Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 1

Besprechung: Di, 26.04.2016

Webseite zur Vorlesung: `http://www.itp.kit.edu/~sekulla/MPFI/`

Übungen: Di, 15:45-17:15 Uhr, Lehmann-Hörsaal

Aufgabe 1: Vereinfachen und Kürzen

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\frac{x\sqrt{x}+x\sqrt{y}}{x-y} - \sqrt{x} - \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$,

(b) $\log_{10}\left(\frac{10^x}{10^3}\right)$,

(c) $\frac{1}{1+\tan(\varphi)} + \frac{1}{1+\cot(\varphi)}$.

Aufgabe 2: Differenzieren

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen nach x:

(a) $f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 - 5x + \ln(x) + c$

(b) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)\tan(x)$,

(c) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)$,

(d) $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$.

Aufgabe 3: Reihen und Reihenentwicklung

Die Taylorreihe einer Funktion $f(x)$ am Ursprung $x = 0$ ist für die ersten drei Terme gegeben durch:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2\,,$$

wobei $f'(0)$ und $f''(0)$ die erste bzw. zweite Ableitung von $f(x)$ ausgewertet an der Stelle $x = 0$ bezeichnen. Bestimmen Sie damit die Taylorreihen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \cos(x)$,

(b) $f(x) = \ln(1-x)$.

Aufgabe 4: Integrieren

(a) Bestimmen Sie die Stammfunktion (das unbestimmte Integral) $F(x)$ zu folgenden Funktionen:

(i) $f(x) = e^{\lambda x}\sin(3x)dx$,

(ii) $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$.

(b) Bestimmen Sie außerdem die folgenden bestimmten Integrale:

(i) $F = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

(ii) $F(a,n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx \quad$ für $a > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie das Gauß'sche Integral $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ für $a > 0$.

Aufgabe 5: Drehungen

Eine Drehung um den Winkel φ in der Ebene im $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch eine Matrix:

$$\mathbf{R}_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} , \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Zeigen Sie, dass

(a) die Drehmatrizen kommutieren $\mathbf{R}_2(\varphi_1)\,\mathbf{R}_2(\varphi_2) = \mathbf{R}_2(\varphi_2)\,\mathbf{R}_2(\varphi_1)$,

(b) das Produkt $\mathbf{R}_2(\varphi_1)\,\mathbf{R}_2(\varphi_2)$ wieder zu einer Drehmatrix $\mathbf{R}_2(\varphi_1+\varphi_2)$ führt,

(c) $\det(\mathbf{R}_2(\varphi)) = 1$.

Aufgabe 6: Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwertgleichung einer quadratischen $n\times n$–Matrix $\mathbf{M}$ lautet $\mathbf{M}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, wobei der n–Vektor $\vec{x}$ einen möglichen Eigenvektor und der Skalar λ einen zugehörigen Eigenwert bezeichnen. Die Lösungen für λ ergeben sich durch das Nullsetzen des charakteristischen Polynoms:

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbb{1}) = 0 \ ,$$

wobei $\mathbb{1}$ die n-dimensionale Einheitsmatrix ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte, und falls möglich die Eigenvektoren, zu folgender 3×3–Matrix $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 7: Perle am Draht

Eine kleine durchbohrte Perle (Masse m) gleite im Schwerefeld (g) reibungsfrei längs eines geraden (masselos gedachten) Drahtes, dessen eines Ende im Koordinatennullpunkt fixiert sei, und der sich unter festem Winkel Θ zur z-Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ um diese Achse drehe.

(a) Schreiben Sie die Zwangsbedingungen Z_μ, $\mu = 1, 2, \ldots$ zunächst in kartesischen Koordinaten (x, y, z) der Perle auf. Formen Sie diese (eventuell mittels Integration) in eine offensichtlich holonome Form um.
   (i) Von welchem Typ sind diese holonomen Zwangsbedingungen?
   (ii) Wieviele Freiheitsgrade f hat das beschriebene System?

(b) Wählen Sie eine naheliegende Variable (neben den konstanten Größen Θ und ω) um die Koordinaten (x, y, z) der Perle zu beschreiben. Drücken Sie die Zwangskraft in diesen Größen aus.
   (i) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 1.Art in diesen Größen auf.
   (ii) Was passiert mit den Zwangsbedingungen?
   (iii) Wieviele Gleichungen bleiben?
   (iv) Wieviele Unbekannte gibt es?

(c) Lösen Sie das Gleichungssystem für den Spezialfall $\Theta = \frac{\pi}{2}$. Bestimmen Sie die Lagrange-Multiplikatoren λ_i und die vorher gewählte Variable.

(d) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion als Funktion einer geeignet gewählten verallgemeinerten Koordinate.
   (i) Wie sieht die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung (Lagrange-Gleichung 2. Art) aus? Ist Ihnen diese Gleichung in dieser Aufgabe schon einmal begegnet?