Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 7

Besprechung: Di, 07.06.2016

Webseite zur Vorlesung: `http://www.itp.kit.edu/~sekulla/MPFI/`

Übungen: Di, 15:45-17:15 Uhr, Lehmann-Hörsaal

Aufgabe 21: Relativistische Geschwindigkeitsaddition

Herleitung: Es sei $\vec{u} = u\vec{e}_x$ die relative Geschwindigkeit zweier Beobachter (in zwei Koordinatensystemen) $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ zueinander. Analog sei $\vec{v} = v\vec{e}_x$ die relative Geschwindigkeit von $\mathcal{O}'$ und $\mathcal{O}''$ zueinander. Auf dem letzten Blatt haben Sie durch Benutzung der Matrixdarstellung $\Gamma(\vec{u})$ gezeigt, dass die Menge aller Galilei–Transformationen eine Gruppe bildet und dass man für Systeme mit Galilei–Invarianz als relative Geschwindigkeit zwischen $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}''$ wie erwartet $\vec{u} + \vec{v}$ findet. Die Menge aller Lorentz–Transformationen bildet auch ein Gruppe. Leiten Sie ganz analog unter Benutzung der Matrixdarstellung $\Lambda(\vec{u})$ die relativistische Geschwindigkeitsaddition der zwei Geschwindigkeiten $\vec{u}$ und $\vec{v}$ her.
Hinweis: Die Matrixdarstellung einer Lorentz–Transformation bezüglich einer Bewegung in x–Richtung, wobei $\vec{u} = u\vec{e}_x$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\beta = u/c$, sei gegeben durch

$$\Lambda(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) *Anwendung:* Von einer großen Rakete R_1, welche sich relativ zur Erde mit $v_1 = \frac{c}{2}$ entfernt, wird eine sehr viel kleinere Rakete R_2 gestartet, welche sich relativ zu R_1 auch mit $\frac{c}{2}$ entfernt. Von R_2 aus wird eine noch viel kleinere Rakete R_3 gestartet, welche sich relativ zu R_2 wieder mit $\frac{c}{2}$ entfernt, usw. Alle Bewegungen finden hierbei in derselben Richtung statt.

  (i) Geben Sie zunächst die Geschwindigkeit v_2 der zweiten Rakete R_2 relativ zur Erde an.

  (ii) Fahren Sie in Ihren Überlegungen für $v_i, i = 2, 3\ldots$ fort, d.h. geben Sie generell die Geschwindigkeiten v_i der einzelnen Raketen R_i relativ zur Erde an. Ist es möglich mit diesem Prozeß die Lichtgeschwindigkeit zu erreichen oder gar zu überschreiten?

Hinweis: Leiten Sie eine iterative Gleichung für v_i in Abhängigkeit von v_{i-1}, bzw. β_i in Abhängigkeit von β_{i-1}, her. Beginnen Sie Ihre Überlegung zunächst für $i = 2$.

Aufgabe 22: Längenkontraktion (relativistisches Auto)

Herr Müller baut ein Haus und gestaltet die anliegende Autogarage versehentlich viel zu kurz, um sein Auto darin parken zu können. Da er alles Geld für den Bau schon ausgegeben hat, muss er sich etwas anderes überlegen, um das Problem zu lösen. Da erinnert er sich an seine erste Vorlesung über Spezielle Relativitätstheorie. Die Länge seines Autos beträgt 4m, die Garage hat aber leider nur eine Einparktiefe von 2m. Herr Müller will sich nun das Phänomen der Längenkontraktion zunutze machen und berechnen, wie schnell das Auto theoretisch in die Garage einfahren müsste, damit sich das Garagentor bei erreichen des Garagenendes gerade noch schließen lässt. Helfen Sie Herrn Müller bei der Berechnung unter der Annahme einer unzerstörbaren Garage und eines unzerstörbaren Autos.

(a) Definieren Sie die relevanten Bezugssysteme: Das Ruhsystem $\mathcal{K}$ des (fahrenden) Autos und das Ruhesystem $\mathcal{K}'$ der Garage. Machen Sie sich klar, welche Koordinaten Sie messen wollen und in welchem Bezugssystem die Messung gleichzeitig erfolgt?

(b) Setzen Sie die Transformation der Koordinaten an und bestimmen Sie die Wagenlänge l_A im Ruhsystem des Autos ($\mathcal{K}$) und die Wagenlänge l'_A im Ruhsystem der Garage ($\mathcal{K}'$). Über den relativistischen γ–Faktor gewinnt man schließlich die gesuchte Geschwindigkeit in Abhängigkeit des Verhältnisses l'_A/l_A.

Aufgabe 23: Zeitdilatation: Myonzerfall

Beim Auftreffen von kosmischer Strahlung auf die Erdatmosphäre werden in einer Höhe von ca. 11km relativistische Teilchen, "Myonen" genannt, erzeugt, welche sich mit sehr hoher Geschwindigkeit weiter in Richtung Erdoberfläche bewegen. Die Myonen selbst zerfallen wiederum nach einer mittleren Lebensdauer von $\tau_\mu \approx 2 \cdot 10^{-6}$s.

(a) Berechnen Sie die Flugstrecke, welche die Myonen nach ihrer Erzeugung bis zu ihrem Zerfall im Mittel zurücklegen, auf "Newton'sche Art und Weise" und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Höhe von 11 km. Nehmen Sie hierbei vorläufig an, dass die Myonen mit $v \approx c$ fliegen. Erreichen die Myonen in diesem Fall die Erdoberfläche?

(b) Dennoch werden auf der Erde trotzdem eine merkliche Anzahl dieser in der Erdatmosphäre erzeugten Myonen beobachtet. Berechnen Sie die die Geschwindigkeit der Myonen, damit sich diese bei der angegebenen mittleren Lebensdauer auf einem 1.5 km hohen Berg nachweisen lassen. Verfahren Sie hierbei analog zur Aufgabe 22. Bedenken sie dabei, dass die Raumkoordinaten $\vec{x}$ des Myons im Ruhesystem des Myons ($\mathcal{K}$) im Gegensatz zum Ruhesystem der Erde ($\mathcal{K}'$) nicht ändern. Geben Sie das Ergebnis in Einheiten von c an, wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Ist die vorläufige Annahme, die Sie in Aufgabenteil a) getroffen haben, gerechtfertigt? *Hinweis:* Nehmen Sie bei der Rechnung für $c = 300\dot{}000\,\frac{\text{km}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ an.