \quad (5.15)$$

1-Punkt Funktion:

Zur Veranschaulichung berechnen wir die 1-Punkt Funktion (d.h. ein Integral, das nur ein Propagatorintegral über den Schleifenimpuls enthält) in D Dimensionen. Wir haben also

$$\frac{i}{16\pi^2} A = \mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (5.16)$$

Wir berechnen das Integral in Euklidischen Raumzeit-Dimensionen und führen dazu eine Wick-Rotation durch:

$$q^0 = iq_E^0 \quad \vec{q} = \vec{q}_E \quad d^D q = id^D q_E . \quad (5.17)$$

Das Integral wird

$$\frac{iA}{16\pi^2} = -i \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_E}{q_E^2 + m^2} . \quad (5.18)$$

Erklärung: Wir haben Pole in der q_0 Ebene:

$$\begin{aligned} 0 &= q^2 - m^2 + i\epsilon = q_0^2 - \vec{q}^2 - m^2 + i\epsilon \\ q_0 &= \pm \sqrt{\vec{q}^2 + m^2 - i\epsilon} = \pm \sqrt{\vec{q}^2 + m^2} \mp i\epsilon' . \end{aligned} \quad (5.19)$$

Wir betrachten das Integral über die Kurve $\mathcal{C}$

$$\oint_{\mathcal{C}} dq_0 (q^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1} = 0 \quad (5.20)$$

Die Beiträge über die Kreissegmente verschwinden, so daß wir haben

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq_0 \dots = \int_{-i\infty}^{i\infty} dq_0 \dots . \quad (5.21)$$

Und damit in Euklidischen Koordinaten ($q^0 = iq_E^0, q^k = q_E^k$),

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} dq_0 \dots = i \int_{-\infty}^{\infty} dq_E^0 \dots . \quad (5.22)$$

Für die weitere Berechnung des Integrals führen wir eine Transformation auf Kugelkoordinaten durch

$$\int d^D q_E = \int_{\Omega_D} d\Omega_D \int_0^\infty dq_E q_E^{D-1} = \int_{\Omega_D} d\Omega_D \int_0^\infty dq_E^2 \frac{1}{2} (q_E^2)^{D/2-1} , \quad (5.23)$$

wobei

$$\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \quad (5.24)$$

der D -dimensionale Raumwinkel ist. Und damit erhalten wir für das Integral

$$\begin{aligned} \frac{i}{16\pi^2} A_{n-1} &= i \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{1}{2} \int d\Omega_D \int_0^\infty d\rho \rho^{\frac{D}{2}-1} \frac{(-1)^n}{(\rho + L - i\epsilon)^n} \\ &= i(-1)^n \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \frac{1}{2} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \int_0^\infty d\rho \rho^{\frac{D}{2}-1} \frac{1}{(\rho + L - i\epsilon)^n} \\ &\stackrel{\rho=L y}{=} i(-1)^n \frac{\mu^{4-D}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{\Gamma(D/2)} (L - i\epsilon)^{D/2-n} \underbrace{\int_0^\infty dy y^{D/2-1} (1+y)^{-n}}_{=B(\frac{D}{2}, n-\frac{D}{2})} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Der Faktor $(-1)^n$ stammt aus $(q^2 - m^2 + i\epsilon)^{-n} = (-1)^n(q_E^2 + m^2 - i\epsilon)^{-n}$. Mit der Beta Funktion

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (5.26)$$

erhalten wir schließlich

$$\frac{i}{16\pi^2} A_{n-1} = i(-1)^n \frac{\mu^{4-D}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} (L - i\epsilon)^{D/2-n} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)}. \quad (5.27)$$

Die $\Gamma(x)$ -Funktion hat Pole in $x = 0, -1, -2, \dots$. Eine Entwicklung für kleine ϵ ergibt

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \quad \text{mit dem Euler } \gamma, \quad \gamma = 0.577\dots \quad (5.28)$$

Außerdem verwenden wir die Entwicklung

$$a^\epsilon = e^{\epsilon \ln a} = 1 + \epsilon \ln a + \dots \quad (5.29)$$

Wir bekommen für $A^{n=1}$ mit $4 - D = 2\epsilon$ und $L \equiv m^2$

$$A = -\frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^{-\epsilon}} \frac{\Gamma(-1 + \epsilon)}{\Gamma(1)} (m^2)^{1-\epsilon}. \quad (5.30)$$

Mit $\Gamma(1) = 1$ und

$$\Gamma(1+x) = x\Gamma(x) \quad (5.31)$$

und der obigen Entwicklung bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{A(m^2)}{m^2} &= -(1 + \epsilon \ln(4\pi) + \dots)(1 - \epsilon \ln(\frac{m^2}{\mu^2}) + \dots)(-1)(1 + \epsilon)(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \dots) \\ \frac{A(m^2)}{m^2} &= \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1 + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Damit finden wir

$$\begin{aligned} \frac{A(m^2)}{m^2} &= \Delta - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1 \\ \Delta &= \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \end{aligned} \quad (5.33)$$

Massen-Renormierung: Wir schauen nun als Beispiel die Massenrenormierung für ein skalares Teilchen an. Der volle Propagator ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 - m^2} &\rightarrow \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{1}{k^2 - m^2} [\delta m^2 + \Sigma] \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{1}{k^2 - m^2} \{ [\delta m^2 + \Sigma] \frac{1}{k^2 - m^2} \}^2 + \dots \\ &= \frac{1}{k^2 - m^2} \{ 1 + [\frac{\delta m^2 + \Sigma}{k^2 - m^2}] + [\dots]^2 + \dots \} \\ &= \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{1 - \frac{\delta m^2 + \Sigma}{k^2 - m^2}} = \frac{1}{k^2 - m^2 - [\delta m^2 + \Sigma]} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Wir haben hier die Formel für die geometrische Reihe verwendet.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} . \quad (5.35)$$

Mit der on-shell Renormierungsbedingung

$$\text{Propagator} \rightarrow \frac{1}{k^2 - m^2} \quad \text{for } k^2 \rightarrow m^2 \quad (5.36)$$

bekommen wir (hier ist m die physikalische Masse!)

$$\delta m^2 + \Sigma(k^2 = m^2) = 0 . \quad (5.37)$$

5.1 Klassifizierung lokaler Wechselwirkungen

(Inhalte: oberflächlicher Divergenzgrad; superrenormierbare, renormierbare und nicht renormierbare Wechselwirkungen)

Für nichtabelsche Eichtheorien ist die einzige Regularisierung von praktischer Relevanz die dimensionelle Regularisierung:

$$D = 4 \rightarrow D \neq 4 (< 4) \quad \text{mit } D - 1 \text{ Raumdimensionen und 1 Zeitdimension} . \quad (5.38)$$

Naive Dimensionsanalyse: $\hbar = c = 1$. Damit

$$S = \int d^D x \mathcal{L}(x) \Rightarrow [S] = [\hbar] = \text{dimensionslos} . \quad (5.39)$$

Sei M eine beliebige Massenskala. Dann haben wir ($\hbar \sim xp$)

$$[x_\mu] = M^{-1} \quad [\partial_\mu] = M . \quad (5.40)$$

Die Massendimension der Felder ist

(a) Skalare Felder

$$[\phi, \dot{\phi}]_{t=t'} = i \underbrace{\delta^{(D-1)}(\vec{x} - \vec{x}')}_{[.] = M^{D-1}} \quad (5.41)$$

und also

$$[\phi] = M^{\frac{D-2}{2}} . \quad (5.42)$$

Analog

$$[A_\mu] = M^{\frac{D-2}{2}} . \quad (5.43)$$

(b) Spinorfelder

$$\{\psi_l, \psi_s^\dagger\}_{t=t'} = \delta_{ls} \delta^{(D-1)}(\vec{x} - \vec{x}') . \quad (5.44)$$

Damit

$$[\psi] = M^{\frac{D-1}{2}} . \quad (5.45)$$

(c) Geistfelder

$$\mathcal{L}_0^{Geist} = \partial_\mu \bar{c} \partial^\mu c \quad (5.46)$$

$$M^D \quad M^2[c]^2 . \quad (5.47)$$

Damit

$$[c] = M^{\frac{D-2}{2}} \quad (5.48)$$

Nun zur Kopplungskonstante. Wir betrachten z.B. die QED. Der Kopplungsterm ist

$$-e \bar{q} \gamma^\mu A_\mu q . \quad (5.49)$$

Damit ist

$$[e_{QED}] = [g_{QCD}] = M^{\frac{4-D}{2}} . \quad (5.50)$$

D.h. in 4 Dimensionen ist die Kopplung dimensionslos. In $D < 4$ hat die Kopplung eine positive Massendimension. Ferner ist der Eichparameter dimensionslos,

$$[\xi] = M^0 . \quad (5.51)$$

Die γ -Algebra in D Dimensionen hatten wir bereits oben betrachtet. Bemerkung: γ^5 in D Dimensionen ist problematisch, da der Levi-Civita-Tensor nur in $D = 4$ Dimensionen definiert ist.

Divergenzgrad eines Diagramms Betrachte folgendes Diagramms (BILD)

Das Feynman-Integral I_G ist für große Schleifenimpulse l

$$I_G \sim \int d^D l_1 d^D l_2 \frac{1}{(l_1^2)^3} \frac{1}{l_2} \frac{1}{l_2} l_1 l_1 . \quad (5.52)$$

Der “oberflächliche Divergenzgrad” ist damit

$$d = 2D + 2 - 6 - 2 = 2D - 6 . \quad (5.53)$$

Allgemein ist der oberflächliche Divergenzgrad eines 1-Teilchen irreduziblen Diagramms G

$$d_G = D l + \sum_v \delta_v - 2n_B - n_F , \quad (5.54)$$

wobei l die Anzahl der Schleifen, δ_v die Anzahl der Impulsfaktoren am Vertex, n_B die Anzahl der inneren Bosonlinien und n_F die Anzahl der inneren Fermionlinien bezeichnet. Obiges gilt allerdings nicht für massive Vektor-Bosonen. Diese haben den Feynmanpropagator

$$D^{\mu\nu} = \frac{i}{k^2 - m_V^2} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_V^2} \right) . \quad (5.55)$$

Das Konvergenztheorem (von Weinberg) lautet:

I_G ist absolut konvergent, falls der Divergenzgrad $d_H < 0$ für alle Subdiagramme $H \subset G$.

Wir betrachten nun die Klassifizierung von renormierbaren Wechselwirkungen. Sei

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad (5.56)$$

mit

$$b = \text{Anzahl der Bosefelder in } \mathcal{L}_I \quad (5.57)$$

$$f = \text{Anzahl der Fermifelder in } \mathcal{L}_I \quad (5.58)$$

$$\delta = \text{Anzahl der Ableitungen in } \mathcal{L}_I. \quad (5.59)$$

Wir betrachten das Feynmandiagramm (mit Namen) G . Sei

$$n = \text{Anzahl der Vertizes (generiert durch ein spezielles } \mathcal{L}_I) \quad (5.60)$$

$$N_B = \text{Anzahl der externen Boselinien} \quad (5.61)$$

$$N_F = \text{Anzahl der externen Fermilinen} \quad (5.62)$$

$$l = \text{Anzahl der Schleifen (nach der Verwendung der Energie-Impulserhaltung an jedem Vertex)}. \quad (5.64)$$

Letztere l ist gegeben durch

$$l = n_B + n_F - n + 1. \quad (5.65)$$

Denn jeder Vertex erzeugt eine δ -Funktion für die Energie-Impulserhaltung und sorgt so für eine Reduktion in l um $n - 1$ Impulsintegrale. Ferner haben wir

$$n\delta = \sum_v \delta_v \quad (5.66)$$

und

$$nb = 2n_B + N_B. \quad (5.67)$$

Denn z.B. (BILD)

$$2 \cdot 3 = 2 \cdot 1 + 4. \quad (5.68)$$

Der erste Term auf der rechten Seite kommt dadurch zustande, daß eine innere Linie an 2 Vertizes beteiligt ist. Ferner haben wir

$$nf = 2n_F + N_F. \quad (5.69)$$

Einsetzen der Gleichungen (5.67), (5.69) in (5.65) liefert

$$l = \frac{b+f}{2}n - n - \frac{N_B + N_F}{2} + 1. \quad (5.70)$$

Einsetzen von (5.66), (5.70) in (5.54) liefert

$$d_G = rn - \frac{D-2}{2}N_B - \frac{D-1}{2}N_F + D. \quad (5.71)$$

Man nennt r den Divergenzgrad von $\mathcal{L}_I$. Er ist gegeben durch

$$r = \frac{D-2}{2}b + \frac{D-1}{2}f + \delta - D. \quad (5.72)$$

Der Divergenzgrad charakterisiert $\mathcal{L}_I$. Es gilt für die Dimension der Kopplung g_I ,

$$[g_I] = -r. \quad (5.73)$$

Denn sei schematisch

$$\mathcal{L}_I \sim g_I(\partial)^\delta(\phi)^b(\psi)^f. \quad (5.74)$$

Dann ist die Dimension von $\mathcal{L}_I$

$$D = [\mathcal{L}_I] = [g_I] + \delta + b\frac{D-2}{2} + f\frac{D-1}{2}. \quad (5.75)$$

Mit der Verallgemeinerung auf mehrere Vertizes haben wir für

$$\mathcal{L}_I = \sum_{i=1}^k \mathcal{L}_I^{(i)} \quad (5.76)$$

somit

$$d_G = \sum_{i=1}^k r_i n_i - \frac{D-2}{2}N_B - \frac{D-1}{2}N_F + D, \quad (5.77)$$

mit den Divergenzindizes

$$r_i = \frac{D-2}{2}b_i + \frac{D-1}{2}f_i + \delta_i - D. \quad (5.78)$$

Das Integral I_G ist UV-divergent, falls $d_H > 0$ für mindestens ein Subdiagramm $H \subset G$.

Klassifizierung

1) Falls $r_i > 0$ ($i = 1, \dots, k$) für irgendein i , dann wächst mit genügend großem n_i der Divergenzgrad d_G über alle Schranken, so daß die Theorie “nicht renormierbar” ist.

2) $r_i = 0$ für alle i . Dann gibt es eine endliche Anzahl von Feynman-Diagrammtypen (d.h. n -Punkt-Funktionen), die $d_G \geq 0$ haben. Damit ist nur eine endliche Anzahl von countertermen notwendig, so daß die Theorie “renormierbar” ist.

3) $r_i < 0$ für alle i . Dann ist die Theorie “superrenormierbar”.

Wir betrachten Beispiele.

$$\text{A) } \mathcal{L}_I = \lambda \phi^3. \quad (5.79)$$

In D Dimensionen ist

$$[\lambda] = -r = D - 3\frac{D-2}{2} = -\frac{D-6}{2}. \quad (5.80)$$

Die Theorie ist

renormierbar	für	$D = 6$
nicht renormierbar	für	$D > 6$
superrenormierbar	für	$D < 6$.

$$\text{B) } \mathcal{L}_I = h(\bar{\psi}\psi)^2 \quad \text{4-Fermi-Wechselwirkung .} \quad (5.81)$$

Damit ist

$$[h] = -r = D - 4 \frac{D-1}{2} = 2 - D . \quad (5.82)$$

Die Theorie ist also in $D = 2$ Dimensionen renormierbar (Thirring-Modell) und nicht renormierbar für $D > 2$ (insbesondere für $D = 4$).

Wir haben folgende Merkregel

Koppl.konstanten haben	pos.	Massendim.	$\leftrightarrow$	Theorie	superrenormierbar
Koppl.konstanten haben	0	Massendim.	$\leftrightarrow$	Theorie	renormierbar
Koppl.konstanten haben	neg.	Massendim.	$\leftrightarrow$	Theorie	nicht renormierbar

Diese Regel gilt nicht für massive Vektorfelder. Deren Feynmanpropagator (s.o.) geht gegen $\mathcal{O}(1)$ im limes $k \rightarrow \infty$. Wir betrachten als weiteres Beispiel die QCD. Die Wechselwirkungs-lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I , \quad (5.83)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & \quad g f_{abc} \partial_\mu \bar{c}^a G^{\mu b} c^c - g \bar{q} T^a \gamma^\mu q G_\mu^a \\ & + \frac{g}{2} f_{abc} (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) G^{b\mu} G^{c\nu} \\ & - \frac{g^2}{4} f_{abe} f_{cde} G_\mu^a G_\nu^b G^{c\mu} G^{d\nu} . \end{aligned} \quad (5.84)$$

Wir bestimmen die Divergenzindizes

$$r_i = \frac{D-2}{2} b_i + \frac{D-1}{2} f_i + \delta_i - D \quad (5.85)$$

der 4 Wechselwirkungsterme:

$$r_{Geist} = 3 \frac{D-2}{2} + 1 - D = \frac{D-4}{2} \quad (5.86)$$

$$r_{Quark} = \frac{D-2}{2} + \frac{D-1}{2} 2 - D = \frac{D-4}{2} \quad (5.87)$$

$$r_{3G} = 3 \frac{D-2}{2} + 1 - D = \frac{D-4}{2} \quad (5.88)$$

$$r_{4G} = 4 \frac{D-2}{2} - D = D - 4 . \quad (5.89)$$

Die Kopplungskonstante hat die Dimension

$$[g] = \frac{4-D}{2} \quad (5.90)$$

und ist dimensionslos in $D = 4$ Dimensionen. Für $D = 4$ ist $r_i = 0$. Damit ist die QCD gemäß Potenzabzählen renormierbar. (Wenn man die Gegenterme dazuaddiert ändert sich strukturell an $\mathcal{L}$ nichts.)

Bemerkung: Bei Geistern muß folgende Ersetzung gemacht werden

$$N_B \rightarrow N_{Gluon} + \frac{3}{2}N_{Geist} . \quad (5.91)$$

5.2 Renormierung der GSW Theorie

5.2.1 Renormierungskonstanten

Für die Renormierung der GSW Theorie haben wir folgende Renormierungskonstanten (zur Vereinfachung nehmen wir hier die CKM-Matrix als Einheitsmatrix an):

$$\begin{aligned} e_0 &= Z_e e = (1 + \delta Z_e) e & W_0^\pm &= \sqrt{Z_W} W^\pm = (1 + \tfrac{1}{2}\delta Z_W) W^\pm \\ M_{W0}^2 &= M_W^2 + \delta M_W^2 & H_0 &= \sqrt{Z_H} H = (1 + \tfrac{1}{2}\delta Z_H) H \\ M_{Z0}^2 &= M_Z^2 + \delta M_Z^2 & f_{L/R0} &= \sqrt{Z_{L/R}} f_{L/R} = (1 + \tfrac{1}{2}\delta Z_{L/R}) f_{L/R} \\ M_{H0}^2 &= M_H^2 + \delta M_H^2 & \begin{pmatrix} Z_0 \\ A_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{ZZ}} & \sqrt{Z_{ZA}} \\ \sqrt{Z_{AZ}} & \sqrt{Z_{AA}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} \\ m_{f0} &= m_f + \delta m_f \end{aligned}$$

Man sieht sogleich, daß aufgrund der höheren Ordnungen Mischungen zwischen Photon und dem Z -Boson auftreten. Durch geeignete Renormierungsbedingungen werden wir diese auf 0 festlegen.

5.2.2 Renormierungsbedingungen

Die Koeffizienten der Gegenterme (counterterme) sind vollständig durch die Renormierungsbedingungen bestimmt. Wir betrachten zunächst das Higgspotential, das durch

$$V = \frac{\lambda}{2} [|\phi|^2 - \frac{\mu^2}{\lambda}]^2 \quad (5.92)$$

gegeben ist. Mit dem Higgs-Dublett

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H + i\chi) \end{pmatrix} = \phi_0 + \hat{\phi} \quad (5.93)$$

haben wir

$$V = \frac{\lambda}{8} (v^2 - 2\frac{\mu^2}{\lambda})^2 + TH + \mathcal{O}(\hat{\phi}^2) \quad (5.94)$$

mit

$$T = \frac{\lambda}{2} v (v^2 - 2\frac{\mu^2}{\lambda}) \quad (5.95)$$

Aus der Minimierung des Higgspotentials bekommen wir die Bedingung $v^2 = 2\frac{\mu^2}{\lambda}$ und damit $T \stackrel{!}{=} 0$.

$$T = 0. \quad (5.96)$$

Bei Einschluß der Quantenfluktuationen haben wir für $\hat{T}$ die Tadpole + counterterm

$$\hat{T} = \quad (5.97)$$

Wir fordern dann, daß die renormierten Tadpole $\hat{T} = T - \delta T$ gleich $\equiv 0$ sind, und erhalten also die Bedingung $\delta T = T$. Die Tadpole-Diagramme werden durch die Renormierung des Higgspotentials vollständig subtrahiert und tragen also nicht zu den physikalischen Observablen bei.

Definitionen: Wir definieren die Selbstenergien Σ und den Photon-Fermion-Fermion Vertex Γ wie folgt

$$\begin{aligned} &= \Sigma_{\mu\nu}^{VV'}(k) \quad \text{for } V = W^\pm, Z, A \\ &= \Sigma_H(k^2) \\ &= \Sigma_f(\not{p}) \\ &= \Gamma_\mu^{ff\gamma}(q, p, p') \end{aligned} \quad (5.98)$$

Die Vektorboson-Selbstenergien können in einen transversalen und einen longitudinalen Beitrag zerlegt werden,

$$\Sigma_{\mu\nu}^{VV'}(k) = -i \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \underbrace{\Sigma_T^{VV'}(k^2)}_{\uparrow \text{transversal}} - i \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \underbrace{\Sigma_L^{VV'}(k^2)}_{\uparrow \text{longitudinal}}. \quad (5.99)$$

Die fermionische Selbstenergie kann in einen links-chiralen, einen rechts-chiralen und einen skalaren Anteil zerlegt werden,

$$\Sigma_f(\not{p}) = i \left(\not{p} \left[\omega_- \underbrace{\Sigma_{f,L}(p^2)}_{\uparrow \text{left-chiral}} + \omega_+ \underbrace{\Sigma_{f,R}(p^2)}_{\uparrow \text{right-chiral}} \right] + m_f \underbrace{\Sigma_{f,S}(p^2)}_{\uparrow \text{scalar}} \right) \quad (5.100)$$

mit

$$\omega_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}. \quad (5.101)$$

Renormierungsbedingungen: ($k\epsilon(k) = 0$) Mit der Forderung, daß die renormierten Massenparameter der physikalischen Teilchen gleich den physikalischen Massen sind, d.h. gleich den reellen Anteilen der Pole der entsprechenden Propagatoren, die äquivalent zu den Nullstellen der 1-Teilchen irreduziblen 2-Punktfunktionen sind, haben wir die folgenden Renormierungsbedingungen für die Massen,

$$\begin{aligned} \text{Re } \hat{\Sigma}_{\mu\nu}^{VV}(k) \epsilon^\nu(k)|_{k^2=M_V^2} &= 0 \quad \text{for } V = W, Z, [A] \\ \text{Re } \hat{\Sigma}_H(k^2 = M_H^2) &= 0 \\ \text{Re } \hat{\Sigma}_f(\not{p})u(p)|_{\not{p}=m_f} &= \text{Re } \bar{u}(p)\hat{\Sigma}_f(\not{p})|_{\not{p}=m_f} = 0. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Im Fall von Massenmatrizen fordern wir, daß die nicht-diagonalen Selbstenergien null sind, wenn die externen Linien auf ihrer Massenschale sind. Für die diagonalen Einträge fordern wir, daß die Residuen der renormierten Propagatoren gleich 1 sind. Wir bekommen die Renormierungsbedingungen für die Wellenfunktionen

$$\begin{aligned}
\text{Re } \frac{\partial \hat{\Sigma}_{\mu\nu}^{VV}(k)}{\partial k^2} \epsilon^\nu(k)|_{k^2=M_V^2} &= 0 \quad \text{for } V = W, Z, A \\
\text{Re } \frac{\partial \hat{\Sigma}_H(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=M_H^2} &= 0 \\
\text{Re } \frac{\partial \hat{\Sigma}_f(\not{p})}{\partial \not{p}} u(p)|_{\not{p}=m_f} &= \text{Re } \bar{u}(p) \frac{\partial \hat{\Sigma}_f(\not{p})}{\partial \not{p}}|_{\not{p}=m_f} = 0 \\
\hat{\Sigma}_{\mu\nu}^{AZ}(k) \epsilon^\nu(k)|_{k^2=0} &= \text{Re } \hat{\Sigma}_{\mu\nu}^{AZ} \epsilon^\nu(k)|_{k^2=M_Z^2} = 0 .
\end{aligned} \tag{5.103}$$

Und für die Ladung haben wir die Renormierungsbedingung (e ist die physikalische Ladung, die im klassischer Thomson-Streuung gemessen wird: $E_\gamma \rightarrow 0$)

$$\bar{u}(p') \hat{\Gamma}_\mu^{ff\gamma}(q, p, p') u(p)|_{p^2=p'^2=m_f^2, q^2=0} = -ie e_f \bar{u}(p) \gamma_\mu u(p) . \tag{5.104}$$

$\hat{\Gamma}^{ff\gamma}$ bezeichnet den renormierten Photon-Fermion-Fermion Vertex.

Nach Einsetzen der expliziten Zerlegungen der Selbstenergien erhalten wir die allgemeinen Ausdrücke für die entsprechenden Renormierungsbedingungen:

$$\begin{aligned}
\text{Re } \hat{\Sigma}_T^{WW}(M_W^2) &= 0 \\
\text{Re } \hat{\Sigma}_T^{ZZ}(M_Z^2) &= 0 & \text{Re } \hat{\Sigma}_T^{AZ}(M_Z^2) &= 0 \\
\hat{\Sigma}_T^{AZ}(0) &= 0 & \hat{\Sigma}_T^{AA}(0) &= 0 \\
\text{Re } \frac{\partial \hat{\Sigma}_T^{WW}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=M_W^2} &= 0 \\
\text{Re } \frac{\partial \hat{\Sigma}_T^{ZZ}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=M_Z^2} &= 0 & \text{Re } \frac{\partial \hat{\Sigma}_T^{AA}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=0} &= 0 \\
\text{Re } \hat{\Sigma}_H(M_H^2) &= 0 & \text{Re } \frac{\partial \hat{\Sigma}_H(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=M_H^2} &= 0 \\
m_f \text{Re } [\hat{\Sigma}_{f,L/R}(m_f^2) + \hat{\Sigma}_{f,S}(m_f^2)] &= 0 \\
\text{Re } \{ [\hat{\Sigma}_{f,L}(m_f^2) + \hat{\Sigma}_{f,R}(m_f^2) + 2m_f^2 \frac{\partial}{\partial p^2} [\hat{\Sigma}_{f,L}(p^2) + \hat{\Sigma}_{f,R}(p^2) + 2\hat{\Sigma}_{f,S}(p^2)]|_{p^2=m_f^2} \} &= 0 .
\end{aligned} \tag{5.105}$$

Mit den entsprechenden Gegentermen haben wir die expliziten Ausdrücke für die Renormierungskonstanten

$$\begin{aligned}
\delta T &= T \\
\delta M_W^2 &= \text{Re } \Sigma_T^{WW}(M_W^2) & \delta Z_W &= -\text{Re } \frac{\partial \Sigma_T^{WW}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=M_W^2} \\
\delta M_Z^2 &= \text{Re } \Sigma_T^{ZZ}(M_Z^2) & \delta Z_{ZZ} &= -\text{Re } \frac{\partial \Sigma_T^{ZZ}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=M_Z^2} \\
\delta Z_{AZ} &= -2\text{Re } \frac{\Sigma_T^{AZ}(M_Z^2)}{M_Z^2} & \delta Z_{ZA} &= 2 \frac{\Sigma_T^{AZ}(0)}{M_Z^2} \\
\delta Z_{AA} &= -\frac{\partial \Sigma_T^{AA}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta M_H^2 &= \text{Re} \Sigma_H(M_H^2) & \delta Z_H &= -\text{Re} \frac{\partial \Sigma_H(k^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=M_H^2} \\
\delta m_f &= m_f \text{Re} \left[\frac{\Sigma_{f,L}(m_f^2) + \Sigma_{f,R}(m_f^2)}{2} + \Sigma_{f,S}(m_f^2) \right] \\
\delta Z_{f,L} &= -\text{Re} \Sigma_{f,L}(m_f^2) - m_f^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \text{Re} [\Sigma_{f,L}(p^2) + \Sigma_{f,R}(p^2) + 2\Sigma_{f,S}(p^2)] \Big|_{p^2=m_f^2} \\
\delta Z_{f,R} &= -\text{Re} \Sigma_{f,R}(m_f^2) - m_f^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \text{Re} [\Sigma_{f,L}(p^2) + \Sigma_{f,R}(p^2) + 2\Sigma_{f,S}(p^2)] \Big|_{p^2=m_f^2} .
\end{aligned} \quad (5.106)$$

Der volle elektromagnetische Vertex ist

Indem man die Diracgleichung und die Wardidentität ausnützt (die aus der Eichinvarianz folgt), erhält man den Gegenterm für die Ladungsrenormierung

$$\delta Z_e = -\frac{1}{2} \delta Z_{AA} - \frac{s_W}{2c_W} \delta Z_{ZA} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma_T^{AA}(k^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=0} - \frac{s_W}{c_W} \frac{\Sigma_T^{AZ}(0)}{M_Z^2} . \quad (5.107)$$

Er ist unabhängig vom Fermion f . Wir haben also Ladungsuniversalität.

Im on-shell Schema ist der Weinbergwinkel kein freier Parameter. Eine mögliche Definition ist [A. Sirlin, Physical Review D 22 ('80) 971]

$$\sin^2 \theta_W = s_W^2 = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2} \quad c_W^2 = \frac{M_W^2}{M_Z^2} . \quad (5.108)$$

Daraus folgt direkt die Renormierungskonstante für den Weinbergwinkel

$$\begin{aligned}
s_{W0} &= s_W + \delta s_W & c_{W0} &= c_W + \delta c_W \\
\frac{\delta c_W}{c_W} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\delta M_W^2}{M_W^2} - \frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} \right) = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\frac{\Sigma_T^W(M_W^2)}{M_W^2} - \frac{\Sigma_{ZZT}(M_Z^2)}{M_Z^2} \right] \\
\frac{\delta s_W}{s_W} &= -\frac{c_W^2}{s_W^2} \frac{\delta c_W}{c_W} .
\end{aligned} \quad (5.109)$$

5.3 1-Schleifen Integrale

Ein-Schleifen Integrale können im allgemeinen auf die folgenden skalaren Integrale reduziert werden:

- 1-Punkt Funktion:

$$A_0(m) = \frac{16\pi^2 \mu^{4-D}}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2} \quad (5.110)$$

- 2-Punkt Funktion:

$$B_0(p; m_0, m_1) = \frac{16\pi^2 \mu^{4-D}}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_0^2)[(k+p)^2 - m_1^2]} \quad (5.111)$$

- 3-Punkt Funktion:

$$C_0(p_1, p_2; m_0, m_1, m_2) = \frac{16\pi^2 \mu^{4-D}}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_0^2)[(k+p_1)^2 - m_1^2][(k+p_2)^2 - m_2^2]} \quad (5.112)$$

- 4-Punkt Funktion:

$$D_0(p_1, p_2, p_3; m_0, m_1, m_2, m_3) = \frac{16\pi^2 \mu^{4-D}}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_0^2)[(k+p_1)^2 - m_1^2][(k+p_2)^2 - m_2^2][(k+p_3)^2 - m_3^2]} \quad (5.113)$$

Alle Tensorintegrale können in Tensoren zerlegt werden, die aus den externen 4er-Impulsen bestehen. Die entsprechenden Koeffizienten können durch die obigen skalaren Integrale ausgedrückt werden und sind symmetrisch. [Passarino+Veltman, Nuclear Physics B 160 ('79), 151]

$$\begin{aligned} B_\mu(p; m_0, m_1) &= \frac{16\pi^2 \mu^{4-D}}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu}{(k^2 - m_0^2)[(k+p)^2 - m_1^2]} = B_1 p_\mu \\ B_{\mu\nu}(p; m_0, m_1) &= \frac{16\pi^2 \mu^{4-D}}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m_0^2)[(k+p)^2 - m_1^2]} = B_{00} g_{\mu\nu} + B_{11} p_\mu p_\nu \\ C_\mu(p_1, p_2; m_0, m_1, m_2) &= \frac{16\pi^2 \mu^{4-D}}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu}{(k^2 - m_0^2)[(k+p_1)^2 - m_1^2][(k+p_2)^2 - m_2^2]} \\ &= C_1 p_{1\mu} + C_2 p_{2,\mu} \\ C_{\mu\nu}(p_1, p_2; m_0, m_1, m_2) &= \frac{16\pi^2 \mu^{4-D}}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - m_0^2)[(k+p_1)^2 - m_1^2][(k+p_2)^2 - m_2^2]} \\ &= C_{00} g_{\mu\nu} + C_{11} p_{1,\mu} p_{1,\nu} + C_{22} p_{2,\mu} p_{2,\nu} + C_{12} (p_{1,\mu} p_{2,\nu} + p_{1,\nu} p_{2,\mu}) \\ &= C_{00} g_{\mu\nu} + \sum_{i,j=1}^2 C_{ij} p_{i\mu} p_{j\nu} \\ C_{\mu\nu\rho} &= \sum_{i=1}^2 (g_{\mu\nu} p_{i\rho} + g_{\nu\rho} p_{i\mu} + g_{\mu\rho} p_{i\nu}) C_{00i} + \sum_{i,j,k=1}^2 C_{ijk} p_{i\mu} p_{j\nu} p_{k\rho} \\ D_\mu &= \sum_{i=1}^3 D_i p_{i\mu} \\ D_{\mu\nu} &= D_{00} g_{\mu\nu} + \sum_{i,j=1}^3 D_{ij} p_{i\mu} p_{j\nu} \\ D_{\mu\nu\rho} &= \sum_{i=1}^3 D_{00i} (g_{\mu\nu} p_{i\rho} + g_{\nu\rho} p_{i\mu} + g_{\mu\rho} p_{i\nu}) + \sum_{i,j,k=1}^3 D_{ijk} p_{i\mu} p_{j\nu} p_{k\rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu\rho\sigma} &= D_{0000}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \\
&+ \sum_{i,j=1}^3 D_{00ij}(g_{\mu\nu}p_{i\rho}p_{j\sigma} + g_{\nu\rho}p_{i\mu}p_{j\sigma} + g_{\mu\rho}p_{i\nu}p_{j\sigma} + g_{\mu\sigma}p_{i\nu}p_{j\rho} \\
&\quad + g_{\nu\sigma}p_{i\mu}p_{j\rho} + g_{\rho\sigma}p_{i\mu}p_{j\nu}) \\
&+ \sum_{i,j,k,l=1}^3 D_{ijkl}p_{i\mu}p_{j\nu}p_{k\rho}p_{l\sigma}
\end{aligned} \tag{5.114}$$

$C_{ijk}, D_{ij}, D_{ijk}, D_{00ij}, D_{ijkl}$ sind symmetrisch in den Indizes. Die Koeffizienten können durch Kontraktion mit den Tensoren bestimmt werden.

Beispiele:

$$\begin{aligned}
(i) p^\mu B_\mu &= p^2 B_1 = \frac{16\pi^2 \mu^{4-D}}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{kp}{(k^2 - m_0^2)[(k+p)^2 - m_1^2]} \\
kp &= \frac{1}{2} \{[(k+p)^2 - m_1^2] - (k^2 - m_0^2) - p^2 - m_0^2 + m_1^2\}
\end{aligned} \tag{5.115}$$

$$B_1 = \frac{1}{2p^2} \{A_0(m_0) - A_0(m_1) - (p^2 + m_0^2 - m_1^2)B_0(p; m_0, m_1)\} \tag{5.116}$$

$$\begin{aligned}
(ii) g^{\mu\nu} B_{\mu\nu} &= DB_{00} + p^2 B_{11} = \frac{16\pi^2 \mu^{4-D}}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2 - m_0^2 + m_0^2}{(k^2 - m_0^2)[(k+p)^2 - m_1^2]} \\
&= A_0(m_1) + m_0^2 B_0 \\
p^\mu p^\nu B_{\mu\nu} &= p^2 (B_{00} + p^2 B_{11}) = \frac{16\pi^2 \mu^{4-D}}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(kp)^2}{(k^2 - m_0^2)[(k+p)^2 - m_1^2]} \\
(kp)^2 &= \underbrace{\frac{kp}{2}[(k+p)^2 - m_1^2]}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{kp}{2}(k^2 - m_0^2)}_{\rightarrow \frac{p^2}{2}(k^2 - m_0^2)} - \frac{kp}{2}(p^2 + m_0^2 - m_1^2) \\
\text{because } \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu}{k^2 - m^2} &= 0 \\
\frac{1}{p^2} p^\mu p^\nu B_{\mu\nu} &= B_{00} + p^2 B_{11} = \frac{1}{2} \{A_0(m_1) - (p^2 + m_0^2 - m_1^2)B_1\} \\
\text{and } DB_{00} + p^2 B_{11} &= A_0(m_1) + m_0^2 B_0
\end{aligned} \tag{5.117}$$

Also haben wir

$$\begin{aligned}
B_{00} &= \frac{1}{2(D-1)} \{A_0(m_1) + 2m_0^2 B_0 + (p^2 + m_0^2 - m_1^2)B_1\} \\
B_{11} &= \frac{1}{2(D-1)p^2} \{(D-2)A_0(m_1) - 2m_0^2 B_0 - D(p^2 + m_0^2 - m_1^2)B_1\}
\end{aligned} \tag{5.118}$$

$$(iii) \quad p_1^\mu C_\mu = p_1^2 C_1 + p_1 p_2 C_2 = \frac{16\pi^2 \mu^{4-D}}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{kp_1}{(k^2 - m_0^2)[(k+p_1)^2 - m_1^2][(k+p_2)^2 - m_2^2]}$$

$$\begin{aligned}
p_1 k &= \frac{1}{2} \{ [(k + p_1)^2 - m_1^2] - (k^2 - m_0^2) - (p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) \} \\
p_1^2 C_1 + p_1 p_2 C_2 &= \frac{1}{2} \{ B_0(p_2; m_0, m_2) - B_0(p_2 - p_1; m_1, m_2) - (p_1^2 - m_1^2 + m_0^2) C_0 \} \\
p_1 p_2 C_1 + p_2^2 C_2 &= \frac{1}{2} \{ B_0(p_1; m_0, m_1) - B_0(p_2 - p_1; m_1, m_2) - (p_2^2 - m_2^2 + m_0^2) C_0 \}
\end{aligned} \tag{5.119}$$

In matrix from $[f_i = p_i^2 - m_i^2 + m_0^2]$:

$$\begin{pmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 \\ p_1 p_2 & p_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} B_0(p_2; m_0, m_2) - B_0(p_2 - p_1; m_1, m_2) - f_1 C_0 \\ B_0(p_1; m_0, m_1) - B_0(p_2 - p_1; m_1, m_2) - f_2 C_0 \end{pmatrix} \tag{5.120}$$

Damit haben wir als Lösung

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 \\ p_1 p_2 & p_2^2 \end{pmatrix}^{-1} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} B_0(p_2; m_0, m_2) - B_0(p_2 - p_1; m_1, m_2) - f_1 C_0 \\ B_0(p_1; m_0, m_1) - B_0(p_2 - p_1; m_1, m_2) - f_2 C_0 \end{pmatrix} \tag{5.121}$$

5.3.1 Hilfreiche Formeln

Für die Berechnung der skalaren Integrale benötigen wir einige Formeln und/oder Beziehungen, die im folgenden gegeben werden.

Feynman Parametrisierung:

$$\frac{1}{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \dots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{(1-x_1-\dots-x_{n-1})^{\alpha_1-1} x_1^{\alpha_2-1} \dots x_{n-1}^{\alpha_n-1}}{[a_1(1-x_1-\dots-x_{n-1}) + a_2 x_1 + \dots + a_n x_{n-1}]^{\sum \alpha_i}} \tag{5.122}$$

D-dimensionale Integrale

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)^N} &= i \frac{(-1)^N}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(N - \frac{D}{2})}{\Gamma(N)} \frac{1}{(M^2 - i\epsilon)^{N - \frac{D}{2}}} \\
\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)^N} &= \frac{i}{2} \frac{(-1)^{N-1}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(N - 1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(N)} \frac{D}{(M^2 - i\epsilon)^{N-1 - \frac{D}{2}}} \\
\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - M^2 + i\epsilon)^N} &= \frac{i}{2} \frac{(-1)^{N-1}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(N - 1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(N)} \frac{g_{\mu\nu}}{(M^2 - i\epsilon)^{N-1 - \frac{D}{2}}} \\
\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k_\mu k_\nu f(k^2) &= \frac{1}{D} g_{\mu\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k^2 f(k^2)
\end{aligned} \tag{5.123}$$

Entwicklung der Gamma- und der Beta-Funktion

$$\begin{aligned}
\Gamma(N - \frac{\epsilon}{2}) &= \Gamma(N) (1 - \frac{\epsilon}{2} \Psi(N)) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad \text{for } \epsilon = 4 - D \\
\text{with } \Psi(N) &= S_{N-1} - \gamma_E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{j} \quad \text{and } \gamma_E = 0.5772... \\
\Gamma(A) &= \frac{\Gamma(A+1)}{A} \\
B(A_1, A_2) &= \frac{\Gamma(A_1)\Gamma(A_2)}{\Gamma(A_1+A_2)} \\
\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) \\
B\left(N - \frac{\epsilon}{2}, 1 - \frac{\epsilon}{2}\right) &= \frac{1}{N} \left[1 + \epsilon S_N - \frac{\epsilon}{2} S_{N-1}\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
B\left(N - \frac{\epsilon}{2}, 2 - \frac{\epsilon}{2}\right) &= \frac{1}{N(N+1)} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} S_{N-1} - \frac{\epsilon}{2} + \epsilon S_{N+1}\right] + \mathcal{O}(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{5.124}$$

5.3.2 Berechnung der skalaren Integrale

Wir haben bereits gefunden

$$A_0(m) = m^2 \left\{ \Delta + \ln \frac{\mu^2}{m^2} + 1 \right\} \tag{5.125}$$

mit

$$\Delta = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \tag{5.126}$$

Als nächstes berechnen wir die B_0 Funktion

$$B_0(p; m_0, m_1) = \frac{16\pi^2 \mu^{4-D}}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - m_0^2 + i0)[(k+p)^2 - m_1^2 + i0]} \tag{5.127}$$

Mit der Feynman-Parametrisierung (siehe Glg. (5.122)) haben wir

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[Ax + B(1-x)]^2} = -\frac{1}{A-B} \left(\frac{1}{Ax + B(1-x)} \Big|_0^1 \right) = -\frac{1}{A-B} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \tag{5.128}$$

Nach der Feynman-Parametrisierung [$A = (k+p)^2 - m_1^2$ und $B = k^2 - m_0^2$] haben wir für die B_0 Funktion

$$\begin{aligned}
B_0 &= \frac{16\pi^2 \mu^{4-D}}{i} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + 2kQ - M^2 + i0)^2} \quad \text{with} \\
Q &= xp \quad M^2 = m_0^2(1-x) - (p^2 - m_1^2)x.
\end{aligned} \tag{5.129}$$

Wir redefinieren k als $k = k' - Q$ und schreiben dann k' als k . Wir haben dann

$$\begin{aligned}
B_0 &= \frac{16\pi^2 \mu^{4-D}}{i} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - R^2 + i0)^2} \quad \text{with} \\
R^2 &= Q^2 + M^2 = m_0^2(1-x) + m_1^2 x - p^2 x(1-x).
\end{aligned} \tag{5.130}$$

Für das Integral über k benützen wir die Integrationsformel (siehe auch oben)

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - R^2)^N} = (-1)^N \frac{i\Gamma(N - \frac{D}{2})}{(4\pi)^{D/2}\Gamma(N)} (R^2)^{\frac{D}{2}-N} \tag{5.131}$$

und bekommen

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{16\pi^2\mu^{2\epsilon}}{i} \frac{i\Gamma(\epsilon)}{(4\pi)^{2-\epsilon}\Gamma(2)} \int_0^1 dx (R^2 - io)^{-\epsilon} \\ &= \Gamma(\epsilon) \left(\frac{4\pi\mu^2}{\bar{m}_0^2} \right)^\epsilon \int_0^1 dx \left\{ 1 - \epsilon \ln \frac{R^2 - io}{\bar{m}_0^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\} \quad [\bar{m}_i^2 = m_i^2 - io] \end{aligned} \quad (5.132)$$

Eine Entwicklung in ϵ führt auf

$$B_0 = \Delta + \ln \frac{\mu^2}{m_0^2} - \int_0^1 dx \ln \underbrace{\left\{ \frac{\bar{m}_0^2(1-x) + \bar{m}_1^2 x - p^2 x(1-x)}{\bar{m}_0^2} \right\}}_{\left(1 - \frac{x}{x_+}\right) \left(1 - \frac{x}{x_-}\right)} \quad (5.133)$$

mit

$$x_{\pm} = \frac{1}{2p^2} \{ p^2 + m_0^2 - m_1^2 \pm \sqrt{(p^2 - \bar{m}_0^2 - \bar{m}_1^2)^2 - 4\bar{m}_0^2 \bar{m}_1^2} \}. \quad (5.134)$$

Für den komplexen Logarithmus, der in dem Integral auftritt, benötigen wir ein Theorem:

$$\begin{aligned} \ln ab &= \ln a + \ln b + \eta(a, b) \quad \text{mit} \\ \eta(a, b) &= \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } \text{Im} a > 0, \text{Im} b > 0, \text{Im} ab < 0 \\ & \text{oder } \text{Im} a < 0, \text{Im} b < 0, \text{Im} ab > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.135)$$

Damit haben wir für

$$\ln[(a + io)(b - io')] = \ln(a + io) + \ln(b - io') \quad (5.136)$$

Und somit finden wir schließlich für B_0

$$B_0 = \Delta + \ln \frac{\mu^2}{m_0^2} + 2 + (x_+ - 1) \ln \left(\frac{x_+ - 1}{x_+} \right) + (x_- - 1) \ln \left(\frac{x_- - 1}{x_-} \right) \quad (5.137)$$

Analoge Prozeduren führen auf die analytischen Ergebnisse für die 3- und 4-Punktfunktionen.

5.4 Höhere Ordnungen: Physikalische Ergebnisse

5.4.1 Fermikonstante

Die Fermikonstante ist auf Baumgraphenniveau gegeben durch

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{\pi\alpha}{2m_W^2 \sin^2 \theta_W} = \frac{\pi\alpha}{2m_W^2 \left(1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}\right)} \quad (5.138)$$

Der Myon-Zerfall hat im Fermi-Modell die partielle Breite

$$\Gamma_\mu = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \left(1 - 8 \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \right) \quad (5.139)$$

Die endlichen QED Korrekturen sind gegeben durch (Summe der virtuellen und reellen Korrekturen)

$$\Gamma_\mu = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \left(1 - 8 \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \right) \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{25}{4} - \pi^2 \right) \right] . \quad (5.140)$$

GSW Theorie: Die virtuelle Photonkorrektur zum Fermi-Vertex entspricht dem folgenden Box-Diagramm

Für $m_\mu^2 \ll m_W^2$ erhalten wir

$$\mathcal{M}_{box}^{\gamma W} = \mathcal{M}_{Born} \frac{\alpha}{\pi} \left\{ \ln \frac{m_W}{m_e} + \ln \frac{m_W}{m_\mu} - \ln \frac{m_e^2}{\lambda^2} - \ln \frac{m_\mu^2}{\lambda^2} + \frac{9}{2} \right\} . \quad (5.141)$$

Wir müssen dies zur elektroschwachen Vertexkorrektur addieren,

$$\mathcal{M}_{vertex} = \mathcal{M}_{Born} \left\{ \Lambda^{We\nu} + \Lambda^{W\mu\nu} + \underbrace{\frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{9}{2} - \ln \frac{m_\mu}{m_Z} - \ln \frac{m_e}{m_Z} - \ln \frac{m_\mu^2}{\lambda^2} - \ln \frac{m_e^2}{\lambda^2} \right)}_{\text{aus UV endl. } \nu \text{ Wellenfcts.ren.faktoren}} \right\} \quad (5.142)$$

mit

$$\Lambda^{Wl\nu} = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{3}{2} \frac{3c_W^2 - 1}{s_W^2} - \ln \frac{m_W^2}{m_l^2} + 2 \ln \frac{m_l^2}{\lambda^2} + \left(1 - \frac{7}{2s_W^2} + \frac{3}{s_W^4} \right) \ln c_W^2 \right\} \quad l = e, \mu . \quad (5.143)$$

und den massiven Boxdiagrammen

$$\mathcal{M}_{box}^{ZW} = -\mathcal{M}_{Born} \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ 1 - \frac{5}{s_W^2} + \frac{5}{2s_W^4} \right\} \ln c_W^2 . \quad (5.144)$$

Diese Beträge resultieren nach Subtraktion aller QED Beträge im Fermi-Modell in

$$\mathcal{M}_V = \mathcal{M}_{Born}^0 (1 + \delta_V) , \quad (5.145)$$

wobei $\mathcal{M}_{Born}^0$ die unrenormierte Bornamplitude bezeichnet und

$$\delta_V = \frac{\alpha}{4\pi s_W^2} \left\{ 6 + \frac{7 - 4s_W^2}{2s_W^2} \ln c_W^2 \right\} \quad (5.146)$$

(δ_V ist UV und infrarot (IR) endlich.) Schließlich müssen alle Beiträge zur W -Boson Selbstenergie addiert werden:

$$\mathcal{M}_W = \mathcal{M}_{Born} \frac{-\Sigma^W(k^2)}{k^2 - m_W^2} \rightarrow \mathcal{M}_{Born} \frac{\Sigma^W(0)}{m_W^2}$$

Das Endergebnis im GSW Modell (ohne QED) ist dann

$$\mathcal{M}_{elw} = \mathcal{M}_{Born}^0 \left\{ 1 + \frac{\Sigma_T^W(0)}{m_W^2} + \delta_V \right\} . \quad (5.147)$$

Dies resultiert in einer Modifikation der Relation der Fermikonstanten

$$\begin{aligned} \frac{G_F}{\sqrt{2}} &= \frac{e_0^2}{8s_{W0}^2 m_{W0}^2} \left\{ 1 + \frac{\Sigma_T^W(0)}{m_W^2} + \delta_V \right\} \\ &= \frac{e^2}{8s_W^2 m_W^2} \left\{ 1 + \frac{\Sigma_T^W(0)}{m_W^2} + \delta_V + 2\delta Z_e - \frac{\delta m_W^2}{m_W^2} + \cot^2 \theta_W \left(\frac{\delta m_W^2}{m_W^2} - \frac{\delta m_Z^2}{m_Z^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.148)$$

also

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{\pi\alpha}{2M_W^2 \sin^2 \theta_W} [1 + \Delta r] \quad (5.149)$$

wobei

$$\Delta r = 2\delta Z_e + \frac{\Sigma_T^W(0) - \delta m_W^2}{m_W^2} + \cot^2 \theta_W \left(\frac{\delta m_W^2}{m_W^2} - \frac{\delta m_Z^2}{m_Z^2} \right) + \delta_V \quad (5.150)$$

Nach Verwendung von Glgen. (5.106),(5.107) erhalten wir aber

$$\begin{aligned} \Delta r = & \frac{\partial \Sigma_T^{AA}(k^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=0} - 2 \tan \theta_W \frac{\Sigma_T^{AZ}(0)}{m_Z^2} + \frac{\Sigma_T^W(0) - \text{Re} \Sigma_T(m_W^2)}{m_W^2} \\ & + \cot^2 \theta_W \left(\frac{\text{Re} \Sigma_T^W(m_W^2)}{m_W^2} - \frac{\text{Re} \Sigma_T^{ZZ}(m_Z^2)}{m_Z^2} \right) + \delta_V . \end{aligned} \quad (5.151)$$

Die verschiedenen Beiträge der Selbstenergien liefern

$$\Delta r = \Delta \alpha - \cot^2 \theta_W \Delta \rho + \Delta r_{rem} \quad (5.152)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= \frac{\alpha(m_Z^2) - \alpha}{\alpha} \\ \Delta \rho &= \frac{\Sigma^{ZZ}(0)}{m_Z^2} - \frac{\Sigma^{WW}(0)}{m_W^2} - 2 \tan \theta_W \frac{\Sigma^{AZ}(0)}{m_Z^2} . \end{aligned} \quad (5.153)$$

Die führenden Beiträge für $\Delta \alpha$ sind gegeben durch

$$\Delta \alpha = \Delta \alpha_l + \Delta \alpha_{had}^{(5)} + \Delta \alpha_{top} \approx 0.061 \quad (5.154)$$

mit den leptonischen, den leichten hadronischen und den Top-Quark Beiträgen

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_l &= \sum_l \frac{\alpha}{3\pi} e_l^2 \left(\ln \frac{m_Z^2}{m_l^2} - \frac{5}{3} \right) \approx 0.033 \\ \Delta \alpha_{had}^{(5)} &= \Delta_{had}^{(5)}(E_0) + \sum_{q \neq t} N_c \frac{\alpha}{3\pi} e_q^2 \ln \frac{m_Z^2}{E_0^2} \delta_{QCD} \approx 0.028 \quad [E_0 \sim 40 \text{ GeV}] \\ \Delta \alpha_{top} &\approx -\frac{\alpha}{3\pi} \frac{4}{15} \frac{m_Z^2}{m_t^2} \approx -0.000061 . \end{aligned} \quad (5.155)$$

δ_{QCD} stellen die QCD Korrekturen für die leichten Quarks dar. Die führenden Beiträge zu $\Delta \rho$ kommen aus dem großen Massensplitting des Top-Bottom Isospin Dubletts der dritten Generation.

$$\begin{aligned} \Delta \rho &= 3 \frac{G_F m_t^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \left\{ 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) \frac{\alpha_S(m_t^2)}{\pi} + \frac{G_F m_t^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \Delta \rho^{(2)} \right\} \\ \Delta \rho^{(2)} &= 19 - 2\pi^2 \quad \text{for } M_H^2 \ll m_t^2 . \end{aligned} \quad (5.156)$$

Die relevanten nicht-führenden Beiträge zu Δr_{rem} werden vom Top-Quark und Higgsboson erzeugt:

$$\Delta r_{rem}^t = -\frac{G_F m_W^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \left\{ 2 \left(\cot^2 \theta_W - \frac{1}{3} \right) \ln \frac{m_t^2}{m_W^2} + \frac{4}{3} \ln c_W^2 + \cot \theta_W^2 - \frac{7}{9} \right\} \quad (5.157)$$

$$\begin{aligned}\Delta\rho_H &= -\frac{G_F m_W^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \tan^2 \theta_W 3 \left(\ln \frac{M_H^2}{m_W^2} - \frac{5}{6} \right) \\ \Delta r_{rem}^H &= \frac{G_F m_W^2}{8\sqrt{2}\pi^2} \frac{11}{3} \left(\ln \frac{M_H^2}{m_W^2} - \frac{5}{6} \right) \quad \text{for } M_H^2 \gg m_W^2 .\end{aligned}\quad (5.158)$$

Screening (Abschirm) Theorem: Auf 1-Schleifenniveau gibt es für große Higgsmassen nur logarithmische Abhängigkeiten von der Higgsmasse. (Veltman, Acta Phys. Pol. B8 ('77) 475).

Nach Summierung der führenden Beiträge erhalten wir für $\alpha(m_Z^2)$

$$\alpha(m_Z^2) = \alpha[1 + \Delta\alpha + (\Delta\alpha)^2 + \dots] = \frac{\alpha}{1 - \Delta\alpha} = \frac{1}{128.90 \pm 0.09} . \quad (5.159)$$

Der ρ Parameter ist definiert als die Relation zwischen neutralen und geladenen Axialkoppelungen,

$$\frac{e^2}{2s_W^2} \rightarrow \frac{e^2}{2s_W^2} (1 + \Delta\alpha - \cot^2 \theta_W \Delta\rho) \approx \sqrt{2} G_F m_W^2 \quad (5.160)$$

$$\frac{e^2}{4s_W^2 c_W^2} \rightarrow \frac{e^2}{4s_W^2 c_W^2} \left(1 + \Delta\alpha - \frac{c_W^2 - s_W^2}{s_W^2} \Delta\rho \right) \approx \frac{G_F m_W^2}{\sqrt{2} c_W^2} (1 + \Delta\rho) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} m_Z^2 \rho . \quad (5.161)$$

Summation der Beiträge führt auf

$$\rho = 1 + \Delta\rho + (\Delta\rho)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \Delta\rho} . \quad (5.162)$$

Die Korrekturen können in einen effektiven Weinbergwinkel absorbiert werden

$$\bar{c}_W^2 = c_W^2 (1 - \Delta\rho) = \frac{c_W^2}{\rho} \quad (5.163)$$

und

$$\bar{s}_W^2 = 1 - \bar{c}_W^2 = 1 - c_W^2 + \Delta\rho c_W^2 = s_W^2 + c_W^2 \Delta\rho . \quad (5.164)$$

Schließlich erhält man das resummierte Ergebnis für Δr

$$\begin{aligned}\frac{G_F}{\sqrt{2}} &= \frac{\pi\alpha}{2m_W^2 s_W^2} \frac{1}{1 - \Delta\alpha} \frac{1}{1 + \cot^2 \theta_W \Delta\rho} \{1 + \Delta r - \Delta\alpha + \cot^2 \theta_W \Delta\rho\} \\ &= \frac{\pi\alpha(m_Z^2)}{2m_W^2 \bar{s}_W^2} (1 + \underbrace{\Delta r_{rem}}_{\ll 1}) .\end{aligned}\quad (5.165)$$

Die führenden elektroschwachen Strahlungskorrekturen können in effektive Parameter der Bornsterme absorbiert werden. Das Rezept besteht darin, folgende Ersetzungen durchzuführen

	α	$\rightarrow$	$\alpha(M_Z^2)$	
	s_W^2	$\rightarrow$	$\bar{s}_W^2 = s_W^2 + c_W^2 \Delta\rho$	[effektiver leptonischer Weinbergwinkel]
	c_W^2	$\rightarrow$	$\bar{c}_W^2 = c_W^2(1 - \Delta\rho)$	
<u>CC:</u>	$\frac{e^2}{2s_W^2} = \frac{2\pi\alpha}{s_W^2}$	$\rightarrow$	$\frac{2\pi\alpha(M_Z^2)}{\bar{s}_W^2} \approx 2\sqrt{2}G_F M_W^2$	
<u>NC:</u>	$\frac{e^2}{4s_W^2 c_W^2} = \frac{\pi\alpha}{s_W^2 c_W^2}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi\alpha(M_Z^2)}{\bar{s}_W^2 \bar{c}_W^2} \approx \sqrt{2}G_F M_Z^2 \rho$	with $\rho = \frac{1}{1 - \Delta\rho}$ (5.166)

Kapitel 6

Quantenchromodynamik - QCD

6.1 Einführung der Farbe

Die QCD ist die feldtheoretische Formulierung der starken Wechselwirkung. Historisch war die starke Wechselwirkung definiert als

- Bindungskraft zwischen den Kernbausteinen im Kern.
- Die Kraft, die bei der Kollision von Kernen auftritt.

Wechselwirkungslänge:

$$d \sim 1 \text{ fm} \rightarrow \sigma \sim \pi \frac{d^2}{4} \sim 10 \text{ mb} . \quad (6.1)$$

Wechselwirkungsstärke

$$\begin{aligned} V(R) &= \frac{g_s^2}{4\pi} e^{-\frac{R}{d}} \\ \frac{g_s^2}{4\pi} &\sim 10^2 \frac{g_{em}^2}{4\pi} \sim 1 . \end{aligned} \quad (6.2)$$

Spin-Statistik Problem des Quarkmodells

$\Delta^{++}(s_z = \frac{3}{2}) = u(\uparrow)u(\uparrow)u(\uparrow)$ hat eine total symmetrische Spinwellenfunktion. Jedoch verlangt die Fermistatistik eine Spinwellenfunktion, die total antisymmetrisch ist.

(i) Grundzustand $\neq$ relativistischer s -Wellenkombination entgegen der naiven Erwartung.
 p -Welle $\rightarrow$ Knoten $\rightarrow$ verbotenen Zonen $\rightarrow$ höhere Energie als Folge des Unschärfeprinzips.

(ii) Magnetische Momente der Kerne

$\vec{\mu}_{2m}^{eQ}[\vec{l} + 2\vec{s}]$, s -Wellen $l = 0$: Momente der Kerne sind additiv aus den Quarkmomenten zusammengesetzt.

$$\mu_N = \langle \mathcal{N} | \sum_{i=1}^3 \mu(i) \sigma_3(i) | \mathcal{N} \rangle \quad (6.3)$$

Aufgrund der Spinwellenfunktion: $[\mu_u = -2\mu_d]$

$$\begin{aligned}\mu_P &= \frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_d = -\left(\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right)\mu_d = -3\mu_d \quad \text{für } m_u \approx m_d \\ \mu_n &= \frac{4}{3}\mu_d - \frac{1}{3}\mu_u = \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right)\mu_d = 2\mu_d\end{aligned}\quad (6.4)$$

Verhältnis

$$\frac{\mu_P}{\mu_n} = -\frac{3}{2} \quad \text{exp.} = -1.46 \quad (6.5)$$

Kein $l \neq 0$ Strombeitrag notwendig.

$$\text{Effektive Quarkmasse: } \mu_P = \frac{e}{2m_P} 2.79 = -\frac{1}{3} \frac{e}{2m_d} (-3) = \frac{e}{2m_d} \Rightarrow$$

$$m_q^{eff} = \frac{m_P}{2.79} \approx 330 \text{ MeV} \quad (6.6)$$

Lösung: Quarks haben eine 3-wertige Eigenschaft für die Unterscheidung, so daß das symmetrische Quarkmodell möglich ist.

I. Farb-Hypothese (Greenberg '64)

Abgesehen von den Flavour-Ladungen haben die Quarks Farbladungen; jedes Quark existiert in genau 3 Farben (rot, blau, grün = 1,2,3): $q = (q_1, q_2, q_3)$.

Farbtransformationen: Die maximale Mischungsgruppe der 3 Farbfreiheitsgrade [$\neq$ gemeinsame Farbe] ist

$$q \rightarrow q' = e^{-i \sum_{k=1}^8 \alpha_k \frac{\lambda_k}{2}} q \leftarrow \quad (6.7)$$

$SU(3)_C$ Transformationen = unimodulare, unitäre 3×3 Matrizen [nicht-Abelsche Gruppe].

Gell-Mann Matrizen: λ_k , $k = 1, \dots, 8$. [3-dimensionale Erweiterung der $\vec{\sigma}$ in $SU(2)$.]

$$\begin{aligned}\lambda_k^\dagger &= \lambda_k \Rightarrow e^{-i\alpha_k \frac{\lambda_k}{2}} \quad \text{unitär: } U^\dagger U = \mathbf{1} \\ \text{Tr} \lambda_k &= 0 \Rightarrow \text{unimodular: } \det U = +1.\end{aligned}\quad (6.8)$$

Explizite Darstellung:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (6.9)$$

Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2} \right] &= if_{ijk} \frac{\lambda_k}{2} \quad [A_2 \text{ algebra}] \\
 \left\{ \frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2} \right\} &= \frac{1}{3} \delta_{ij} \mathbf{1} + d_{ijk} \frac{\lambda_k}{2} \\
 \text{Tr}(\lambda_i \lambda_j) &= 2 \delta_{ij} \quad \text{Tr}(\lambda_i) = 0 .
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

I'. Farb-Hypothese (Gell-Mann '72)

Die $SU(3)_C$ Symmetrie ist exakt. Alle physikalischen (freien) Zustände, Observablen und Wechselwirkungen sind $SU(3)_C$ Singulets.

(a) Quarks, die Farbtupletts sind, existieren nicht als freie Teilchen.

(b) Farbwellenfunktion

$$\left. \begin{aligned} \text{Baryonen} &: \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{ijk} \\ \text{Mesonen} &: \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \epsilon_{ijk}, \delta_{ij} SU(3)_C \text{ singlets} . \tag{6.11}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 \Delta^{++}(s_z = +\frac{3}{2}) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{ijk} u_i(\uparrow) u_j(\uparrow) u_k(\uparrow) \\
 \Phi(s_z = +1) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{ij} s_i(\uparrow) \bar{s}_j(\uparrow) .
 \end{aligned}$$

(c) Elektromagnetische Wechselwirkung:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{em} &= -e j^\mu A_\mu \\
 j_\mu &= \sum_{fl} \bar{q} \gamma_\mu Q_q q \equiv \sum_{fl} \sum_C \bar{q}_C \gamma_\mu Q_q q_C ,
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

welches ein $SU(3)$ Singulett ist.

Tests der Farbhypothese:

1.) $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ decay

Zerfallsbreite:

$$\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{\alpha^2}{32\pi^3} \frac{m_\pi^3}{f_\pi^2} (Q_u^2 - Q_d^2)^2 N_C^2 \tag{6.13}$$

- ohne Farbe : $N_C = 1: \Gamma = 0.87 \text{ eV}$
mit Farbe : $N_C = 3: \Gamma = 7.86 \text{ eV}$
 experimentell : $\Gamma_{exp} = 7.48 \pm 0.33 \pm 0.31 \text{ eV}$

2.) $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$

Im Quark-Parton-Modell ist die Produktionswahrscheinlichkeit von $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$ durch die aller $q\bar{q}$ Paare gegeben. Die Endzustands-Wechselwirkung kann für $\frac{d_{prod. q\bar{q}}}{d_{hadron}} \sim \frac{1 \text{ GeV}}{E} \xrightarrow{(E \rightarrow \infty)} 0$ vernachlässigt werden.

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_{fl, C} \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow q\bar{q})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_{fl} e_q^2 \quad (6.14)$$

q	e_q
u, c, t	$+\frac{2}{3}$
d, s, b	$-\frac{1}{3}$

Energie	prod. quarks	R ohne Farbe	R mit Farbe
$< 3 \text{ GeV}$	u, d, s	$\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$	2
$> 5 \text{ GeV}$	$+c$	$\frac{6}{9} + \frac{4}{9} = \frac{10}{9}$	$\frac{10}{3}$
$> 10 \text{ GeV}$	$+b$	$\frac{10}{9} + \frac{1}{9} = \frac{11}{9}$	$\frac{11}{3}$

6.2 Gluon Eichfelder

In Analogie zur QED:

II. Farbhypothese (Nambu '66, Fritzsch+Gell-Mann '72, Leutwyler '73)
 Die Farbladungen sind die Quellen der Eichfelder ($\Rightarrow$ Gluonen), die die starke Wechselwirkung zwischen den Quarks aufbauen.

Lagrangedichte für ein Farbtriplett:

$$\mathcal{L}_q = \bar{q}(x)(i\cancel{\partial} - m_q)q(x) \quad \text{with } q = (q_1, q_2, q_3), \quad m_{q_1} = m_{q_2} = m_{q_3} \quad SU(3)_C \text{ Singulett} \quad (6.15)$$

- $\mathcal{L}$ ist invariant unter globalen, nicht-Abelschen $SU(3)_C$ Transformationen

$$\left. \begin{array}{l} q(x) \rightarrow Sq(x) \\ \bar{q}(x) \rightarrow \bar{q}(x)S^{-1} \end{array} \right\} S = e^{-i\alpha_k T^k} \quad (T^k = \frac{\lambda_k}{2}). \quad (6.16)$$

- $\mathcal{L}$ ist nicht invariant unter lokalen $SU(3)_C$ Transformationen: $\alpha_k = \alpha_k(x)$,

$$\mathcal{L}_q \rightarrow \mathcal{L}_q + \bar{q}(x)(S^{-1}i\cancel{\partial}S)q(x). \quad (6.17)$$

$\mathcal{L}$ kann durch die Einführung von 8 minimal gekoppelten Gluonfeldern $G_\mu^k(x)$ ($k = 1, \dots, 8$) (Gluon Matrix $G_\mu = G_\mu^k T^k$) lokal eichinvariant gemacht werden,

$$\begin{aligned} i\partial_\mu &\rightarrow i\partial_\mu - g_s G_\mu = iD_\mu \\ \mathcal{L}_q &= \bar{q}(x)(i\cancel{D} - m_q)q(x) = \bar{q}(x)(i\cancel{\partial} - m_q - g_s \cancel{G}(x))q(x) \end{aligned} \quad (6.18)$$

mit

$$\begin{aligned} q(x) &\rightarrow S(x)q(x) & \alpha_k &= \alpha_k(x) \\ \bar{q}(x) &\rightarrow \bar{q}(x)S^{-1} \\ G_\mu(x) &\rightarrow SG_\mu S^{-1} - \frac{i}{g_s} S\partial_\mu S^{-1}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Die kovariante Ableitung transformiert sich gemäß $[\partial_\mu(SS^{-1}) = 0]$

$$\begin{aligned} iDq \rightarrow iD'q' &= [i\partial - g_s S G S^{-1} - i(\partial S)S^{-1}]Sq \\ &= S(i\partial - g_s G)q = S iD S^{-1} Sq. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Damit $\underline{D \rightarrow D' = S D S^{-1}}$ (Rotation).

Gluon Lagrangedichte Wir führen die Rotation ein:

$$G_{\mu\nu} = D_\nu G_\mu - D_\mu G_\nu = \partial_\nu G_\mu - \partial_\mu G_\nu - ig_s [G_\mu, G_\nu] \quad (6.21)$$

Sie transformiert sich gemäß: (mit $G_{\mu\nu} = \frac{i}{g_s} [D_\mu, D_\nu]$)

$$G_{\mu\nu} \rightarrow G'_{\mu\nu} = S G_{\mu\nu} S^{-1} \quad \text{reine Rotation [keine Observable]}. \quad (6.22)$$

Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu}^2 = -\frac{1}{4} (G_{\mu\nu}^k)^2. \quad (6.23)$$

Sie ist eichinvariant (kein Massenterm: $+\frac{1}{2}m_g^2 \text{Tr} G_\mu^2$). Die Lagrangedichte besteht aus

- (a) kinetischem Anteil $= -\frac{1}{4}(\partial_\nu G_\mu^k - \partial_\mu G_\nu^k)^2$
- (b) trilineare Kopplung $\sim g_s G G G$
- (c) quartische Kopplung $\sim g_s^2 G G G G$.

- Die Gluonfelder wechselwirken mit sich selbst: farbgeladene Gluonen sind Quellen für Gluonen ($\neq \gamma$).

- g_s ist universell, sie wird im Eichsektor festgelegt: die Farbladungen sind quantisiert.

Lagrangedichte I der QCD:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{q}(i\cancel{D} - m_q)q - \frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu}^2 \\ &= \bar{q}(i\cancel{\partial} - m_q)q - \frac{1}{2} \text{Tr}(\partial_\nu G_\mu - \partial_\mu G_\nu)^2 && \text{kin. Anteil} \\ &\quad - g_s \bar{q} \cancel{G} q && \text{Quark-Gluon Kopplung} \\ &\quad + ig_s \text{Tr}(\partial_\nu G_\mu - \partial_\mu G_\nu)[G_\mu, G_\nu] && \text{3-Gluon Kopplung} \\ &\quad + \frac{g_s^2}{2} \text{Tr}[G_\mu, G_\nu]^2 && \text{4-Gluon Kopplung} \end{aligned}$$

Die Feynmanregeln sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
& \delta^{ab} [-g^{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2 + i\epsilon} \frac{i}{p^2 + i\epsilon}] \\
& \delta^{ab} \frac{i}{(p^2 + i\epsilon)} \\
& \delta^{AB} \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon}_{ji} \\
& -gf^{abc} [(p - q)^\rho g^{\mu\nu} + (q - r)^\mu g^{\nu\rho} + (r - p)^\beta g^{\rho\mu}] \\
& \text{[alle Impulse einlaufend, } p + q + r = 0] \\
& -ig^2 f^{xac} f^{xbd} [g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] \\
& -ig^2 f^{xad} f^{xbc} [g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}] \\
& -ig^2 f^{xab} f^{xcd} [g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}] \\
& gf^{abc} q^\mu \\
& -ig(t^a)_{CB} (\gamma^\mu)_{ji}
\end{aligned} \tag{6.24}$$

Nach der Eichfixierung und Anwendung des Fadeev-Popov Tricks erhalten wir innerhalb der Feynman Pfadintegralformulierung für die vollständige QCD Lagrangedichte das Wirkungsfunktional

Vollständige Lagrangedichte der QCD			
W	$\sim$	$\int \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}q \mathcal{D}G \mathcal{D}c^* \mathcal{D}c \exp i \int d^4x \mathcal{L}_{eff}$	
$\mathcal{L}_{eff}$	$=$	$\mathcal{L}_{QCD} + \mathcal{L}_{g.f.} + \mathcal{L}_{FP}$	$\mathcal{L}_{QCD}$ = Quark-Gluon-Lagrangedichte $\mathcal{L}_{g.f.}$ = Eichfixierungs-Lagrangedichte $\mathcal{L}_{FP}$ = Geist-Lagrangedichte
Lorentz	Eichung		Axiale Eichung:
$\mathcal{L}_{g.f.}$	$=$	$-\frac{1}{\xi} \text{Tr}(\partial G)^2$	$\mathcal{L}_{g.f.} = -\frac{1}{\xi} \text{Tr}(nG)^2$ für $\xi \rightarrow 0$
$\mathcal{L}_{FP}$	$=$	$\partial c^* (\partial + g_s f G) c$	$\mathcal{L}_{FP} = 0$

Ableitung von $\mathcal{L}_{FP}$ in der Lorentz und der axialen Eichung:

The Fadeev-Popov Lagrangedichte ist gegeben durch (siehe Kapitel 4)

$$\mathcal{L}_{FP} = c_a^* M_{ab} c_b, \tag{6.25}$$

wobei c_a, c_b die Geistfelder bezeichnet, a, b die Farbindizes und M_{ab} die Fadeev-Popov Determinante. Letztere ist gegeben durch

$$M_{ab}(x, y) = \frac{\delta F^a[G_\alpha(x)]}{\delta \alpha^b(y)} \Big|_{\vec{\alpha}=0} . \quad (6.26)$$

F^a bezeichnet die Eichfixierungsbedingung. G_α ist das unter einer infinitesimalen Eichtransformation mit dem Eichparameter α transformierte Gluonfeld. Die QCD Lagrangedichte ist unter nicht-Ableschen $SU(3)$ Eichtransformationen invariant, und wir haben ($G_\mu^a = 2\text{Tr} T^a G_\mu$)

$$(G^\alpha)_\mu^a = G_\mu^a - f_{abc} G_\mu^b \alpha^c + \frac{1}{g_S} \partial_\mu \alpha^a + \mathcal{O}(\alpha^2) . \quad (6.27)$$

(i) Lorentz Eichung: Wir haben die Eichfixierungsbedingung $\partial G = f$, im Detail

$$\partial^\mu (G^\alpha)_\mu^a - f^a = \underbrace{(\partial^\mu G_\mu^a - f^a)}_{=0} - \underbrace{f_{abc} \partial^\mu G_\mu^b \alpha^c + \frac{1}{g_S} \partial^2 \delta_{ab} \alpha^b}_{\frac{1}{g_S} \int d^4 y \{ \partial^2 \delta_{ab} + g_S f_{abc} \partial^\mu G_\mu^c \} \delta_4(x-y) \alpha^b(y)} . \quad (6.28)$$

Und wir erhalten für die Fadeev-Popov Determinante

$$M_{ab}(x, y) = \frac{1}{g_S} [\partial^2 \delta_{ab} + g_S f_{abc} \partial^\mu G_\mu^c] \delta_4(x - y) . \quad (6.29)$$

In nicht-abelschen Eichtheorien hängt die Fadeev-Popov Determinante manifest von dem Eichfeld G ab. In Abelschen Eichtheorien ist die Fadeev-Popov Determinante unabhängig von dem Eichfeld ($f_{abc} \equiv 0$) und damit ineffektiv, so daß sie in der effektiven Lagrangedichte vernachlässigt werden kann.

Axiale Eichung: Die Eichfixierungsbedingung ist durch $nG = 0$ gegeben, wobei n_μ ein Vierer-Vektor mit $n^2 = \pm 1, 0$ ist. Wir erhalten dann für das eichtransformierte Gluonfeld

$$\begin{aligned} n(G^\alpha)^a &= \underbrace{nG^a}_{=0} - f_{abc} \underbrace{nG^b}_{=0} \alpha^c + \frac{1}{g_S} n \partial \alpha^a \\ &= \frac{1}{g_S} \int d^4 y \delta_{ab} n \partial \delta_4(x - y) \alpha^b(y) . \end{aligned} \quad (6.30)$$

Die Fadeev-Popov Determinante lautet

$$M_{ab}(x, y) = \frac{1}{g_S} n_\mu \partial^\mu \delta_{ab} \delta_4(x - y) . \quad (6.31)$$

Sie ist unabhängig vom Eichfeld G und damit ineffektiv, so daß sie in der effektiven Lagrangedichte vernachlässigt werden kann.

6.3 Asymptotische Freiheit

Siehe hierzu den Aufschrieb in der Vorlesung und Kapitel 8.6 und 8.8 in Pierre Ramon, "Field Theory: A Modern Primer", Frontiers in Physics. Wir finden also

$$\alpha_S(Q^2) = \frac{\alpha_S(\mu^2)}{1 + \frac{33-2N_F}{12} \frac{\alpha_S(\mu^2)}{\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \quad (6.32)$$

Mit wachsendem Q^2 verschwindet die effektive Farbladung. Dies ist bekannt als asymptotische Freiheit. (Nicht-abelsche $SU(3) : N_F \leq 16$.) Dies ist eine Folge der nicht-abelschen Eichbosonschleifen. Dies steht im Gegensatz zur $U(1)$ (und allen anderen Theorien). [Politzer '73, Gross+Wilczek '73]

Bei großen Abständen können wir uns nicht mehr auf die Störungstheorie verlassen. Das heißt, die Zustände, auf welche wir die Störungstheorie angewandt haben, haben nur bei kleinen Abständen eine Bedeutung, wo sie asymptotisch frei werden. Bei großen Abständen wird die Kopplung jedoch so groß, daß diese Zustände die Wechselwirkungsregion nur in Form von zusammengesetzten Zuständen verlassen können, die neutral gegenüber der langreichweitigen Eichkraft sind. Diese neutralen oder Singulettzustände unterliegen immer noch Multipolwechselwirkungen. Diese sind jedoch kurzreichweitig und ändern nicht die Natur der zusammengesetzten Zustände. Dies nennt man *Confinement Hypothese*. Sie besagt, daß in einer asymptotisch freien Theorie nur Singulettzustände der Eichkraft asymptotische Zustände bilden können. In der QCD bilden z.B. Protonen, Neutronen, π -Mesonen etc. die Singuletts der Farbkraft. Skalenparameter der QCD: Die Quantentheorie führt in die unskalierte klassische Chromo-Dynamik (für $m_q = 0$) über die Renormierung eine Skala ein: Die Kopplungskonstante ist bei einem gegebenen Abstand gegeben durch:

$$\underbrace{\alpha_s}_{\text{experimentell bestimmt}} = \alpha_s(\mu^2)$$

Wenn man also den Wert von α_s an einer bestimmten Skala durch Vergleich mit dem Experiment kennt, dann weiß man auch, ab welcher Skala Störungstheorie nicht mehr gültig ist. Eine Reformulierung führt auf

$$\frac{1}{\alpha_S(Q^2)} = \frac{1}{\alpha_S(\mu^2)} - \underbrace{\frac{33-2N_F}{12\pi} \ln \mu^2}_{\equiv \frac{33-2N_F}{12\pi} \ln \frac{1}{\Lambda^2}} + \frac{33-2N_F}{12\pi} \ln Q^2 \quad (6.33)$$

Und damit

$$\alpha_S(Q^2) = \frac{12\pi}{(33-2N_F) \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \quad (6.34)$$

Mit dem Confinement-Radius $\Lambda^{-1} \sim \text{fm}$ haben wir

$$\Lambda \sim 100 - 300 \text{ MeV} \quad (6.35)$$

Und $\frac{\alpha_S(Q^2)}{\pi} \leq 10^{-1}$ für $Q^2 \geq 2 \text{ GeV}^2$. Dies ist der Bereich, in dem Störungstheorie angewandt werden kann.

Man kann die Strahlungskorrekturen zur effektiven Kopplungskonstante in höheren Ordnungen der Störungstheorie berechnen. Das Ergebnis wird in Form des Renormierungsgruppen-Zugangs ausgedrückt. Die Renormierungsgruppengleichung

$$\mu^2 \frac{\partial \alpha_S(\mu^2)}{\partial \mu^2} = \beta(\alpha_S(\mu^2)) \quad \text{with } \beta(\alpha_S) = -\beta_0 \frac{\alpha_S^2}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_S^3) \quad (6.36)$$

hat die Lösung

$$\ln \frac{Q^2}{\mu^2} = \int_{\alpha_S(\mu^2)}^{\alpha_S(Q^2)} \frac{d\alpha_S}{\beta(\alpha_S)} = -\frac{\pi}{\beta_0} \left[\frac{1}{\alpha_S(\mu^2)} - \frac{1}{\alpha_S(Q^2)} \right] \quad (6.37)$$

und damit

$$\boxed{\alpha_S(Q^2) = \frac{\alpha_S(\mu^2)}{1 + \beta_0 \frac{\alpha_S(\mu^2)}{\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}} \quad \text{with } \beta_0 = \frac{33 - 2N_F}{12}} \quad (6.38)$$

Die Renormierungsgruppengleichung bestimmt das asymptotische Verhalten der laufenden Kopplung. Auch die höheren Ordnungen sind bestimmt worden:

$$\begin{aligned} \beta(\alpha_S) &= -\frac{\alpha_S^2}{\pi} \left[\beta_0 + \beta_1 \frac{\alpha_S}{\pi} + \beta_2 \left(\frac{\alpha_S}{\pi} \right)^2 \right] \\ \beta_1 &= \frac{153 - 19N_F}{24} \quad \beta_2 = \frac{1}{128} \left[2857 - \frac{5033}{9} N_F + \frac{325}{27} N_F^2 \right] \\ \alpha_S(Q^2) &= \frac{\pi}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \left\{ 1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}}{\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Renormierungsschemata

Wir haben für den inversen Fermionpropagator inklusive höherer Ordnungskorrekturen (d.h. der Selbstenergie)

$$S^{-1} = \not{p} \left[1 - \tilde{\Sigma}(p) \right], \quad (6.40)$$

wobei $\tilde{\Sigma}$ die Selbstenergie bezeichnet, die in dimensionaler Regularisierung ($n = 4 - 2\epsilon$) durch

$$\tilde{\Sigma}(p) = \frac{4}{3} \frac{g_S^2}{(4\pi)^{2-\epsilon}} (\mu f)^{2\epsilon} \frac{\Gamma(\epsilon)}{(-p^2)^\epsilon} 2(1 - \epsilon) B(2 - \epsilon, 1 - \epsilon) \quad (6.41)$$

gegeben ist. In dimensionaler Regularisierung haben wir die starke Kopplungskonstante durch $g_S^2 \rightarrow g_S^2 (\mu f)^{2\epsilon}$ ersetzt, wobei f eine beliebige Konstante ist, um die Wirkung in $n = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen dimensionslos zu machen. Nach Entwicklung in ϵ erhalten wir

$$S^{-1}(p) = \not{p} \left\{ 1 - \frac{4}{3} \frac{g_S^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{-p^2}{(\mu f)^2} + 1 + \ln 4\pi - \gamma_E \right] \right\}. \quad (6.42)$$

Bei Verwendung von multiplikativer Renormierung haben wir folgende Beziehung zwischen dem nackten und dem renormierten Propagator

$$S^{-1}(p) = Z_\Psi^{-1} S_R^{-1}(p). \quad (6.43)$$

Wir schauen uns im folgenden verschiedene Renormierungsschemata an:

(i) Dyson Renormierungsschema

Das Schema ist durch die folgenden Bedingungen charakterisiert

$$\left. \begin{aligned} f &= 1 \\ S_R^{-1} &= \not{p} \text{ für } \mu^2 = -p^2 \end{aligned} \right\} S^{-1}(p) = \not{p} \left[1 - \tilde{\Sigma}(\mu) \right] \left[1 - \tilde{\Sigma}(p) + \tilde{\Sigma}(\mu) \right] . \quad (6.44)$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Z_\Psi^{-1} &= 1 - \frac{4}{3} \frac{g_S^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E + 1 \right] \\ S_R^{-1} &= \not{p} \left[1 + \frac{4}{3} \frac{g_{S,MOM}^2}{16\pi^2} \ln \frac{-p^2}{\mu^2} \right] , \end{aligned} \quad (6.45)$$

wobei *MOM* für “momentum subtraction” steht.

Die Kopplung/Ladung hängt vom Renormierungsschema ab.

(ii) 't Hooft: Minimal Subtraction (MS)

Hier fordern wir

$$\begin{aligned} f &= 1 \\ Z_\Psi^{-1} &\text{ nimmt nur den } \frac{1}{\epsilon} \text{ Pol weg.} . \end{aligned} \quad (6.46)$$

Wir fordern also für $S^{-1}(p)$

$$S^{-1}(p) = \not{p} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{g_S^2}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \right] \left\{ 1 - \frac{4}{3} \frac{g_S^2}{16\pi^2} \left[-\ln \frac{-p^2}{\mu^2} + \ln 4\pi - \gamma_E + 1 \right] \right\} . \quad (6.47)$$

Die Lösung ist

$$\begin{aligned} Z_\Psi^{-1} &= 1 - \frac{4}{3} \frac{g_S^2}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \\ S_R^{-1} &= \not{p} \left\{ 1 - \frac{4}{3} \frac{g_{S,MS}^2}{16\pi^2} \left[-\ln \frac{-p^2}{\mu^2} + \ln 4\pi - \gamma_E + 1 \right] \right\} . \end{aligned} \quad (6.48)$$

(iii) Modified Minimal Subtraction ($\overline{\text{MS}}$)

Wir fordern

$$f = \exp \left[-\frac{1}{2} (\ln 4\pi - \gamma_E) \right] . \quad (6.49)$$

Das Ziel ist, alle trivialen Konstanten wegzunehmen. D.h. wir fordern weiter

$$S^{-1}(p) = \not{p} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{g_S^2}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \right] \left[1 - \frac{4}{3} \frac{g_S^2}{16\pi^2} \left(1 - \ln \frac{-p^2}{\mu^2} \right) \right] . \quad (6.50)$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$Z_\Psi^{-1} = 1 - \frac{4}{3} \frac{g_S^2}{16\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \quad (6.51)$$

$$S_R^{-1}(p) = \not{p} \left\{ 1 - \frac{4}{3} \frac{g_{S,\overline{\text{MS}}}^2}{16\pi^2} \left[1 - \ln \frac{-p^2}{\mu^2} \right] \right\} . \quad (6.52)$$

Die Beziehung zwischen MS and $\overline{\text{MS}}$ Schema ist gegeben durch:

$$\underline{\text{MS}} \leftrightarrow \overline{\text{MS}} : \mu_{\text{MS}}^2 \leftrightarrow \mu_{\overline{\text{MS}}}^2 \exp[-\ln 4\pi + \gamma_E] . \quad (6.53)$$

Und für den Skalenparameter (siehe Nebenrechnung)

$$\Lambda_{\text{MS}}^2 = \mu^2 \exp \left\{ -\frac{4\pi^2}{\beta_0 g_{S,\text{MS}}^2} + \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \ln(4\pi^2/(\beta_0 g_{S,\text{MS}}^2)) \right\} \quad (6.54)$$

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^2 = \mu^2 \exp \left\{ -\frac{4\pi^2}{\beta_0 g_{S,\overline{\text{MS}}}^2} + \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \ln(4\pi^2/(\beta_0 g_{S,\overline{\text{MS}}}^2)) \right\} . \quad (6.55)$$

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = \Lambda_{\text{MS}} \exp \left\{ \frac{\ln 4\pi - \gamma_E}{2} \right\} \quad (6.56)$$

β_0, β_1 sind unabhängig vom Renormierungsschema (nicht $\beta_{i \geq 2}$) und $\alpha_{S,\overline{\text{MS}}}(Q^2) > \alpha_{S,\text{MS}}(Q^2)$.

Quark masses

Wir betrachten nun die Quark-Selbstenergie, die gegeben ist durch

$$\Sigma(\not{p} = m) = m C_F \frac{\alpha_S}{\pi} \Gamma(1 + \epsilon) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\epsilon \left(\frac{3}{4\epsilon} + 1 \right) . \quad (6.57)$$

Die Polmasse ist gegeben durch

$$m = m_0 + \Sigma(\not{p} = m) \quad (6.58)$$

und die $\overline{\text{MS}}$ Masse durch

$$\overline{m}(\mu^2) = m_0 + \delta\overline{m} , \quad (6.59)$$

wobei

$$\delta\overline{m} = m C_F \frac{\alpha_S}{\pi} \Gamma(1 + \epsilon) (4\pi)^\epsilon \frac{3}{4\epsilon} . \quad (6.60)$$

Die Beziehung zwischen der Polmasse und der $\overline{\text{MS}}$ Masse ist

$$\begin{aligned} \overline{m}(\mu^2) &= m - [\Sigma(\not{p} = m) - \delta\overline{m}] = m \left[1 - C_F \frac{\alpha_S}{\pi} \left(\frac{3}{4} \ln \frac{\mu^2}{m^2} + 1 \right) \right] \\ &= m \left[1 - C_F \frac{\alpha_S}{\pi} \right] \left[1 - \frac{3}{4} C_F \frac{\alpha_S}{\pi} \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right] , \end{aligned} \quad (6.61)$$

also

$$\begin{aligned}
\overline{m}(m^2) &= m \left[1 - C_F \frac{\alpha_S(m^2)}{\pi} \right] \\
\overline{m}(\mu^2) &= \overline{m}(m^2) \left[1 - \frac{\alpha_S}{\pi} \ln \frac{\mu^2}{m^2} \right]
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Die Renormierungsgruppengleichung lautet

$$\mu^2 \frac{\partial \overline{m}(\mu^2)}{\partial \mu^2} = -\gamma_m(\alpha_S(\mu^2)) \overline{m}(\mu^2) , \tag{6.63}$$

wobei

$$\gamma_m(\alpha_S) = \frac{\alpha_S}{\pi} + \mathcal{O}(\alpha_S^2) \tag{6.64}$$

die anomale Dimension bezeichnet. Mit

$$\alpha_S(\mu^2) = \frac{\pi}{\beta_0 \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2}} \tag{6.65}$$

ist die Lösung gegeben durch

$$\overline{m}(\mu^2) = \overline{m}(m^2) \exp \left\{ \frac{-1}{\beta_0} \int_{m^2}^{\mu^2} \frac{dQ^2}{Q^2 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \right\} = \overline{m}(m^2) \left[\frac{\alpha_S(\mu^2)}{\alpha_S(m^2)} \right]^{\frac{1}{\beta_0}} . \tag{6.66}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
\overline{m}(\mu^2) &= \hat{m} [\alpha_S(\mu^2)]^{\frac{1}{\beta_0}} \\
\hat{m} &= \overline{m}(m^2) [\alpha_S(m^2)]^{-\frac{1}{\beta_0}}
\end{aligned} \tag{6.67}$$

Mit wachsendem $\mu^2 (R \rightarrow 0)$ verschwindet die effektive Quarkmasse.

Beispiele:

Bottom Quark: $m_b = 4.8 \text{ GeV}$.

$$\overline{m}(m_b^2) = 4.2 \text{ GeV} \quad \overline{m}(M_Z^2) = 2.9 \text{ GeV} . \tag{6.68}$$

Charm Quark: $m_c = 1.6 \text{ GeV}$.

$$\overline{m}(m_c^2) = 1.2 \text{ GeV} \quad \overline{m}(M_Z^2) = 0.6 \text{ GeV} . \tag{6.69}$$

Leichte Quarks:

$$\overline{m}_u(1 \text{ GeV}^2) \sim 5 \text{ MeV} \quad \text{Gasser, Leutwyler} \quad (6.70)$$

$$\overline{m}_d(1 \text{ GeV}^2) \sim 8 \text{ MeV} \quad (6.71)$$

$$\overline{m}_s(1 \text{ GeV}^2) \sim 200 \text{ MeV} . \quad (6.72)$$

Die höheren Ordnungskorrekturen sind gegeben durch:

$$\overline{m}(m^2) = \frac{m}{1 + C_F \frac{\alpha_S(m^2)}{\pi} + K \left(\frac{\alpha_S(m^2)}{\pi} \right)^2} \quad \text{Gray, Broadhurst, Grafe, Schilcher} \quad (6.73)$$

where

$$K_t \sim 10.9 \quad K_b \sim 12.4 \quad K_c \sim 13.4 . \quad (6.74)$$

Und wir haben

$$\overline{m}(\mu^2) = \overline{m}(m^2) \frac{c[\alpha_S(\mu^2)/\pi]}{c[\alpha_S(m^2)/\pi]} , \quad (6.75)$$

mit

$$\begin{aligned} c(x) &= \left(\frac{9}{2} x \right)^{4/9} [1 + 0.895x + 1.371x^2 + 1.952x^3] & m_s < \mu < m_c \\ c(x) &= \left(\frac{25}{6} x \right)^{12/25} [1 + 1.014x + 1.389x^2 + 1.091x^3] & m_c < \mu < m_b \\ c(x) &= \left(\frac{23}{6} x \right)^{12/23} [1 + 1.175x + 1.501x^2 + 0.1725x^3] & m_b < \mu < m_t \\ c(x) &= \left(\frac{7}{2} x \right)^{4/7} [1 + 1.389x + 1.793x^2 - 0.6834x^3] & m_t < \mu \end{aligned} \quad (6.76)$$

Chetyrkin; Larin, van Ritbergen, Vermaseren .