**KIT** **SoSe 2016**

# Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Übung: Dr. M. Sekulla

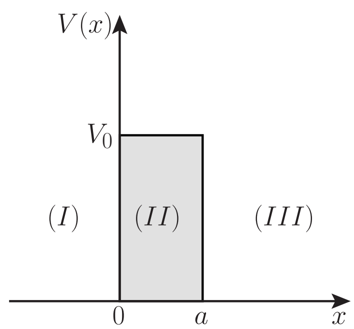
## Übungsblatt 12

Besprechung: Di, 12.07.2016

Webseite zur Vorlesung: `http://www.itp.kit.edu/~sekulla/MPFI/`

Übungen: Di, 15:45-17:15 Uhr, Lehmann-Hörsaal

### Aufgabe 34: Tunneleffekt

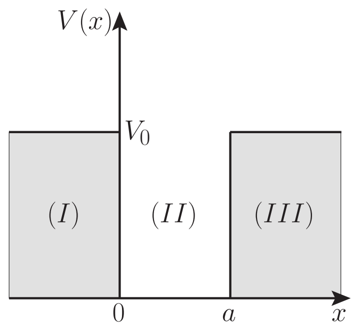



Betrachten Sie eine kastenförmige Potentialbarriere der Höhe $V_0$. Berechnen Sie die stationären Zustände eines Teilchens der Energie $E < V_0$, welches sich auf die Barriere zubewegt und bestimmen Sie dadurch den Transmissionskoeffizienten $t(E)$.
*Hinweis:* Gehen Sie dabei wie in der Vorlesung erläutert vor und benutzen Sie die folgenden Ansätze für die Wellenfunktion in den drei Bereichen $(I)$, $(II)$ und $(III)$:

$$\begin{aligned}\psi_I(x) &= e^{ikx} + re^{-ikx}\,,\\ \psi_{II}(x) &= pe^{\kappa x} + qe^{-\kappa x}\,,\\ \psi_{III}(x) &= te^{ik(x-a)}\end{aligned}$$

Verwenden Sie für die Randbedingungen zwischen den drei Bereichen nun die Stetigkeit der Wellenfunktion und deren Ableitung, um daraus die Koeffizienten $r, p, q, t$ zu bestimmen. Die Exponenten, mit den reellen Parametern $k$ und $\kappa$, der Funktionen $\psi_I(x)$, $\psi_{II}(x)$ und $\psi_{III}(x)$ zu können Sie mit der SGL ermitteln.

**Aufgabe 35: Potentialtopf**




Betrachten Sie ein Elektron in einem Kastenpotential, welches für $x < 0$ und $x > a$ die Höhe $V_0 > 0$ besitzt und dazwischen für $0 \leq x \leq a$ die Höhe $V_0 = 0$ (siehe Bild).

(a) Lassen Sie uns zunächst den Fall eines Kastenpotentials endlicher Tiefe betrachten, also $V_0 \not\to \infty$. Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

mit einer Strategie analog zum Problem der kastenförmigen Potentialbarriere in der vorherigen Aufgabe. Beschränken Sie sich dabei zunächst auf Energien $E < V_0$ und benutzen Sie den Ansatz

$$\begin{aligned} \psi_I(x) &= re^{\kappa x}\,, \\ \psi_{II}(x) &= pe^{ikx} + qe^{-ikx}\,, \\ \psi_{III}(x) &= te^{-\kappa x}\,, \end{aligned}$$

um die Normierbarkeit der Wellenfunktion zu gewährleisten. Die Lösung dieses Problems nach den diskreten Energiewerten wird Sie letztlich auf die transzendentale Gleichung $\tan(ka) = 2k\kappa/(k^2 - \kappa^2)$ führen. Die Lösung dieser Gleichung erfolgt in der Regel grafisch. Sie sollen an dieser Stelle jedoch abbrechen.

(b) Betrachten Sie uns nun den Fall eines Kastenpotentials unendlicher Tiefe, also $V_0 \to \infty$.

(i) Überlegen Sie sich auch für den Fall $V_0 \to \infty$ einen sinnvollen Ansatz für die stationäre Wellenfunktion $\psi(x)$ in den drei Bereichen. Finden Sie letztlich die stationäre Wellenfunktion $\psi_n(x)$, welche die Schrödingergleichung in diesem Fall löst, und die zugeörigen Energieeigenwerte $E_n$.
*Hinweis:* Die Darstellung der Differenz von komplexen Exponentialfunktionen als Sinusfunktion kann hier nützlich sein, um eine periodische Abhängigkeit der Koeffizienten von einem ganzzahligen Parameter $n$ abzuleiten. Um den korrekten Vorfaktor zu bestimmen, nutzen Sie die Normierung der Funktion aus.

*Lösung:*

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) .$$

(ii) Vergleichen Sie Ihren Ansatz und Ihre Lösung zu den Resultaten aus Teilaufgabe a), indem Sie in den Ansätzen der Wellenfunktion und der resultierenden transzendentalen Gleichung aus Teilaufgabe a) (i) den Grenzfall $V_0 \to \infty$ betrachten.

(iii) Berechnen Sie nun Ortsmittelwert und –unschärfe, $\langle x \rangle$ bzw. $\Delta x$, sowie Impulsmittelwert und –unschärfe, $\langle p \rangle$ bzw. $\Delta p$.

(iv) Entscheiden Sie anhand des Ergebnisses für $\Delta p$, ob sich das Elektron in einem Zustand mit scharf definiertem Impuls befinden kann.

(v) Nehmen Sie eine zeitabhängige Wellenfunktion $\psi(x, t)$ für das Elektron im Kastenpotential an, welche bei $t = 0$ eine Überlagerung von zwei Lösungen mit kleinster Energie ist:

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{n=1}(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{n=2}(x) .$$

Die Zeitabhängigkeit einer Einzellösung mittels $\psi_i(x, t) = \psi_i(x)\varphi_i(t)$ abfaktorisiert werden kann. Somit ergibt sich für die zeithabhängige Wellenfunktion die Lösung

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{n=1}(x)e^{-\mathrm{i}E_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{n=2}(x)e^{-\mathrm{i}E_2 t/\hbar} .$$

Berechnen Sie erneut den Ortsmittelwert $\langle x \rangle$ und den Impulsmittelwert $\langle p \rangle$, diesesmal mithilfe der genannten zeitabhängigen Wellenfunktion. Bestätigen Sie für dieses Beispiel, dass

$$m\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \langle p \rangle$$

*Hinweis:* Folgende Integrale dürfen Sie verwenden:

$$\int \mathrm{d}x \sin(lx)\sin(mx) = \frac{\sin([l-m]x)}{2(l-m)} - \frac{\sin([l+m]x)}{2(l+m)} ,$$

$$\int \mathrm{d}x \sin(lx)\cos(mx) = -\frac{\cos([l-m]x)}{2(l-m)} - \frac{\cos([l+m]x)}{2(l+m)} ,$$

$$\int \mathrm{d}x \cos(lx)\cos(mx) = \frac{\sin([l-m]x)}{2(l-m)} + \frac{\sin([l+m]x)}{2(l+m)} .$$