Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 2

Besprechung: Di, 3.05.2016

Webseite zur Vorlesung: `http://www.itp.kit.edu/~sekulla/MPFI/`

Übungen: Di, 15:45-17:15 Uhr, Lehmann-Hörsaal

Aufgabe 8: Bahn–/Raumkurven

(a) Eine Raumkurve werde durch die Parameterdarstellung $\vec{r}(t) = \big(a\cos(\omega t), b\sin(\omega t)\big)$ mit $a, b > 0$ beschrieben. Skizzieren Sie die Kurve $\vec{r}(t)$.

(b) Eine Raumkurve werde nun durch die Parameterdarstellung $\vec{r}(t) = \big(a\cos(\omega t), a\sin(\omega t), ct\big)$ mit $a, c > 0$ beschrieben.
  - (i) Skizzieren Sie die Kurve.
  - (ii) Wie groß ist der Abstand $h = z_2 - z_1$ zweier in z–Richtung direkt übereinanderliegender Punkte $(a, 0, z_1)$ und $(a, 0, z_2)$, wobei $z_2 > z_1$?

(c) Es sei nun der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ eines Teilchens auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω durch $\vec{r}(t) = \big(r\cos(\omega t), r\sin(\omega t), 0\big)$ gegeben.
  - (i) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ und den Beschleunigunsvektor $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$.
  - (ii) Skizzieren Sie die Kreisbahn des Teilchens und diskutieren Sie, in welche Richtung $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ relativ zum Bahnverlauf zeigen.
  - (iii) Nehmen Sie nun an, das Teilchen sei ein Satellit der Masse m_s und umkreise die Erde, mit Masse M_E, in einer Entfernung r_s. Berechnen Sie dessen Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$, wobei für die Gravitationskraft gilt $\vec{F} = -Gm_sM_E\vec{r}/r^3$ und G die Newton'sche Gravitationskonstante bezeichnet.

Anmerkung: ω bezeichnet die sog. Kreisfrequenz (oder auch Winkelgeschwindigkeit), t bezeichnet die Zeit. Die Periodendauer T einer Kreisbewegung, wenn eine Umdrehung vollendet ist, ist gegeben durch $T = 2\pi/\omega$.

Aufgabe 9: Bewegungsgleichungen (Wurf eines Balles)

Betrachten Sie den Wurf eines Balles mit der Masse m im konstanten Gravitationsfeld, d.h. eine Bewegung beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F} = -mg\vec{e}_z$$

mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(t=0) = (0,0,0)$ und $\vec{v}(t=0) = (v\cos\alpha, 0, v\sin\alpha)$, wobei α den anfänglichen Wurfwinkel bezeichnet und $g \approx 9.81 m/s^2$ die Erdbeschleunigung.

(a) Bestimmen Sie die Form der Bahnkurve, indem Sie die Bewegungsgleichung unter Benutzung der Anfangsbedingungen integrieren, und berechnen Sie dadurch $\vec{r}(t)$ (am besten Komponentenweise).
   (i) Welche Form haben $x(t)$ und $z(t)$?
   (ii) Drücken Sie dann z in Abhängigkeit von x aus. Welcher Form entspricht $z(x)$?

(b) Bei welchem anfänglichen Winkel α_{max} erreicht man die maximale Wurfdistanz x_{max}?
Hinweis: Hierfür muss zunächst die Zeit t_{fin} berechnet werden, wobei $z(t_{\text{fin}}) = 0$, welche eingesetzt in $x(t)$ eine Gleichung für $x(\alpha)$ ergibt. Für ein bestimmtes α_{max} erreicht $x(\alpha)$ ein Maximum x_{max}.

Aufgabe 10: Atwood'sche Fallmaschine

Im dreidimensionalen Raum im Schwerefeld (g) ist am Ursprung eine frei drehbare Rolle befestigt. Über diese läuft eine Schnur mit fester Länge l, die zwei Massen m_1 (z_1) und m_2 (z_2) verbindet, die sich in nur z-Richtung frei bewegen können. Somit können Sie die x- und y-Richtung vernachlässigen.

(a) (i) Welche Zwangsbedingungen gibt es? Finden Sie passende generalisierte Koordinaten für die verbleibenden Freiheitsgrade.

(b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf, indem Sie zuvor folgende Schritte ausführen:
   (i) Beginnen Sie mit dem Potential V des Gesamtsystems (beide Massen). Das Potentials einer Masse m im Schwerefeld ist gegeben durch $V = -mgz$.
   (ii) Berechnen Sie nun die kinetische Gesamtenergie T des Systems.

(c) Bestimmen Sie nun die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen.