

Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 3

Besprechung: Di, 10.05.2016

Webseite zur Vorlesung: <http://www.itp.kit.edu/~sekulla/MPFI/>

Übungen: Di, 15:45-17:15 Uhr, Lehmann-Hörsaal

Aufgabe 11: Bewegung im kugelsymmetrischen Potential

Die Bewegung eines Teilchens in einem kugelsymmetrischen Potential V soll mittels Kugelkoordinaten (r, Θ, φ) beschrieben werden. Diese sind gegeben durch

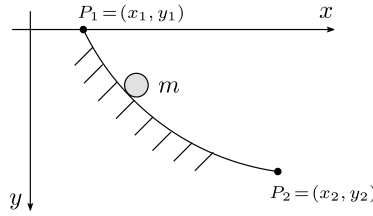
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin(\Theta) \cos(\varphi) \\ r \sin(\Theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\Theta) \end{pmatrix}$$

- (a) Ermitteln Sie zunächst die kinetische Energie $T = m\dot{\vec{x}}^2$ des Teilchens in Kugelkoordinaten. Hierzu führen Sie die folgende Schritte aus:
- (i) Bestimmen Sie die Richtungsvektoren $\vec{k}_{q_i}$ für die Kugelkoordinaten $q_i = (r, \Theta, \varphi)$ mittels $\vec{k}_{q_i} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$ und bilden Sie die zugehörigen normierten Einheitsvektoren $\vec{e}_{q_i} = \frac{\vec{k}_{q_i}}{|\vec{k}_{q_i}|}$.
 - (ii) Zeigen Sie, dass sie $\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$ mit Hilfe der Einheitsvektoren schreiben können als

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\Theta}\vec{e}_\Theta + r\sin(\Theta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi.$$

- (iii) Berechnen Sie nun die kinetische Energie T in Kugelkoordinaten. Sie können hierbei die Orthonormalität der Einheitsvektoren nutzen.
- (b) Bilden Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ für ein Teilchen mit Masse m im kugelsymmetrischen Potential $V = V(r, t)$.
- (i) Welche Koordinate $q_i = (r, \Theta, \varphi)$ ist zyklisch?
 - (ii) Ermitteln Sie den dazugehörigen zeitlich konstanten verallgemeinerten Impuls $p_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\beta}$.

Aufgabe 12: Brachistochronen



Eine in Ruhe befindliche Kugel der Masse m rolle in der xy -Ebene reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft entlang einer Strecke s (siehe Bild), welche in analytischer Form durch die Funktion $y(x)$ beschrieben werden soll. Im vorliegenden Fall sei die potentielle Energie im Gravitationspotential mit Bezug auf $y = 0$ gegeben durch $E_{\text{pot}} = -mgy$. Die Kugel benötige die Zeit t_{ges} um von einem Punkt $P_1 = (x_1, y_1 = 0)$ zu einem anderen Punkt $P_2 = (x_2, y_2)$ auf der Strecke s zu gelangen. Im folgenden sollen Sie nun die Funktion $y(x)$, welche die benötigte Zeit t_{ges} minimiert, mittels mehrerer Teilaufgaben bestimmen.

- (a) Gegeben Sei die Euler-Lagrange-Gleichung in der Form

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

wobei i.A. $F = F(y(x), y'(x), x)$. Diese gilt für F und $y(x)$, falls für die Funktion $y(x)$ das folgende Integral stationär wird:

$$I = \int F(y(x), y'(x), x) dx$$

Zeigen Sie zunächst, daß wenn F nicht explizit von x abhängt, also $F = F(y(x), y'(x)) \neq F(y(x), y'(x), x)$, nach einmaliger Integration der Euler-Lagrange-Gleichung auch der folgende Zusammenhang gilt:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{konst.}$$

Hinweis: Es genügt zu zeigen, daß $\frac{d}{dx} (F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}) = 0$. Verwenden Sie dabei zunächst, daß im vorliegenden Fall die totale Ableitung von F nach x durch $\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx}$ gegeben ist. Benutzen Sie dann im Weiteren die Euler-Lagrange-Gleichung.

- (b) Lösen Sie nun das Brachistochronenproblem, indem Sie wie folgt vorgehen:
 (i) Die benötigte Zeit t_{ges} durch folgendes Integral berechnet werden:

$$t_{\text{ges}} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v(s)}$$

wobei ds ein infinitesimal kleines Stück auf der Strecke s bezeichnet und $v(s)$ die Geschwindigkeit in jedem Punkt von s . Erinnern Sie sich nun daran, daß ds in Abhängigkeit von y' umparametrisiert werden kann zu $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$ (siehe Vorlesung). Verwenden Sie nun noch Energieerhaltung, um die Geschwindigkeit v als Funktion in Abhängigkeit von y auszudrücken, um so letztlich einen Ausdruck für t_{ges} in der Form

$$I = \sqrt{2g} t_{\text{ges}} = \int F(y(x), y'(x), x) dx \quad (1)$$

zu erhalten. Wie sieht $F(y(x), y'(x), x)$ aus?

- (ii) Verwenden Sie nun $F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{konst.} = c_1$, wobei c_1 eine Integrationskonstante bezeichnet, um y' in Abhängigkeit von y und c_1 darzustellen.
- (iii) Durch leichtes Umschreiben (mit der Definition $\frac{1}{c_1^2} = 2r_0$) ergibt sich

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r-y}{y}} \text{ und somit}$$

$$\int \sqrt{\frac{y}{2r-y}} dy = \int dx = x - c_2,$$

wobei c_2 eine weitere Integrationskonstante bezeichnet, welche kollektiv die Integrationskonstanten der x - als auch y -Integration beinhaltet. Lösen Sie nun das y -Integral durch die Variablensubstitution

$$y \rightarrow t : y(t) = 2r_0 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

Hinweis: Verwenden Sie das Integral

$$\int \sin^2(at) dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4a} \sin(2at).$$

- (iv) Welcher Form entspricht die Parameterdarstellung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$?
Hinweis: Schreiben Sie $y(t)$ in die Form $y(t) = 2r_0 \sin^2(\frac{t}{2}) = r_0(1 - \cos(t))$.
- (v) Um die endgültige Lösung zu erhalten, müssen noch die Integrationskonstanten c_1 (bzw. r_0) und c_2 bestimmt werden. Um c_2 zu bestimmen genügt es die Anfangsbedingungen in $P_1 = (x_1, y_1)$ heranzuziehen, wobei man hier der Einfachheit halber $x_1 = x(t_1 = 0) = 0$ wählt.

Hinweis: Um c_1 (bzw. r_0) zu bestimmen schreibt man die entsprechenden Bedingungen im Endpunkt $P_2 = (x_2, y_2) = (x(t_2), y(t_2))$ auf, was auf ein Gleichungssystem zweier Gleichungen für die zwei Unbekannten r_0 und t_2 führt. Dieses Gleichungssystem kann analytisch nicht gelöst werden. Die Werte für r_0 und t_2 müssen daher numerisch bestimmt werden, in Abhängigkeit von x_2 und y_2 , womit Sie sich hier aber nicht weiter beschäftigen sollen.