

Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 13

Besprechung: Di, 19.07.2016

Webseite zur Vorlesung: <http://www.itp.kit.edu/~sekulla/MPFI/>

Übungen: Di, 15:45-17:15 Uhr, Lehmann-Hörsaal

Aufgabe 36: Vektoren im Hilbertraum

Die Vektoren $|v_1\rangle, |v_2\rangle$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS) in einem zwei-dimensionalen Hilbertraum \mathcal{H} , d.h. $\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}$. In Abhängigkeit dieser zwei Basisvektoren definieren wir die zwei Vektoren $|\varphi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$ durch

$$|\varphi\rangle = (3 - i)|v_1\rangle + (1 + 2i)|v_2\rangle \quad \text{und} \quad |\chi\rangle = (1 + i)|v_1\rangle + (1 - i)|v_2\rangle$$

- (a) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle \chi | \varphi \rangle$. Zeigen Sie dann, dass die Vektoren

$$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|v_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|v_2\rangle \quad \text{und} \quad |u_2\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}|v_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|v_2\rangle$$

ebenfalls ein VONS bilden und bestimmen Sie die Komponenten von $|\varphi\rangle$ und $|\chi\rangle$ bezüglich dieser neuen Basisvektoren.

- (b) Projektoren P_i auf Unterräume \mathcal{H}_i haben die Eigenschaften $P_i^2 = P_i$ (Idempotenz) und $\sum_i P_i = 1$ (Vollständigkeit), falls die \mathcal{H}_i den gesamten Raum \mathcal{H} aufspannen. Betrachten Sie nun die Projektoren $P_{u_1} = |u_1\rangle\langle u_1|$ und $P_{v_1} = |v_1\rangle\langle v_1|$. Welche mathem. Objekte sind durch P_{u_1} bzw. P_{v_1} beschrieben? Bestimmen Sie die Komponenten $\langle v_j | P_{u_1} | v_k \rangle$ von P_{u_1} bezüglich der $|v_i\rangle$ und die Komponenten $\langle u_j | P_{v_1} | u_k \rangle$ von P_{v_1} bezüglich der $|u_i\rangle$. Schreiben Sie schließlich P_{u_1} in der Basis $|v_i\rangle$.

Aufgabe 37: Selbstadjungierte Operator

Sei H ein *hermitescher* Operator, also eine lineare Abbildung $H : V \rightarrow V$ mit $H^\dagger = H$. Ferner sind die Eigenvektoren $|E_1\rangle$ und $|E_2\rangle$ mit den komplexen Eigenwerten $E_1, E_2 \in \mathbb{C}, E_1 \neq E_2$ gegeben. Zeigen Sie:

- (a) $E_1 = E_1^*$, d.h. die Eigenwerte sind reell.
- (b) $\langle E_1 | E_2 \rangle = 0$, d.h. die Eigenvektoren sind orthogonal.

Aufgabe 38: Hilbertraum und allgemeine Unschärferelation

Leiten Sie für zwei beliebige Observable \hat{A} und \hat{B} die allgemeine Unschärferelation der Quantenmechanik her (siehe Vorlesung). Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- (a) Definieren Sie sich zunächst einen Zustand $|\varphi\rangle = (\hat{A} + i\lambda\hat{B})|\psi\rangle$, mit beliebigem $\lambda \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie dann $\langle \varphi | \varphi \rangle \geq 0$, um eine quadratische Ungleichung für λ in der Form $f(\lambda) \geq 0$ herzuleiten.
- (b) Die Funktion $f(\lambda)$ ist ein Polynom zweiten Grades, mit den Mittelwerten $\langle \hat{B}^2 \rangle$, $i\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle$ und $\langle \hat{A}^2 \rangle$ als Koeffizienten, wobei $[\hat{A}, \hat{B}]$ wie üblich den Kommutator von \hat{A} und \hat{B} bezeichnet.
 - (i) Zeigen Sie, dass die Koeffizienten reell sind, indem Sie die in Aufgabe 37 a) verwendete Eigenschaft verwenden.
 - (ii) Bringen Sie das Polynom durch quadratische Ergänzung in die Form $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2 + D$. Was folgt aus der Ungleichung $f(\lambda) \geq 0$ für D ?
- (c) Ersetzen Sie in Ihren Überlegungen nun $\hat{A} \rightarrow \Delta A = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$ und $\hat{B} \rightarrow \Delta B = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle$. Zeigen Sie zunächst, dass $[\Delta A, \Delta B] = [\hat{A}, \hat{B}]$. Führen Sie dann die genannte Ersetzung in dem Resultat aus b) durch und bringen Sie das Ergebnis letztendlich in die Form

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \left(\frac{i}{2} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2$$

Aufgabe 39: Auf- und Absteigeoperatoren des Harmonischer Oszillators

Man betrachte einen harmonischen Oszillator (mit Ladung e) in einem konstanten elektrischen Feld E , der durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + eEX$$

beschrieben wird.

- (a) Zeigen Sie, dass H durch die Auf- und Absteigeoperatoren

$$b^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} P \quad \text{und} \quad b = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}} P$$

in die Form

$$H = \hbar\omega \left[b^\dagger b + \frac{eE}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (b^\dagger + b) + \frac{1}{2} \right]$$

gebracht werden kann.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Kommutator $[b, b^\dagger]$.

- (b) Drücken Sie H durch $a^\dagger = b^\dagger + c$ und $a = b + c$ aus und wählen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass keine in a^\dagger und a lineare Terme in H auftreten. Geben Sie die Energieeigenwerte von H an und begründen Sie ihre Antwort.

- (c) Berechnen Sie die Ortsunschärfe $\Delta X^2 = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$ des Oszillators.

Hinweis: Für die Eigenzustände $|n\rangle$ von H gilt:

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad \text{und} \quad a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

Weiterführende Erläuterungen: Wellenfunktionen in der Quantenmechanik können als Vektoren in einem abstrakten Vektorraum, dem sog. Hilbertraum, interpretiert werden. Betrachten wir im Folgenden nur den eindimensionalen Fall.

- Für zwei Wellenfunktionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ ist auf dem Hilbertraum \mathcal{H} ein Skalarprodukt der Hilbertraumvektoren $|\psi\rangle$ und $|\varphi\rangle$ durch

$$\langle \psi | \varphi \rangle = \int \psi^*(x) \varphi(x) dx$$

definiert, wobei wir hier die Darstellung im x -Raum gewählt haben und $\langle \psi |$ der zu $|\psi\rangle$ transponierte Vektor ist bzw. $\psi^*(x)$ die zu $\psi(x)$ komplex konjugierte Wellenfunktion. Die Norm einer Wellenfunktion ist durch die Norm

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int \psi^*(x) \psi(x) dx = \int |\psi(x)|^2 dx$$

des entsprechenden Vektors auf diesem Vektorraum definiert und wir fordern daher, dass der Hilbertraum \mathcal{H} im Speziellen nur normierte Zustände enthält, d.h. $\langle \psi | \psi \rangle = 1$.

- Der Erwartungswert eines quantenmechanischen Operators \hat{O} in einem Zustand $|\psi\rangle$ lässt sich nun auch schreiben als

$$\langle \hat{O} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{O} \psi \rangle = \int \psi^*(x) \hat{O}_x \psi(x) dx$$

wobei man den Index ψ in $\langle \hat{O} \rangle_\psi$ auch gerne unterdrückt, wenn klar ist von welchen Zuständen die Rede ist. Operatoren in der Quantenmechanik können daher i.A. auch als Matrixwertige Objekte auf einem abstrakten Vektorraum der Wellenfunktionen aufgefasst werden, weshalb man bei $\langle \psi | \hat{O} | \varphi \rangle = \langle \psi | \hat{O} \varphi \rangle$ oft auch einfach vom sog. Matrixelement des Operators \hat{O} zwischen den Zuständen $\langle \psi |$ und $|\varphi \rangle$ spricht.

- Üblicherweise versucht man beliebige Vektoren $|\psi \rangle \in \mathcal{H}$ in Abhängigkeit von Basisvektoren $|v_i \rangle \in \mathcal{H}$, mit $i \in (1, \dots, n)$ und n der Dimension von \mathcal{H} , auszudrücken. Die Basisvektoren $|v_i \rangle$ bilden dabei ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS), d.h. $\langle v_i | v_j \rangle = \delta_{ij}$. Findet man solch eine Zerlegung, so ist es in der Regel nicht notwendig Skalarprodukte u.Ä. über Integralbildung im Funktionenraum zu ermitteln, da die Wirkung der $|v_i \rangle$ untereinander trivial ist und die Wirkung auf gewisse Operatoren (speziell auf Observable, s.u.) oftmals von vornherein bekannt.

- Für einen beliebigen Operator \hat{X} und Wellenfunktionen φ, ψ definiert die Bedingung

$$\langle \hat{X} \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | \hat{X}^\dagger \psi \rangle$$

den sog. adjungierten Operator \hat{X}^\dagger . Man überzeugt sich sofort davon, dass Folgendes gilt: $(\hat{X} + \hat{Y})^\dagger = \hat{X}^\dagger + \hat{Y}^\dagger$, $\langle \psi | (\hat{X} + \hat{Y}) \psi \rangle = \langle \psi | \hat{X} \psi \rangle + \langle \psi | \hat{Y} \psi \rangle$ und $\langle \hat{X} \psi | \hat{Y} \psi \rangle = \langle \psi | \hat{X}^\dagger \hat{Y} \psi \rangle$. Die Adjunktion ist dabei eine Operation, welche gleichzeitig die Transposition auf dem entsprechenden Vektorraum als auch die komplexe Konjugation des Operators zur Folge hat.

- Eine wichtige Unterklasse von Operatoren ist die Klasse der sog. Hermite'schen oder selbstadjungierten Operatoren \hat{O}_H . Für diese gilt

$$\langle \hat{O}_H \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{O}_H^\dagger \psi \rangle = \langle \psi | \hat{O}_H \psi \rangle \quad \text{oder einfach} \quad \hat{O}_H^\dagger = \hat{O}_H$$

wobei \hat{O}_H^\dagger der zu \hat{O}_H adjungierte Operator ist. Hermite'sche Operatoren sind deshalb so wichtig, weil deren Erwartungswerte sämtlich reell sind und die Eigenwerte Hermite'scher Operatoren somit natürliche Kandidaten bei der Definition von physikalischen Observablen darstellen. Physikalische Observable haben also die besondere Eigenschaft, dass sie durch selbstadjungierte Operatoren dargestellt sind: Für sie gilt $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, $\hat{B} = \hat{B}^\dagger$ und $(\hat{A} + i\hat{B})^\dagger = (\hat{A} - i\hat{B})$.