KIT **SoSe 2016**

Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 1

Besprechung: Di, 26.04.2016

Webseite zur Vorlesung: `http://www.itp.kit.edu/~sekulla/MPFI/`

Übungen: Di, 15:45-17:15 Uhr, Lehmann-Hörsaal

Aufgabe 1: Vereinfachen und Kürzen

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{x-y} - \sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$,

(b) $\log_{10}\left(\frac{10^x}{10^3}\right)$,

(c) $\frac{1}{1+\tan(\varphi)} + \frac{1}{1+\cot(\varphi)}$.

Lösung der Aufgabe 1

(a)

$$\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{x-y} - \sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{x-y} - \frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{x}}{x-y} - \frac{\sqrt{xy}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y}$$
$$= \frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}-x\sqrt{x}+y\sqrt{x}-x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{x-y} = 0$$

(b) $\log_{10}\left(\frac{10^x}{10^3}\right) = \log_{10}\left(10^{x-3}\right) = x-3$

(c) $\frac{1}{1+\tan(\varphi)} + \frac{1}{1+\cot(\varphi)} = \frac{1}{1+\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}} + \frac{1}{1+\frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}} = \frac{\cos(\varphi)}{\cos(\varphi)+\sin(\varphi)} + \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\varphi)+\cos(\varphi)} = 1$

Aufgabe 2: Differenzieren

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen nach x:

(a) $f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 - 5x + \ln(x) + c$

(b) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)\tan(x)$,

(c) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)$,

(d) $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$.

Aufgabe 3: Reihen und Reihenentwicklung

Die Taylorreihe einer Funktion $f(x)$ am Ursprung $x = 0$ ist für die ersten drei Terme gegeben durch:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2\,,$$

wobei $f'(0)$ und $f''(0)$ die erste bzw. zweite Ableitung von $f(x)$ ausgewertet an der Stelle $x = 0$ bezeichnen. Bestimmen Sie damit die Taylorreihen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \cos(x)$,

(b) $f(x) = \ln(1 - x)$.

Aufgabe 4: Integrieren

(a) Bestimmen Sie die Stammfunktion (das unbestimmte Integral) $F(x)$ zu folgenden Funktionen:

- (i) $f(x) = e^{\lambda x}\sin(3x)dx$,
- (ii) $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$.

(b) Bestimmen Sie außerdem die folgenden bestimmten Integrale:

- (i) $F = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,
- (ii) $F(a,n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx \quad$ für $a > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie das Gauß'sche Integral $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad$ für $a > 0$.

Aufgabe 5: Drehungen

Eine Drehung um den Winkel φ in der Ebene im $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch eine Matrix:

$$\mathbf{R}_2\left(\varphi\right) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}\,, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Zeigen Sie, dass

(a) die Drehmatrizen kommutieren $\mathbf{R}_2\left(\varphi_1\right)\mathbf{R}_2\left(\varphi_2\right) = \mathbf{R}_2\left(\varphi_2\right)\mathbf{R}_2\left(\varphi_1\right)$,

(b) das Produkt $\mathbf{R}_2\left(\varphi_1\right)\mathbf{R}_2\left(\varphi_2\right)$ wieder zu einer Drehmatrix $\mathbf{R}_2\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)$ führt,

(c) $\det(\mathbf{R}_2\left(\varphi\right)) = 1$.

Aufgabe 6: Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwertgleichung einer quadratischen $n\times n$–Matrix $\mathbf{M}$ lautet $\mathbf{M}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, wobei der n–Vektor $\vec{x}$ einen möglichen Eigenvektor und der Skalar λ einen zugehörigen Eigenwert bezeichnen. Die Lösungen für λ ergeben sich durch das Nullsetzen des charakteristischen Polynoms:

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbb{1}) = 0\ ,$$

wobei $\mathbb{1}$ die n-dimensionale Einheitsmatrix ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte, und falls möglich die Eigenvektoren, zu folgender 3×3–Matrix $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 7: Beschleunigte schiefe Ebene

Ein Massepunkt mit den Koordinaten (x, z) gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene, die in x-Richtung mit der konstanten Beschleunigung a beschleunigt wird, $s(t) = at^2/2$. Die Neigung α der schiefen Ebene ist konstant.

(a) Stellen sie die Zwangsbedingung $A(x, z, t) = 0$ auf indem Sie die x-Koordinate und die z-Koordinate des Massepunktes in Relation setzen. Nutzen Sie hierfür das rechtwinklige Dreieck, deren Hypotenuse die Strecke zwischen Massepunkt und $s(t)$ ist.

(b) Berechnen Sie nun die Zwangskraft komponentenweise ($i = x, z$) mittels

$$Z_i(x, z, t) = \lambda \cdot \frac{\partial A(x, z, t)}{\partial x_i} .$$

(c) Stellen Sie nun die Lagrangegleichungen 1.Art für den Massepunkt auf. Nehmen Sie dabei an, dass die Schwerkraft $F = -mg$ in z-Richtung auf die Masse wirkt.

(i) Um die λ zu bestimmen, differenzieren Sie die Zwangsbedinung $A(x, z, t)$ zweimal nach der Zeit und setzen Sie diese dann in die vorher bestimmte Bewegungsgleichung ein.

(d) Lösen Sie nun die Bewegungsgleichungen. Beginnen Sie mit $x(t)$ ($\dot{x}(t = 0) = v_0$, $x(t = 0) = x_0$) und verwenden Sie dann die Zwangsbedingung um $z(t)$ zu bestimmen.