Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Übung: Dr. M. Sekulla

Präsenzübung

Besprechung: Di, 19.04.2016

Webseite zur Vorlesung: `http://www.itp.kit.edu/~sekulla/MPFI/`

Übungen: Di, 15:45-17:15 Uhr, Lehmann-Hörsaal

Aufgabe 1: Vereinfachen und Kürzen

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\frac{(a^2-b^2)^{-2}}{(a+b)^{-3}} \cdot \frac{(a-b)^2}{a+b}$,

(b) $\log_e\left(e^{3x}e^{5x}\right) \equiv \ln\left(e^{3x}e^{5x}\right)$,

(c) $\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\tan(\varphi)$.

Aufgabe 2: Differenzieren

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen nach x:

(a) $f(x) = a \cdot \cos(x) + \sin(bx + c)$,

(b) $f(x) = (3 + 2x - x^2)\, e^x$,

(c) $f(x) = (3 + 4x - x^2)^{1/2}$,

(d) $f(x) = x^x$.

Aufgabe 3: Kurvendiskussion

Berechnen Sie die lokalen Extrema (Minimum und Maximum) der Funktion $g(x)$:

$$g(x) = x^3 - 2x^2 + 4\,.$$

Aufgabe 4: Reihen und Reihenentwicklung

Die Taylorreihe einer Funktion $f(x)$ am Ursprung $x = 0$ ist für die ersten drei Terme gegeben durch:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2\,,$$

wobei $f'(0)$ und $f''(0)$ die erste bzw. zweite Ableitung von $f(x)$ ausgewertet an der Stelle $x = 0$ bezeichnen. Bestimmen Sie damit die Taylorreihen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \sin(x)$,

(b) $f(x) = e^x$.

Aufgabe 5: Integrieren

(a) Bestimmen Sie die Stammfunktion (das unbestimmte Integral) $F(x)$ zu folgender Funktion:

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 5x + 1}{x} \, .$$

(b) Bestimmen Sie außerdem die folgenden bestimmten Integrale:

(i) $F = \int_1^2 dx \ln(x) \int_{\ln(x)}^{\infty} dy\, e^{-y}$,

(ii) $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2} dx \quad$ für $a > 0$,

(iii) $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx \quad$ für $a > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie das Gauß'sche Integral $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ für $a > 0$.

Aufgabe 6: Lineare Algebra

Gegeben sind zwei 2×2 Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie

(a) die Differenz $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

(b) die Spur $\mathrm{tr}\,[\mathbf{AB} - \mathbf{BA}]$,

(c) die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ von $\mathbf{A}$.

Aufgabe 7: Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwertgleichung einer quadratischen $n \times n$–Matrix $\mathbf{M}$ lautet $\mathbf{M}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, wobei der n–Vektor $\vec{x}$ einen möglichen Eigenvektor und der Skalar λ einen zugehörigen Eigenwert bezeichnen. Die Lösungen für λ ergeben sich durch das Nullsetzen des charakteristischen Polynoms:

$$\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbb{1}) = 0 \quad ,$$

wobei $\mathbb{1}$ die n-dimensionale Einheitsmatrix ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte, und falls möglich die Eigenvektoren, zu folgender 2×2–Matrix $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} .$$