KIT **SoSe 2016**

Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 10

Besprechung: Di, 28.06.2016

Webseite zur Vorlesung: `http://www.itp.kit.edu/~sekulla/MPFI/`

Übungen: Di, 15:45-17:15 Uhr, Lehmann-Hörsaal

Aufgabe 28: Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit Realteil $\mathrm{Re}(z) = x$, Imaginärteil $\mathrm{Im}(z) = y$ und $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ kann äquivalent in der exponentiellen Schreibweise $z = re^{\mathrm{i}\varphi} = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin\varphi)$ dargestellt werden. Dabei gelten die Relationen ($r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in [0, 2\pi)$):

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

$$\arg(z) = \varphi = \begin{cases} \varphi' \text{ für } \varphi' \geq 0 \\ \varphi' + 2\pi \text{ für } \varphi' < 0 \end{cases}, \qquad \text{mit } \varphi' = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \text{ für } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) \text{ für } y < 0 \end{cases}.$$

Die trigonometrischen Funktionen und Hyperbelfunktionen können ebenfalls mittels Exponentialfunktionen dargestellt werden:

$$\sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}\right), \qquad \sinh(z) = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right),$$
$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}\right), \qquad \cosh(z) = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right).$$

(a) Vervollständigen Sie die Tabelle:

$z = x + \mathrm{i}y$	$1 + 1\mathrm{i}$	$3 - 4\mathrm{i}$	$-3 + 2\mathrm{i}$			$5 - \ldots\mathrm{i}$	$\cdots - \mathrm{i}$
$r = \|z\|$				2	2	13	
$\varphi = \arg(z)$				3π	$-\pi/3$		$5\pi/4$

(b) Vereinfachen Sie die folgenden Terme und schreiben Sie das Ergebnis jeweils in der Form $z = r\exp(\mathrm{i}\varphi)$:

(i) $z = \frac{1+\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$,

(ii) $z = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{i}}}$.

(c) Geben Sie folgende Funktionen in der Form $f(z = x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ an:
   (i) $f(z) = z^2 + \frac{3}{2}$
   (ii) $f(z) = (z + z^*)^2 + (z - z^*)^3$
   (iii) $f(z) = \sin(z)$
   (iv) $f(z) = \tan(z)$

Hinweis: Benutzen Sie die Additionstheoreme:

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)\,,$$
$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)\,.$$

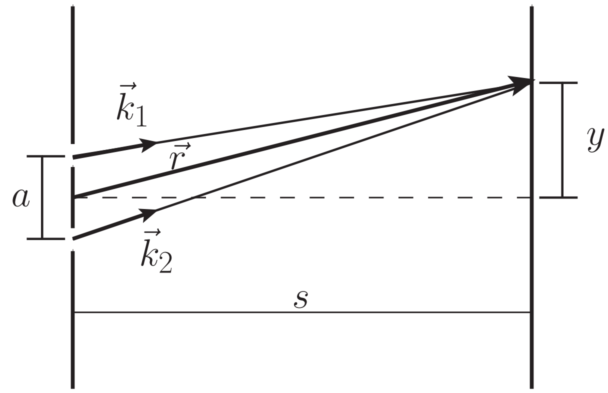
Aufgabe 29: Quantentheorie

(a) Eine Lichtquelle der Leistung 100 W sendet monochromatisches Licht der Wellenlänge $\lambda = 6{,}63 \times 10^{-5}$ cm aus. Bestimmen Sie die Anzahl der Lichtquanten, die in einer Sekunde emittiert werden. Benutzen Sie für die Energie eines Lichtquants $E_\gamma = \hbar\omega = 2\pi\hbar c/\lambda = hc/\lambda$, mit $c = 2,9979 \cdot 10^8$ m/s und $h = 6,6261 \cdot 10^{-34}$ Js, um schließlich die Leistung $P_\gamma = E_\gamma/t$ pro $t = 1$s zu bestimmen. Rechnen Sie dies in die Einheit W um und vergleichen Sie dann mit der Gesamtleistung der Lichtquelle um die Anzahl der Lichtquanten zu bestimmen.

(b) Strahlung der Wellenlänge $\lambda = 290$ nm trifft auf eine Metalloberfläche mit der Austrittsarbeit $W = 4{,}05$ eV. Welches Potential ist erforderlich, um die energiereichsten Photoelektronen zu stoppen? Benutzen Sie die Formel für den Photoelektrischen Effekt $E_e = \hbar\omega - W = hc/\lambda - W$, um die kinetische Energie E_e der austretenden Elektronen in der Einheit eV zu berechnen, mit $h = 6,6261 \cdot 10^{-34}$ Js $\hat{=}\, 4,1357 \cdot 10^{-15}$ eVs.

(c) Wie groß ist die de Broglie–Wellenlänge eines Elektrons mit einer Energie von 6 eV (nichtrelativistisch) bzw. mit einer Energie von 200 MeV (hochrelativistisch)? Für die de Broglie–Wellenlänge gilt $p = h/\lambda$. Bezüglich der Energien gilt nichtrelativistisch $E_{kin} = p^2/2m$ und hochrelativistisch $E_{kin} = pc$.

Aufgabe 30: Interferenz



Berechnen Sie die Intensität zweier interferierender ebener Wellen $E_1 = E_0 e^{i\left(\vec{k}_1.\vec{r}-\omega t\right)}$ bzw. $E_2 = E_0 e^{i\left(\vec{k}_2.\vec{r}-\omega t\right)}$ in einem Doppelspaltexperiment. Nehmen Sie an, der Spalt sei in z–Richtung unendlich lang ausgedehnt und betrachten Sie dann den Strahlengang in der xy–Ebene.

(a) Leiten Sie eine Bedingung für Maxima und Minima der Intensität her und nehmen Sie kurz Stellung bezüglich der Abhängigkeit in der darin enthaltenen Funktion $\cos^2(...)$. Die Intensität ist dabei gegeben als Quadrat der Amplitudensumme

$$I = \langle |E_1 + E_2|^2 \rangle \quad \text{wobei} \quad \langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t')dt'$$

(b) Stellen Sie sich vor, Sie sollen eine Positionsbestimmung eines Teilchens vornehmen, indem Sie den Spaltabstand a immer kleiner wählen, um die räumliche Koordinate beim Durchgang immer genauer festzulegen. Was geschieht mit dem Interferenzmuster?
Hinweis: Parametrisieren Sie zunächst die Wellenvektoren $\vec{k_1}$ und $\vec{k_2}$ bzw. den Vektor $\vec{r}$ (siehe Bild) durch die Parameter des Experiments. Die Normierung der Vektoren $\vec{k_1}$ und $\vec{k_2}$ ist so zu wählen, dass diese gleich lang sind. Man nimmt dann an, dass die Distanz s zwischen Blende und Schirm viel grösser ist als alle anderen Längen, z.B. a oder y, und dass der Winkel zwischen $\vec{k_1}$ und $\vec{k_2}$ sehr klein ist.