Lösung zur Aufgabe 4, Blatt 10

a) $v_i^2 = gR/\alpha_i$, $i=1,2$ (da $E_i=\mu\frac{v_i^2}{2} - \alpha/R_i = -\alpha/2R_i$, $\alpha=Gmm_E$, $Gm_E=gR^2$, $m\ll m_E$).

Hohmann-Ellipse: $a=\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)R$, $a\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)R - \alpha_1 R=$

$= \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)R$, $\varepsilon=\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, i.e. $1-\varepsilon^2=\frac{4\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+ \alpha_2)^2}$.

Geschwindigkeit im Apo- und Perigäum:

$v_A^2 = v_{Peri}^2 = 2gR\,\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}$, $v_B{}^2= v_{Apo}^2= 2gR\,\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\,\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}$

(Aus Drehimpuls $\rightarrow v_\phi^2$ (Komponente in polar ϕ-Richtung)

$v_\phi^2=b^2\, G(m_E+m)/ar^2 \approx a(1-\varepsilon^2)g(R/r)^2$, $r_{Peri}=R_1, r_{Apo}=R_2$.)

$\Delta v_A^H \equiv v_{Peri} - v_1 = \sqrt{2gR}\ \ (\sqrt{2/(\alpha_1/\alpha_2+1)} - 1)/\sqrt{2\alpha_1}\ \ >0$,

$\Delta v_B^H \equiv v_2 - v_{Apo}= \sqrt{2gR}\ \ (1- \sqrt{2/(1+\alpha_2/\alpha_1)}\,)/\sqrt{2\alpha_2}\ \ >0$.

Beschleunigung bei A und B nötig. Flugzeit von A nach B:

$t_{AB}^H = T/2 = \pi\, a^{3/2}\, \sqrt{\mu/\alpha} \approx \sqrt{2gR}\,(a/R)^{3/2}\pi/\sqrt{2}\,g =$

$=\sqrt{2gR}\ (\alpha_1+\alpha_2)^{3/2}\ \pi/4g$.

b) Für gesuchte Ellipse: $v^2(r) = 2(gR^2/r + E/\mu)$, $E<0$. Für $v_A=v(R_1)=v_1=\sqrt{gR/\alpha_1}$ *und* $v_B=v(R_2)=v_2=\sqrt{gR/\alpha_2} \rightarrow 2E/\mu=-gR/\alpha_1= -gR/\alpha_2 \rightarrow \alpha_1=\alpha_2$, also unmöglich, da $\alpha_1\neq\alpha_2$.

Kreuzung bei B mit $v_B=v_2$, also nur $E/\mu=-gR/2\alpha_2<0$. Große Halbachse $a=\alpha/2|E|\approx R\alpha_2=R_2$. Bei Berührung mit R_1 Bahn:

$R_1=r_{Peri}=a(1-\varepsilon)=(1-\varepsilon)\alpha_2 R$, also $1-\varepsilon=\alpha_1/\alpha_2$ oder $0<\varepsilon=1-\alpha_1/\alpha_2<1$.

c) Bei Berührpunkt A Beschleunigung nötig:

$\Delta v_A=v_{Peri}-v_1= \sqrt{2gR}\,(\sqrt{2-\alpha_1/\alpha_2}-1)/\sqrt{2\alpha_1}>0$.

Für die gefundene Ellipse ($a=R_2, \varepsilon=1-\alpha_1/\alpha_2$) erreicht man von A aus B genau nach Durchlaufen eines Viertels der Ellipse, also hat der zweite Brennpunkt F_2 von B aus auch die Entfernung a. Also $\cos\gamma=a\varepsilon/a =\varepsilon$. Damit wird wegen $\beta+\gamma=\pi/2$

$\Delta v_B=2v_2\ \sin\beta/2 = v_2\ \sqrt{2(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})}$

$\Delta v_B^2 = 2gR\ 2(1-\sqrt{(2-\alpha_1/\alpha_2)\alpha_1/\alpha_2}\,)/2\alpha_2$.

Flugzeit von A nach B: $t_{AB}=T/4 =$

$=\sqrt{2gR}\ \ \alpha_2\sqrt{\alpha_2/2}\ \ \pi/2g$.

$t_{AB}=t_{AB}^H\ \ \alpha_2\sqrt{2\alpha_2/(\alpha_1+\alpha_2)}\,/(\alpha_1+\alpha_2)$.

Werte für $\alpha_1=2$, $\alpha_2=8$:

$\Delta v_A^H/\Delta v_A \approx .82$

$\Delta v_B^H/\Delta v_B \approx .45$, $\Delta v_A^H =11.2\ 0.13\approx1.48$ km/s,

$\Delta v_B^H = 11.2\ 0.09 \approx1.03$ km/s.

$t_{AB}/t_{AB}^H \approx 3.2/\sqrt{10} \approx 1.01$.

$t_{AB}^H \approx 11.2\ \pi/4\ \sqrt{10}\ \ 10^3$ s $= (2.78)^2$h $= 7.73$ h.