KIT **SoSe 2016**

Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 8

Besprechung: Di, 14.06.2016

Webseite zur Vorlesung: `http://www.itp.kit.edu/~sekulla/MPFI/`

Übungen: Di, 15:45-17:15 Uhr, Lehmann-Hörsaal

Aufgabe 24: Zeitdilatation (Zwillingsparadoxon)

Zwei Beobachter B und B' befinden sich gemeinsam ruhend im selben Inertialsystem. Zur Zeit $t = 0$ beginnt B' sich allerdings mit einer Geschwindigkeit $v \approx c$ in positiver x–Richtung zu bewegen. Nach einer zurückgelegten Strecke von 15 Lichtjahren (aus Sicht von B) kehrt B' um und bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit zurück, um B wieder zu treffen. Ein Lichtjahr beträgt ca. $9.46 \cdot 10^{12}$ km. Der Einfachheit halber soll außerdem $c = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ und 1 Jahr = 365 Tage gelten.

(a) Wieviele Jahre sind für B vergangen zwischen dem Moment als B' anfing sich wegzubewegen und dem Moment, in dem sie wieder aufeinandertreffen? Wieviele Jahre sind für B' vergangen?

(b) Wiederholen Sie die Rechnung für $v = c/2$.

Aufgabe 25: Matrix- vs Index-Schreibweise

In der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie ist es üblich die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. über doppelt vorkommende Indizes wird summiert, und die Vierervektor Schreibweise zu verwenden. Ein kontravarianter Vierer-Vektor (Index oben) ist dabei gegeben durch

$$x^\mu = (ct, x, y, z) \ .$$

Ein kovarianter Vierer-Vektor (Index unten) kann mittels der Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$ aus dem kontravarianten Vierer-Vektor bestimmt werden

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -x, -y, -z) \ ,$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \quad (g_{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu} \ .$$

Das Skalarprodukt ist damit gegeben durch

$$x_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} x^\mu x^\nu g_{\mu\nu}\,.$$

Die Lorentztransformation eines kontravarianten Vierervektor ist gegeben durch

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu\,,$$
$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\vec{\beta}^T \\ -\gamma\vec{\beta} & \mathbb{1} + (\gamma-1)\,\frac{\vec{\beta}\vec{\beta}^T}{\vec{\beta}^2} \end{pmatrix}\,,$$

mit $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)^T$. Ein allgemeiner Lorentztensor transformiert sich dann wie folgt

$$T^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \Lambda_{\mu_1}{}^{\alpha_1}\Lambda_{\mu_2}{}^{\alpha_2}\ldots\Lambda_{\mu_n}{}^{\alpha_n}\Lambda^{\beta_1}{}_{\nu_1}\Lambda^{\beta_2}{}_{\nu_2}\ldots\Lambda^{\beta_k}{}_{\nu_k}T^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

Durch die Forderung, dass das Skalarprodukt unter Lorentztransformationen invariant bleiben soll, muss der metrische Tensor invariant unter Lorentztransformationen sein:

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta}\Lambda^\beta{}_\nu\,.$$

In den folgenden Teilaufgaben stellt $F^{\mu\nu}$ einen Tensor 2ter Stufe dar.

(a) Verwenden Sie zunächst die Matrixschreibweise für einen Boost in x-Richtung mit $\vec{\beta} = (\beta, 0, 0)^T$.

(i) Überprüfen Sie zunächst, dass die inverse Lorentztransformation gegeben ist durch

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{1}$$

(ii) Zeigen Sie, dass folgende Relation gilt

$$\Lambda_\nu{}^\mu = g_{\nu\beta}\Lambda^\beta{}_\alpha g^{\mu\alpha} = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu\,.$$

(iii) Berechnen Sie die Transformation von x^μ explizit.

(iv) Wie transformiert sich x_μ ?

(v) Zeigen Sie explizit, dass $x_\mu x^\mu$ invariant unter Lorentztransformationen ist.

(b) Verwenden Sie zunächst die Index-Schreibweise.

(i) Zeigen Sie explizit, dass $x_\mu x^\mu$ invariant unter Lorentztransformationen ist.

(ii) Zeigen Sie explizit, dass $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ invariant unter Lorentztransformationen ist.

(iii) Zeigen Sie, mit Hilfe von $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu$ und $g_{\alpha\mu}g^{\mu\beta} = \delta^\beta_\alpha$, dass $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\,\Lambda^\nu{}_\sigma = \delta^\mu_\sigma$ gilt.