Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 6

Besprechung: Di, 31.05.2016

Webseite zur Vorlesung: `http://www.itp.kit.edu/~sekulla/MPFI/`

Übungen: Di, 15:45-17:15 Uhr, Lehmann-Hörsaal

Aufgabe 18: Gekoppelter harmonischer Oszillator als Eigenwertproblem

Die Bewegungsgleichung eines gekoppelten harmonischen Oszillator, welcher ihnen in Aufgabe 15 in Form zweier gekoppelter Pendel begegnet ist, ist gegeben durch

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l}\varphi_1 + \frac{k}{m}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0\,,$$
$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\varphi_2 + \frac{k}{m}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0\,.$$

Dieser Satz zweier gekoppelter linearer Differentialgleichungen kann, durch entsprechende Normalkoordinaten entkoppelt und gelöst werden. Sollten jedoch die Normalkoordinaten nicht so einfach ersichtlich sein, kann die DGL gegebenfalls durch Löesen des Eigenwertproblems entkoppelt werden.

(a) Schreiben Sie dazu das obige System gekoppelter Gleichungen in einer Matrixdarstellung der Form

$$\ddot{\vec{\varphi}} = \mathbf{M}\vec{\varphi} \quad \text{mit} \quad \vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}\,,$$

wobei $\mathbf{M}$ eine 2×2–Matrix darstellt. Wie sieht $\mathbf{M}$ explizit aus?

(b) Führen Sie dies nun durch den Ansatz $\vec{\varphi} = \vec{v}\cos(\omega t + \beta)$, wobei $\vec{v}$ die konstanten Komponenten v_1 und v_2 besitzt, in eine Eigenwertgleichung für $\mathbf{M}$ über und bestimmen Sie die Eigenwerte ω_1 und ω_2 bzw. die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}^{(1)}$ und $\vec{v}^{(2)}$.

(c) Bestimmen Sie nun die allgemeine Lösung für $\vec{\varphi}$.
Hinweis: Bedenken Sie, dass jede Eigenschwingung mit Eigenwert ω_i allgemein mit einer unabhängige Phase β_i und Amplitude A_i beschrieben werden kann.

Aufgabe 19: Symmetrien und Erhaltungsgrößen am Beispiel des harmonischen Oszillators

(a) Eine Transformation $T : (x, \dot{x}, t) \to (x', \dot{x}', t; \alpha)$, wobei α einen reellen Parameter der Transformation bezeichnet, ist eine Symmetrietransformation, wenn sie die Lagrangefunktion invariant lässt, bis auf einen Term der eine totale zeitliche Ableitung darstellt:

$$\mathcal{L}'(x', \dot{x}', t; \alpha) = \mathcal{L}(x', \dot{x}', t) + \frac{d}{dt} F(x', t; \alpha)$$

(i) Zeigen Sie, dass die Transformation

$$T : (x, \dot{x}, t) \to \big(x' - \alpha \cos(\omega t), \dot{x}' + \alpha\omega \sin(\omega t), t; \alpha\big),$$

mit $\omega^2 = k/m$, eine Symmetrietransformation des harmonischen Oszillators ist. Dabei kann die Eichfunktion $F(x', t; \alpha)$ auf die Form

$$F(x', t; \alpha) = \alpha m\omega x' \sin(\omega t) + \alpha^2 f(t)$$

gebracht werden.
Hinweis 1: Die Lagrangefunktion des harmonischen Oszillators in $(x, \dot{x}, t)$ lautet $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$.
Hinweis 2: $\frac{d}{dt} \sin(2\omega t) = 2\omega \cos(2\omega t) = 2\omega\big(\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\big)$.

(ii) $\mathcal{L}$ heißt in diesem Fall symmetrisch unter der Transformation T, und nach dem Noether–Theorem (womit wir uns hier nicht weiter beschäftigen wollen) stellt die folgende Größe J dann eine Erhaltungsgröße dar:

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x(x', t; \alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

Wie sieht die Erhaltungsgröße J für den obigen Fall aus?

(b) In der Vorlesung wurde die Poisson–Klammer zweier Observablen F und G vorgestellt, welche für einen beliebigen Satz von s generalisierten Koordinaten bzw. Impulsen folgendermaßen definiert ist:

$$\{F, G\} = [F, G] = \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right)$$

Weiter wurde gezeigt, dass sich die totale zeitliche Ableitung einer Observablen f mittels der Poisson–Klammer in einfacher Form schreiben lässt als

$$\frac{d}{dt} f = [f, H] + \frac{\partial}{\partial t} f$$

wobei H die Hamiltonfunktion des Systems unter Betrachtung darstellt. Für die generalisierten Koordinaten und Impulse selbst führt dies auf

$$\dot{q}_j = [q_j, H] \quad \text{und} \quad \dot{p}_j = [p_j, H]$$

und i.A. gilt, dass eine Größe A erhalten ist, wenn gilt:

$$[A, H] = 0 \quad \text{falls} \quad \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

oder allgemeiner, wenn gilt:

$$[A, H] + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

(i) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators mittels der Poisson–Klammern der generalisierten Koordinaten und Impulse mit dessen Hamiltonoperator auf.

(ii) Zeigen Sie, dass die Größe $A = -m\big(\dot{x}\cos(\omega t) + \omega x \sin(\omega t)\big)$ eine Erhaltungsgröße ist. Schreiben Sie dazu A zunächst in Abhängigkeit von p und x um, anstelle von $\dot{x}$ und x.

Aufgabe 20: Galilei–Transformation

Die allgemeine Koordinatentransformation der Galilei–Gruppe, kurz Galilei–Transformation, von $\{\vec{r}, t\}$ nach $\{\vec{r'}, t'\}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{r'} &= \lambda_1 \mathbf{R} \cdot \vec{r} - \vec{v}t - \vec{r}_0 \,, \\ t' &= \lambda_2 t + t_0 \,, \end{aligned}$$

wobei λ_1, λ_2 Vorzeichen aus der Menge $\{-1, +1\}$ bezeichnen und $\mathbf{R}$ eine Drehmatrix im dreidimensionalen Raum. Die Galilei–Transformationen verkörpern damit das Kollektiv der Grundtransformationen Zeittranslation (konstante Verschiebung des Ursprungs der Zeitachse), Ortstranslation (konstante Verschiebung des Ursprungs des Ortsraums und Translation auf ein sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegendes Bezugssystem), Drehung im Ortsraum, Raumspiegelung und Zeitumkehr. $P_G = \{\mathbf{R}, \vec{v}, \vec{r}_0, t_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ bezeichnet dabei die Parametermenge (10 reelle Parameter, denn die Drehung $\mathbf{R}$ kann i.A. durch drei Winkel beschrieben werden, und 2 Vorzeichen) der Galilei–Transformation.

(a) Eine Untergruppe der Galilei–Transformation bildet die Boost-gruppe, deren Transformation gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \vec{r'} &= \vec{r} - \vec{v}t \,, \\ t' &= t \,. \end{aligned}$$

Dies stellt den Spezialfall von $P_{G'} = \{\mathbb{1}, \vec{v}, \vec{0}, 0, 1, 1\} = \{\vec{v}\}$ dar, wobei $\mathbb{1}$ die dreidimensionale Einheitsmatrix bezeichnet, und schränkt damit die Galilei–Transformationen auf 3 Parameter ein. Fassen wir $\vec{r}$ und t wie folgt in dem Vierervektor $r^T = (ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z)$ zusammen, so können wir die eingeschränkte Galilei–Transformation auch in Vierermatrixform schreiben. Zeigen Sie in diesem Fall, dass

$$r' = \Gamma_{G'}(\vec{v})r$$

wobei

$$\Gamma_{G'}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\vec{v}}{c} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_x}{c} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{v_y}{c} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v_z}{c} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad r = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Vierermatrixdarstellung (für den eingeschränkten Parameterraum aus Teil a), dass die Menge G' aller daraus resultierender Galilei–Transformationen eine Gruppe bilden. D.h.
- (i) Zeigen Sie, dassdie Hintereinanderausführung zweier Transformationen $P_{G'}$ und $P'_{G'}$, dargestellt durch $\Gamma \in G'$ bzw. $\Gamma' \in G'$ wieder eine Galilei–Transformation ergibt, dass also $\Gamma'' = \Gamma' \cdot \Gamma \in G'$ gilt. Was ergibt sich dann für $\vec{v}''$ in Abhängigkeit von $\vec{v}$ und $\vec{v}'$?
- (ii) Zeigen Sie, dass $\Gamma \cdot (\Gamma' \cdot \Gamma'') = (\Gamma \cdot \Gamma') \cdot \Gamma''$.
- (iii) Zeigen Sie, dass ein Einselement $\mathbf{1}$ existiert (nicht zu verwechseln mit der dreidimensionalen Einheitsmatrix) so dass $\Gamma \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot \Gamma = \Gamma$.
- (iv) Zeigen Sie, dass ein inverses Element Γ^{-1} existiert, so dass $\Gamma \cdot \Gamma^{-1} = \Gamma^{-1} \cdot \Gamma = \mathbf{1}$.

(c) Zeigen Sie Eigenschaft i) aus Teil b) nun für Galilei–Transformationen G'' bei denen $\mathbf{R} \neq \mathbb{1}$ gilt, also für $P_{G''} = \{\mathbf{R}, \vec{v}, \vec{0}, 0, 1, 1\} = \{\mathbf{R}, \vec{v}\}$:
- (i) Wie sieht $\Gamma_{G''}(\mathbf{R}, \vec{v})$ aus?
- (ii) Was ergibt sich in diesem Fall für $\vec{v}''$, was für R''?