Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 5

Besprechung: Di, 24.05.2016

Webseite zur Vorlesung: `http://www.itp.kit.edu/~sekulla/MPFI/`

Übungen: Di, 15:45-17:15 Uhr, Lehmann-Hörsaal

Aufgabe 16: Hamilton Formalismus

Für ein Punktteilchen mit der kinetischen und der potentiellen Energie T bzw. V sind die Lagrange– und die Hamiltonfunktion gegeben durch

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T(\dot{\vec{q}}) - V(\vec{q}) \quad \text{bzw.} \quad H(\vec{q}, \vec{p}) = T(\vec{p}) + V(\vec{q})$$

Durch $\vec{q}$, $\dot{\vec{q}}$ und $\vec{p}$ sind jeweils die generalisierten Koordinaten, Geschwindigkeiten bzw. Impulse des Punktteilchens definiert. Die potentielle Energie sei beliebig ungleich Null. Die kinetische Energie ist wie üblich gegeben durch $T(\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{q}}^2$. Die Hamiltonfunktion folgt aus der Lagrangefunktion durch die Transformation

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \dot{\vec{q}}\vec{p} - L = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$$

wobei die generalisierten Impulse gegeben sind durch $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

- Die Euler–Lagrange–Gleichungen, welche Sie bereits kennen, lauten

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial q_i} = 0$$

  und stellen für $i = 1, 2, 3$ je eine Differentialgleichung zweiter Ordnung dar.

- Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p})}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p})}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

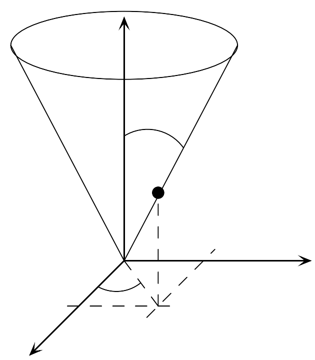
  mit $i = 1, 2, 3$ und stellen ein System von dreimal zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung dar.

(a) Gegeben sind kartesiche Koordinaten, d.h. $\vec{q} = \vec{x}$. Bestimmen Sie zunächst die generalisierten Impulse in Abhängigkeit der generalisierten Geschwindigkeiten.

(b) Dreht man diese Abhängigkeit um, so kann man die kinetische Energie in Abängigkeit der generalisierten Impulse ausdrücken. Wie sieht die kin. Energie $T(\vec{p})$, in Abhängigkeit der generalisierten Impulse $\vec{p}$, aus?

(c) Stellen Sie nun die Hamiltonfunktion auf und leiten Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen daraus ab. Überlegen Sie sich, daß diese äquivalent zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen für ein Punktteilchen der Masse m im Potential $V(\vec{x})$ sind.

Aufgabe 17: Hamilton vs Lagrange



Ein Punktteilchen der Masse m gleitet reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels. Die Gravitationskraft wirke in die negative z–Richtung und der Winkel α zwischen der z-Achse und der Kegeloberfläche sei konstant.

(a) Die unabhängigen Koordinaten seien z und φ. Wie lautet die Zwangsbedingung? Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und benutzen Sie die Euler–Lagrange–Gleichungen um die folgenden Bewegungsgleichungen herzuleiten:

$$\begin{aligned} 2\dot{z}\dot{\varphi} + z\ddot{\varphi} &= 0 \\ \ddot{z}(1+\tan^2\alpha) - z\dot{\varphi}^2\tan^2\alpha + g &= 0 \end{aligned}$$

(b) Setzen Sie die Rechnung nun im Hamilton–Formalismus fort. Wie lauten die generalisierten Impulse für das Teilchen auf dem Kegel? Schreiben Sie die Hamiltonfunktion auf und leiten Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen her. Zeigen Sie dann, daß diese zu den bereits in Aufgabenteil a) hergeleiteten Bewegungsgleichungen äquivalent sind.

(c) Lösen Sie die in Aufgabenteil a) angegebenen Bewegungsgleichungen für den Fall $z = \mathit{konst}$. Welche Bewegung impliziert dies rein anschaulich? Überlegen Sie sich nun, was dies für $\dot{z}$ und folglich auch $\ddot{z}$ impliziert. Was implizieren die Gleichungen für $\dot{\varphi}$ und $\ddot{\varphi}$. Integrieren Sie nun die resultierende Gleichung für $\dot{\varphi}$ und interpretieren Sie das Ergebnis, bzw. finden Sie einen Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit.