Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 11

Besprechung: Di, 05.07.2016

Webseite zur Vorlesung: `http://www.itp.kit.edu/~sekulla/MPFI/`

Übungen: Di, 15:45-17:15 Uhr, Lehmann-Hörsaal

Aufgabe 31: Kommutatoren

Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Kommutators der Operatoren A, B, C:

(a) Antisymmetrie:

$$[A, B] = -[B, A] \ ,$$

(b) (Bi-)Linearität:

$$[\lambda A + B, C] = \lambda [A, C] + [B, C] \ ,$$

(c) Jacobi-Identität:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \, ,$$

(d) Produktregel:

$$[A, BC] = [A, B]\, C + B\, [A, C] \ .$$

Aufgabe 32: Operatoren in der Ortsdarstellung

Orts- und Impulsoperator wirken in folgender Weise auf die Wellenfunktion im Ortsraum:

$$\vec{X}\psi(\vec{x}, t) = \vec{x}\psi(\vec{x}, t) \ , \qquad X_j\psi(\vec{x}, t) = x_j\psi(\vec{x}, t) \ ,$$
$$\vec{P}\psi(\vec{x}, t) = -\mathrm{i}\hbar\nabla\psi(\vec{x}, t) \ , P_j\psi(\vec{x}, t) = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\psi(\vec{x}, t) \ .$$

(a) Zeigen Sie in dieser Darstellung, dass folgende Relation gilt:

$$[X_j, P_k] = \mathrm{i}\hbar\delta_{jk}\,.$$

(b) Zeigen Sie analog für ein freies Teilchen ($H = \vec{P}^{\,2}/2m$):

$$[X_k, H] = \mathrm{i}\frac{\hbar}{m}P_k\,.$$

Hinweis: Um die Operatorrelationen zu beweisen benutzen Sie $[A, B]\,\psi\,(\vec{x}, t)$.

Aufgabe 33: Wellenpaket I

Ein freies Teilchen werde beschrieben durch eine Materiewelle der Form

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\hbar}\;\tilde{\psi}(p)\;\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(px - \varepsilon(p)\,t)\right\}\,.$$

Dies ist äquivalent mit der in der Vorlesung hergeleiteten Gleichung durch die Relationen $p = \frac{k}{\hbar}$ und $\varepsilon(p) = \omega(k)$. Nehmen Sie nun an, dass $\varepsilon(p) = p^2/2m$ und weiter dass $\tilde{\psi}(p)$ ein Gauß'sches Wellenpaket sei, beschrieben durch

$$\tilde{\psi}(p) = \tilde{\psi}_0 e^{-b^2(p-p_0)^2/\hbar^2}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion gegeben ist durch

$$\psi(x,t) = \tilde{\psi}_0\sqrt{\frac{\pi}{b^2 + it\hbar/2m}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p_0 x - \frac{p_0^2}{2m}\,t)\right\}\exp\left\{-\frac{(x - tp_0/m)^2}{4(b^2 + it\hbar/2m)}\right\}\,.$$

(b) Bestimmen Sie nun die Normierungskonstante $\tilde{\psi}_0$, so dass die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ folgenderweise normiert ist:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx|\psi\,(x,t)\,|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx\psi^*\,(x,t)\,\psi\,(x,t)\,\,.$$

(c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle X\rangle$, $\langle P\rangle$.
Hinweis: Der Erwartungswert eines Operators $\langle A\rangle$ wird im Ortsraum bestimmt durch

$$\langle A\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx = \psi^*\,(x,t)\,A\psi\,(x,t)\,\,.$$

(d) Berechnen Sie nun die Orts– und Impulsunschärfe ΔX bzw. ΔP. Was erhalten Sie für das Produkt $\Delta X \Delta P$?
Hinweis: Der Unschärfe eines Operators ΔA kann wie folgt berechnet werden:

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \,.$$

(e) Berechnen Sie nun den Erwartungswert der Energie $\langle \hat{H} \rangle$ für das obige Wellenpacket unter dem Einfluss eines Zentralpotentials $V(X) = mgX$, wobei der Hamiltonoperator durch $\hat{H} = \frac{P^2}{2m} + V(X)$ gegeben sei. Für den Erwartungswert der Energie gilt somit

$$\langle \hat{H} \rangle = \langle \frac{P^2}{2m} + mgX \rangle = \frac{1}{2m} \langle P^2 \rangle + mg \langle X \rangle \,.$$

Hinweis: Verwenden Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{(2n)!}{(4a)^n n!} \,.$$