

# Einführung in die Theoretische Teilchenphysik

WINTERSEMESTER 2016/17

KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)

GEHALTEN VON

PROF. DR. M. M. MÜHLEITNER



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorbemerkungen</b>	<b>1</b>
1.1	Literatur . . . . .	1
1.2	Vorläufige Inhaltsangabe . . . . .	2
1.3	Grundlagenforschung . . . . .	2
1.4	Teilchenphysik . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
2.1	Elementarteilchen . . . . .	1
2.2	Felder und die Wirkungsweise von Kräften, Austauscheteilchen . . . . .	3
2.3	Auflistung der Elementarteilchen . . . . .	6
2.4	Antiteilchen . . . . .	7
2.5	Vereinheitlichte Theorien und Kosmologie . . . . .	7
2.6	Das expandierende Universum . . . . .	8
2.7	Inflation und Kosmologische Konstante . . . . .	11
2.8	Astroteilchenphysik, Dunkle Materie . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Lagrangedichten</b>	<b>19</b>
3.1	Konventionen . . . . .	19
3.2	Quantenfeldtheorie . . . . .	21
3.3	Lagrangedichten für freie Felder . . . . .	22
3.3.1	Die Euler-Lagrange-Gleichung . . . . .	22
3.3.2	Die Euler-Lagrange-Gleichung für Felder . . . . .	23
3.3.3	Die Lagrangedichte des skalaren Klein-Gordon Feldes . . . . .	24
3.3.4	Die Lagrangedichte des Dirac-Feldes . . . . .	25
3.4	Wechselwirkungen . . . . .	26
3.5	Feldquantisierung . . . . .	26
3.6	Das Emmy-Noether-Theorem für Felder . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Quantenelektrodynamik</b>	<b>29</b>
4.1	Die klassischen Maxwell-Gleichungen . . . . .	29
4.2	Eichfreiheit, Photon . . . . .	30
4.3	Lagrangedichte des Elektromagnetismus . . . . .	33
4.4	Teilchen im elektromagnetischen Feld . . . . .	34
4.5	Feldquantisierung . . . . .	34
4.6	Die Quantisierung des reellen Klein-Gordon Feldes . . . . .	35
4.7	Quantisierung des komplexen Klein-Gordon Feldes . . . . .	39
4.8	Quantisierung des Dirac-Feldes . . . . .	40

---

<b>5</b>	<b>Feynman-Regeln, Wirkungsquerschnitt</b>	<b>43</b>
5.1	Bestimmung der $S$ -Matrix . . . . .	44
5.2	Von der $S$ -Matrix zu den Feynman-Diagrammen . . . . .	45
5.3	Feynmandiagramme und Feynmanregeln der QED . . . . .	46
5.4	Der Prozess $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ . . . . .	51
5.5	Der Wirkungsquerschnitt . . . . .	52
5.5.1	Fermis Goldene Regel . . . . .	52
5.5.2	Der Wirkungsquerschnitt für Teilchenreaktionen . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Der Prozess <math>e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-</math></b>	<b>55</b>
6.1	Das Myon . . . . .	55
6.2	Der Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Das Standardmodell der Teilchenphysik</b>	<b>61</b>
7.1	Eichsymmetrien . . . . .	61
7.1.1	Abelsche Eichtransformationen . . . . .	61
7.1.2	Darstellung nicht-abelscher Gruppen . . . . .	63
7.1.3	Nichtabelsche Eichtransformationen . . . . .	64
7.2	Spontane Symmetriebrechung . . . . .	64
7.2.1	Beispiel: Ferromagnetismus . . . . .	65
7.2.2	Beispiel: Feldtheorie für ein komplexes Feld . . . . .	65
7.2.3	Das Goldstone Theorem . . . . .	66
7.2.4	Spontan gebrochene Eichsymmetrien . . . . .	67
7.3	Unitarität: der Pfad zu Eichtheorien . . . . .	68
7.4	Die Säulen des Standardmodells . . . . .	73
7.5	Die Langrangedichte des Standardmodells . . . . .	74
7.5.1	Die Yang-Mills-Fermion Lagrangedichte . . . . .	74
7.6	Die Higgs-Lagrangedichte . . . . .	77
7.7	Die CKM Matrix . . . . .	80
7.7.1	Vorbemerkung . . . . .	80
7.7.2	Die Yukawa-Lagrangedichte . . . . .	81
<b>8</b>	<b>Higgsboson Phänomenologie</b>	<b>85</b>
8.1	Verifizierung des Higgsmechanismus . . . . .	86
8.2	Die Higgsentdeckung . . . . .	86
8.2.1	Die Higgsboson Zerfallskanäle . . . . .	87
8.2.2	Higgsboson Produktion am LHC . . . . .	91
8.3	Higgsboson Entdeckung . . . . .	95
8.4	Higgsbosonkopplungen am LHC . . . . .	97
8.5	Higgsboson Quantenzahlen . . . . .	102
8.6	Bestimmung der Higgs-Selbstwechselwirkungen . . . . .	103
8.6.1	Bestimmung der Higgs-Selbstkopplungen am LHC . . . . .	103
8.7	Zusammenfassung . . . . .	105

<b>9</b>	<b>Higgsphysik jenseits des Standardmodells</b>	<b>109</b>
9.1	Das Higgspotential . . . . .	111
9.2	Das Problem mit der Flavour-Erhaltung . . . . .	115
9.3	Abschließende Bemerkungen . . . . .	117

# Kapitel 1

## Vorbemerkungen

### 1.1 Literatur

Lehrbücher:

- [1 ] Bailin, David und Love, Alexander: *Introduction to gauge field theory*, Hilger
- [2 ] Bjorken, James D. und Drell, Sidney D.: *Relativistische Quantenfeldtheorie*, BI-Wissenschaftsverlag.
- [3 ] Böhm, M., Denner, A. und Joos, H.: *Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interaction*, Teubner Verlag
- [4 ] Cheng, Ta-Pei und Li, Ling-Fong: *Gauge theory of elementary partilce physics*, Oxford Science Publications
- [5 ] Halzen, Francis und Martin, Alan D.: *Quarks and Leptons*, John Wiley & Sons, Inc.
- [6 ] Harris, Randy: *Moderne Physik, Lehr- und Übungsbuch*, Pearson
- [7 ] Itzykson, Claude und Zuber, Jean-Bernard: *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill
- [8 ] Kaku, Michio: *Quantum field theory*, Oxford University Press
- [9 ] Kugo, Thaichiro: *Eichtheorie*, Springer
- [10 ] Nachtmann, Otto: *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Vieweg
- [11 ] Peskin, Michael E. und Schroeder, Daniel V.: *An introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley
- [12 ] Pokorski, Stefan: *Gauge field theories*, Cambridge University Press
- [13 ] Ramond, Pierre: *Field theory*, Addison-Wesley
- [14 ] Ryder, L.H.: *Quantum Field theory*, Cambridge University Press
- [15 ] Serman, George: *An Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge University Press
- [16 ] Weinberg, Steven: *The quantum theory of fields*, Cambridge University Press

Webseiten:

<http://pdg.lbl.gov>    Particle Data Group

<http://inspirehep.net>    Datenbank INSPIRE für Publikationen

<http://arxiv.org>    Preprint-Archiv

<http://www.cern.ch>    CERN

## 1.2 Vorläufige Inhaltsangabe

1. Vorbemerkungen
2. Einführung
3. Lagrangedichten
4. Quantenelektrodynamik
5. Feynman-Regeln, Wirkungsquerschnitt
6. Berechnung eines Wirkungsquerschnitts
7. Das Standardmodell der Teilchenphysik
8. Higgsboson Phänomenologie
9. Higgsphysik jenseits des Standardmodells

Achtung! Diese Inhaltsangabe ist **vorläufig!**

## 1.3 Grundlagenforschung

Bei Grundlagenforschung handelt es sich um die wissenschaftliche Aufstellung, Nachprüfung und Diskussion der Prinzipien einer Wissenschaft. Sie schafft Elementarwissen für weitergehende Forschung und unterscheidet sich insofern von der angewandten Forschung und der Industrieforschung. Diese bearbeiten zum Teil ähnliche Forschungsfelder, haben jedoch einen anderen Fokus, so dass z.B. wirtschaftliche Zielsetzungen eine Rolle spielen.

Wenn wir uns die Teilchenphysik anschauen, die zur Grundlagenforschung zählt, so stellt sich die Frage nach deren Kultur und Nutzen und was die Allgemeinheit davon hat.

Argumente für Grundlagenforschung sind:

- Das Bestreben des Menschen nach Erkenntnisgewinn ist uralte und sozusagen zentrales Kulturgut.

- Wenn man lediglich ziel- und gewinnorientiert forscht, so bleiben viele neue Ideen auf der Strecke. Es muss die Freiheit bestehen, zweckfrei zu forschen, um Neues zu finden. Hätte man in der Steinzeit immer nur darauf geachtet, die Steinwerkzeuge zu verbessern, wäre möglicherweise Eisen als Werkzeugmaterial nie zum Einsatz gekommen. Man geht also interessanten Fragen nicht nach, weil man denkt, man muss, sondern weil man denkt, dass es sich um gute Fragen handelt. Es geht darum, die Neugier zu befriedigen.
- Durch Grundlagenforschung entsteht Fortschritt. Ohne Grundlagenforschung hat die angewandte Forschung irgendwann keinen input mehr. Der Vorteil der Zweckfreiheit verhindert das Entstehen von Patenten, so das Wissen frei weitergegeben wird und sich entfalten kann.

Es geht bei Grundlagenforschung auch um Wissensweitergabe und die Ausbildung von jungen Menschen. Forschung wird vor allem von den Masteranden/innen und Promovierenden gemacht. Die Doktoranden/innen werden auch ans CERN geschickt. Dort und auch an den Universitäten lernen sie internationale Zusammenarbeit kennen, über kulturelle und sprachliche Grenzen hinweg. In dieser Zusammenarbeit und wissenschaftlichen Umgebung entwickeln sie einen kritischen Geist, lernen die richtigen Fragen zu stellen, nach Lösungen zu suchen. Sie lernen ebenfalls, ausdauernd zu sein und mit Frust umzugehen. Und sie lernen natürlich Programmieren, Experimentieren und anderes. All dies ist ihnen, sollten sie später in die Industrie gehen, von großem Nutzen. Aufgrund ihrer technischen Fähigkeiten, ihrer Fähigkeit zu (internationaler) Teamarbeit, ihres lösungsorientierten Arbeitens, ihres kritischen, analytischen und kreativen Geistes und Denkens stellen sie die idealen Mitarbeiter dar, denen durchaus Führungspositionen zuzutrauen sind. Es findet also 'research led teaching' statt.

Man kann die international orientierte Zusammenarbeit am CERN bereits als Kulturgut an sich sehen. Hier wird vorgelebt, wie internationale Kooperation und Zusammenarbeit aussehen kann. Bereits im Kalten Krieg haben so Amerikaner und Russen zusammengearbeitet. Seit den 80er Jahren sind auch viele Chinesen präsent. Wenn Menschen zusammenarbeiten, die einem gemeinsamen Ziel entgegenstreben, hier dem Erkenntnisgewinn, werden ungeheure Energien freigesetzt und so Fortschritt möglich gemacht.

Darüber hinaus finden aber durchaus zahlreiche spin-offs für Wirtschaft und Technik statt. So wurde das world wide web am CERN erfunden. Die Teilchenphysik und ihre Forschung hat wesentlich zu Fortschritten in der Chipentwicklung, der Kältetechnik, der Datenspeicherung und vielem mehr beigetragen.

Noch *Anekdoten* zum Abschluss:

- \* Nach Ende des Kalten Krieges wusste man nicht, was mit dem Kupfer in den Waffen geschehen sollte. Dies wurde schließlich für den CMS Detektor verwendet.
- \* Als Faraday vom Finanzminister gefragt wurde, wozu die Elektrizität praktisch gut sei, meinte er: 'Nun, Sir, sicher ist, dass sie darauf bald Steuern erheben werden.'

## 1.4 Teilchenphysik

Teilchenphysik geht den grundlegenden Fragen der Menschheit nach:



- Wie entwickelte sich das Universum?
- Woraus besteht das Universum?
- Was sind die grundlegenden Bausteine der Materie?
- Welche Kräfte halten sie zusammen?

Mit Hilfe der Teilchenphysik werden Antworten auf diese Fragen gesucht. Die Energien an den Beschleunigern erlauben es uns, weit in die Vergangenheit des Universums und zu dessen Ursprüngen zurückzureisen. Parallel dazu werden auf großen Skalen die Vorgänge und Strukturen im All untersucht und mit den Erkenntnissen der Teilchenphysik verknüpft. Es wird also Forschung im Mikro- und im Makrokosmos betrieben und dabei Größenordnungen vom Kleinsten, den Längenskalen der Quarks und Leptonen von  $10^{-18}$  m, zum Größtem, dem Universum von  $10^{26}$  m Ausdehnung, überschritten. Auf der Suche nach Erkenntnis arbeiten heute Teilchenphysiker, Astrophysiker und Kosmologen zusammen. Tauchen wir nun in die spannende Welt der Elementarteilchen ein.

# Kapitel 2

## Einführung

### 2.1 Elementarteilchen

Die Suche nach den elementaren Bausteinen der Natur hat eine lange Geschichte.

Eine antike Vorstellung der Naturphilosophen war, dass die Welt lediglich aus elementaren Bausteinen wie z.B. Erde, Feuer, Wasser und Luft besteht. Diese Idee tauchte erstmals bei dem griechischen Philosophen Empedokles auf, siehe Abb. 2.1.

*Die alten Chinesen (Pinyin, Wu Xing) hielten Erde, Holz, Metall, Feuer und Wasser für die fünf grundlegenden Bausteine der Natur. In Indien spricht die Schrift Samkhya-karikas von Ishvarakrsna (ca. 3 Jh. v. Chr.) von den fünf hauptsächlichen Elementen Raum, Luft, Feuer, Wasser und Erde.*

Der Begriff **Atom** taucht im griechischen Altertum bei Demokrit auf, siehe Abb. 2.2. Er nahm an, dass die Welt aus einer begrenzten Zahl von Bausteinen mit geometrischen



Abbildung 2.1: Der griechische Philosoph Empedokles, \*um 495 v. Chr. in Akragas, † um 435 v. Chr. vermutlich auf der Peleponnes.

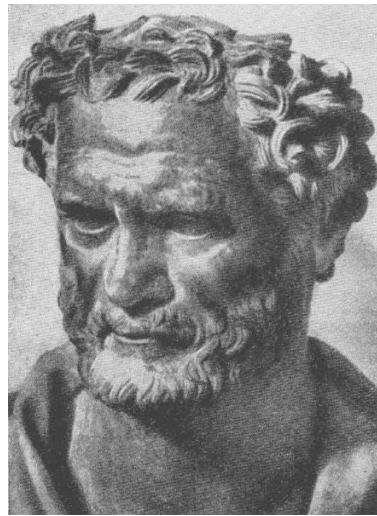


Abbildung 2.2: Der griechische Philosoph Demokrit, \*460/459 v. Chr. in Abdera, † vermutlich 371 v. Chr.

Formen besteht. Diese bezeichnete er als Atome. Das Wort **átomos** ist griechisch und bedeutet 'das Unteilbare'.

Es war allerdings bis ins 20. Jh. unter Philosophen und Naturwissenschaftlern umstritten, ob die Materie ein Kontinuum ist, welches unendlich fein unterteilt werden kann, oder ob es aus elementaren Teilchen aufgebaut ist, die nicht weiter in kleinere Stücke zerteilt werden können.

Um 1800 taucht der Begriff Atom im naturwissenschaftlichen Zusammenhang auf. Nach John Daltons Werk in der Chemie ging man davon aus, dass jedes chemische Element aus untereinander gleichen Teilchen besteht. Diese wurden als Atome bezeichnet. Diese verbinden sich nach einfachen Regeln zu verschiedenen **Molekülen**. Die Atome wurden als unveränderlich und unzerstörbar angesehen.

Dieses Bild wurde im 19. Jh. aber als bloße 'Atom-Hypothese' bezeichnet und kritisiert.

Anfang des 20. Jh. dann erfuhr dieses Bild im Rahmen der Modernen Physik allgemeine Zustimmung. Der erste physikalische Nachweis der Existenz der Moleküle und Atome gelang Jean-Baptiste Perrin durch mikroskopische Beobachtungen an der Brownschen Bewegung und am Sedimentationsgleichgewicht.

Die zur gleichen Zeit beobachtete Radioaktivität ergab, dass die in der Chemie definierten Atome in der Physik weder unveränderlich noch unteilbar sind. Die Atome bestehen statt dessen aus einer Atomhülle mit **Elektronen** und einem **Atomkern**. Dieser besteht aus **Protonen** und **Neutronen**. Diese und das Elektron sowie zahlreiche weitere Teilchen, die ab den 1930er Jahren in der **kosmischen Strahlung** nachgewiesen wurden (z.B. **Myon**, **Pion**, **Positron** etc.) und ab 1950 an Teilchenbeschleunigern entdeckt wurden, galten als Elementarteilchen.

Da es so viele Teilchen gab und diese verschiedene Eigenschaften und Beziehungen zueinander hatten, sprach man von einem **Teilchenzoo**. Es ergaben sich daher auch

Zweifel, ob diese Teilchen wirklich alle elementar sind. In den 1950er Jahren entstand die Unterscheidung in **Hadronen** und **Leptonen**. Die Hadronen wie Neutron und Proton unterliegen der **Starken Wechselwirkung**. Die Leptonen wie z.B. das Elektron unterliegen nur der **elektromagnetischen** und/oder **schwachen Wechselwirkung**. Die Leptonen gelten bis heute als elementar. Die Hadronen konnten ab den 1970er Jahren als zusammengesetzt aus kleineren Teilchen, den **Quarks**, beschrieben werden. Die sechs verschiedenen Quarkarten sind nach dem **Standardmodell** Elementarteilchen. Sie bauen zusammen mit den **Gluonen** die zahlreichen Hadronen des Teilchenzoos auf.

## 2.2 Felder und die Wirkungsweise von Kräften, Austauscheteilchen

Vereinfacht ausgedrückt besteht das physikalische Universum aus Elementarteilchen, die nur wenige ganz bestimmte Möglichkeiten zu Wechselwirkung haben. Kräfte werden durch überall vorhandene Felder vermittelt. Physikalische Felder wie z.B. das elektrische Feld wurden und werden als kontinuierlich angesehen. Max Planck<sup>1</sup>, siehe Abb. 2.3, bereitete 1900 die Entdeckung vor, dass auch hier elementare Teilchen eine Rolle spielen. Dies wurde 1905 von Albert Einstein, Abb. 2.4, im Rahmen der **Lichtquantenhypothese** ausgearbeitet. So können sich als Welle fortpflanzende elektromagnetische Felder nur in Sprüngen der Größe eines Elementar-Quants angeregt und abgeschwächt werden. Diese Quanten, **Photonen**, wurden ab 1923 in Folge der Experimente von Arthur Compton, Abb. 2.5, als Elementarteilchen anerkannt.

Nach dem modernen Bild der Wechselwirkung wird eine fundamentale Kraft zwischen Teilchen durch ein **Austauschteilchen** vermittelt, welches nur für diese Kraft zuständig ist. Im Rahmen der um 1930 entwickelten **Quantenelektrodynamik** sind dies die Photonen.

---

<sup>1</sup>Um das Plancksche Strahlungsgesetz zur Beschreibung der Wärmestrahlung eines schwarzen Körpers theoretisch erklären zu können, musste Max Planck annehmen, dass die Oberfläche des schwarzen Körpers nur diskrete, zur Frequenz proportionale Energiemengen mit dem elektromagnetischen Feld austauschen kann.

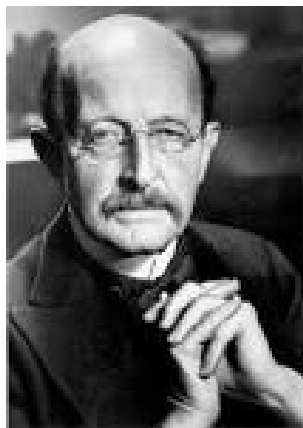


Abbildung 2.3: Max Planck, \*23.4.1858 in Kiel, † 4.10.1947 in Göttingen. Nobelpreis 1919.

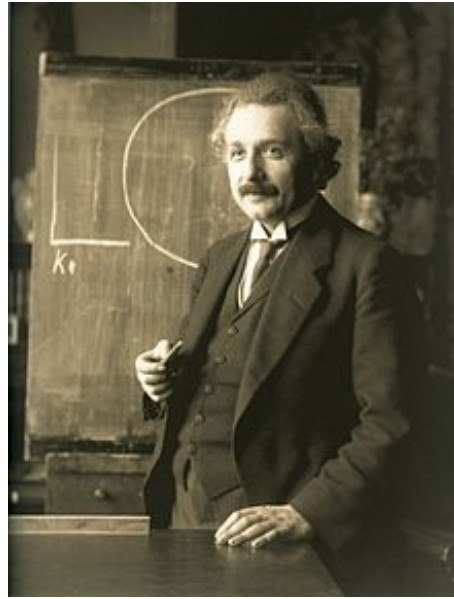


Abbildung 2.4: Albert Einstein, \*14.3.1879 in Ulm, † 18.4.1955 in Princeton. Nobelpreis 1921.

Das vermittelnde Teilchen, hier das Photon, wird als **Feldquant** bezeichnet, als das Teilchen eines Feldes. Die dazugehörige Theorie heißt **Quantenfeldtheorie**. Das Austauscheteilchen einer Fundamentalkraft existiert aber nur während des Austausches. Es wird als sogenanntes **virtuelles Teilchen** erzeugt und vernichtet. Mit Hilfe des Unschärfepinzips für Energie und Zeit kann die Reichweite einer Kraft mit den Eigenschaften des Austauscheteilchens verknüpft werden. Die Unschärfe  $\Delta E$  der Energie eines Systems im Zeitintervall  $\Delta t$  ist durch

$$\Delta t \Delta E \approx \hbar \quad (2.1)$$

gegeben, mit dem reduzierten Planckschen Wirkungsquantum  $\hbar$ . Ein Teilchen der Energie  $\Delta E$  kann damit ohne merkliche Verletzung der Energieerhaltung entstehen und verschwinden, solange es nicht länger als  $\Delta t \approx \hbar/\Delta E$  existiert. Damit kann eine Kraft, deren Austauscheteilchen eine Masse  $m$  besitzt, eher eine geringe Reichweite haben. Die untere Grenze des Betrags, um den die Gesamtenergie schwanken darf, ist bei der Erzeugung eines massebehafteten Teilchens durch seine Ruhenergie gegeben. Damit ist die maximale Zeit, während der das Teilchen existieren kann, durch

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{mc^2} \quad (2.2)$$

gegeben, wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Die maximale Strecke, die das Teilchen zurücklegen kann, ist für die Geschwindigkeit  $c$  gegeben und berechnet sich aus

$$\Delta x \approx c \Delta t \approx \frac{\hbar}{mc} . \quad (2.3)$$

Damit ist die

$$\text{Reichweite} \approx \frac{\hbar}{c m} . \quad (2.4)$$



Abbildung 2.5: Arthur Compton, \*10.9.1892 in Wooster, Ohio, † 15.3.1962 in Berkeley, Kalifornien. Nobelpreis 1927 (zusammen mit Wilson).

Bei massebehafteten Austauschteilchen ist die Reichweite der Kraft also beschränkt. Hat das Teilchen keine Masse, so gibt es für das Teilchen keine untere Energiegrenze, da seine kinetische Energie beliebig klein sein kann. Die Reichweite der Kraft ist somit unendlich. Die elektromagnetische Kraft fällt mit der Entfernung ab, besitzt aber eine unendliche Reichweite. Sie wird durch das masselose Photon vermittelt.

Auch für die anderen Grundkräfte wurden Austauschteilchen gesucht und gefunden. Zusammenfassend:

Kraft	Austauschteilchen	Nachweis
Elektromagnetische Kraft:	Photon	1923 – 25
Schwache Kraft:	$W$ – und $Z$ – Boson	1983
Starke Kraft:	Gluon	1979

(2.5)

Das  $W$ -Boson ist elektrisch geladen, bezeichnet mit dem Symbol  $W^\pm$ , das  $Z$ -Boson ist elektrisch neutral, bezeichnet durch  $Z^0$ . Für die Gravitation, die schwächste der fundamentalen Wechselwirkungen, existiert bisher keine anerkannte Quantenfeldtheorie. Das zugehörige Feldquant **Graviton** ist bisher rein hypothetisch.

#### Anekdoten:

Einstein auf die Frage seines 12-jährigen Sohnes Eduard, warum er so berühmt sei:

“Siehst du, wenn ein blinder Käfer über die Oberfläche einer Kugel krabbelt, merkt er nicht, dass der Weg, den er zurücklegt, gekrümmt ist. Ich hingegen hatte das Glück, es zu merken.”

Einstein 1951 in einem Brief an seinen Freund Michele Besso:

“Die ganzen 50 Jahre bewusster Grübelei haben mich der Antwort der Frage “Was sind Lichtquanten?” nicht näher gebracht. Heute glaubt zwar jeder Lump, er wisse es, aber er täuscht sich ...”

Elektr. Ladung	Generation		
	1	2	3
-1	Elektron ( $e$ )	Myon ( $\mu$ )	Tauon ( $\tau$ )
0	Elektron-Neutrino ( $\nu_e$ )	Myon-Neutrino ( $\nu_\mu$ )	Tauon-Neutrino ( $\nu_\tau$ )

Tabelle 2.1: Die zum SM gehörenden Leptonen.

Elektr. Ladung	Generation		
	1	2	3
$2/3e$	up ( $u$ )	charm ( $c$ )	top ( $t$ )
$-1/3e$	down ( $d$ )	strange ( $s$ )	bottom ( $b$ )

Tabelle 2.2: Die zum SM gehörenden Quarks.

## 2.3 Auflistung der Elementarteilchen

Im **Standardmodell (SM)** der Teilchenphysik werden die uns heute bekannten grundlegenden Strukturen der Materie und die fundamentalen Kräfte, die zwischen ihnen vermitteln, beschrieben.

Die Elementarteilchen werden in die beiden Klassen **Fermionen** und **Bosonen** unterteilt. Fermionen haben einen halbzahligen, Bosonen einen ganzzahligen **Spin**. Zu den Fermionen, auch als **Materieteilchen** bezeichnet, gehören im SM die Leptonen und Quarks. Zu den Bosonen gehören die **Austauschteilchen** und das **Higgs-Boson**.

*Einschub Higgs-Boson:* Bei dem Higgs-Boson handelt es sich um das Feldquant eines neuartigen Feldes. Es wurde in die Quantenfeldtheorie der vereinheitlichten elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung (elektroschwache Wechselwirkung) eingeführt, um den Teilchen theoretisch konsistent Masse zu geben. Das Higgs-Boson ist elektrisch neutral und hat Spin 0. Seine Entdeckung wurde am 4.7.2012 von den LHC Experimenten ATLAS und CMS bekannt gegeben.

**Leptonen**, siehe Tabelle 2.1, sind elementare Materieteilchen mit Spin  $1/2$ , die nicht der starken Wechselwirkung unterliegen. Sie unterliegen der schwachen Wechselwirkung und, falls sie elektrisch geladen sind, auch der elektromagnetischen Wechselwirkung. Es gibt drei elektrisch geladene Leptonen mit Ladung  $-1e$ : **Elektron** ( $e$ ), **Myon** ( $\mu$ ) und **Tauon** ( $\tau$ ); und drei elektrisch neutrale Leptonen: **Elektron-Neutrino** ( $\nu_e$ ), **Myon-Neutrino** ( $\nu_\mu$ ) und **Tauon-Neutrino** ( $\nu_\tau$ ). Die Leptonen werden in **Generationen** oder **Familien** angeordnet. Zu jeder gehört eine Leptonenzahl, welche außer bei Neutrinooszillationen erhalten ist.

**Quarks** sind elementare Materieteilchen mit Spin  $1/2$ , die neben der schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung auch der starken Wechselwirkung unterliegen. Sie tragen eine schwache, eine elektrische und eine Farbladung. Die Quarks mit elektrischer Ladung  $-1/3e$  heißen **down** ( $d$ ), **strange** ( $s$ ) und **bottom** ( $b$ ). Die mit elektrischer Ladung  $2/3e$  heißen **up** ( $u$ ), **charm** und **top** ( $t$ ). Es gibt auch für Quarks drei Generationen bzw. Familien, siehe Tab. 2.2. Quarks werden niemals frei beobachtet, sondern nur als gebundene Bestandteile der Hadronen.

Die drei grundlegenden Kräfte, die im SM beschrieben werden, und ihre Austauschteilchen

sind in Glg. (2.5) angegeben. Die Gesamtheit der Teilchen des SM ist in Tab. 2.3 angegeben.

Elementarteilchen			
Elementare Fermionen		Elementare Bosonen	
Leptonen	Quarks	Eichbosonen	Higgs-Boson
$\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e^-, \mu^-, \tau^-$	$d, u, s, c, b, t$	Gluon, $\gamma, W^\pm, Z^0$	$H^0$

Tabelle 2.3: Die zum SM gehörenden Elementarteilchen.

## 2.4 Antiteilchen

Für jedes Teilchen gibt es ein Antiteilchen. Es hat im Wesentlichen dieselben Eigenschaften wie das Teilchen, jedoch ist es entgegengesetzt elektrisch geladen. So ist z.B. das Positron das Antiteilchen des Elektrons. Ein Elektron und ein Positron können durch Paarerzeugung entstehen. Beim Aufeinandertreffen annihilieren sie, die Teilchen verschwinden und die ihrer Masse entsprechende Energie wird in Photonenenergie umgewandelt. Es wurden inzwischen viele Antiteilchen nachgewiesen, so z.B. das Anti-Proton und das Anti-Neutron. Trotzdem man zunächst vermuten könnte, dass das elektrisch ungeladene Neutron keine Eigenschaften haben sollte, die es von seinem Antiteilchen unterscheiden, wurde die Existenz des Anti-neutrons durch seine Annihilation mit dem Neutron bestätigt. Jedoch ist das Neutron nicht elementar. Es ist aus Quarks und Gluonen zusammengesetzt. Somit unterscheidet sich das Teilchen durch seine innere Struktur von seinem Antiteilchen.

Die theoretische Begründung für die Existenz von Antiteilchen kommt aus der relativistischen Quantenmechanik. Wie Sie dort bereits gesehen haben, gibt es für die Dirac-Gleichung Lösungen mit positiver und mit negativer Energie. Die Lösungen negativer Energie entsprechen den Antiteilchen, die positiver Energie den Teilchen.

## 2.5 Vereinheitlichte Theorien und Kosmologie

Die Hochenergiephysik und die Kosmologie sind sich in den vergangenen Jahren immer näher gekommen. Das liegt vor allem daran, dass die Erforschung des Universums und seiner Geschichte der beste Weg ist, die fundamentalen Wechselwirkungen zu verstehen. So war der **Urknall** das ultimative Hochenergieexperiment.

Die schwache und elektromagnetische Kraft können im Rahmen des SM durch eine Kraft, die elektroschwache Kraft, beschrieben werden. Man nimmt an, dass die elektroschwache und die starke Wechselwirkung nur asymmetrische Ausprägungen derselben Wechselwirkung sind und sich ihre Gleichheit bei sehr hohen Energien zeigt, oberhalb der Energie, bei der die Symmetriebrechung stattfand. Man nimmt daher an, dass die Grundkräfte zum Zeitpunkt des Urknalls eine einzige Kraft waren, die sich nach der Abkühlung in die drei bekannten Kräfte aufspaltete. Eine Theorie, in der die starke und die elektroschwache Kraft als eine einheitliche Kraft wirken, wird als **Große Vereinheitlichte Theorie (GUT, Grand Unified Theory)** bezeichnet. Die GUT sagt weiter voraus, dass bei diesen hohen Energien alle Materieteilchen mit Spin 1/2, also die Leptonen und die Quarks, im Wesentlichen gleich sind, was zu



einer weiteren Vereinheitlichung führen würde. Da Zustände, in denen die vereinheitlichte Kraft wirkt, praktisch nicht herstellbar sind, muss man nach anderen Möglichkeiten suchen, die Existenz einer vereinheitlichten Kraft zu prüfen. Eine solche sind **Protonzerfälle**, die von fast allen vereinheitlichten Theorien postuliert werden. Aus der bisherigen Nicht-Beobachtung solcher Zefälle konnte ein Minimum für die Energie angegeben werden, bei der die Vereinheitlichung auftreten kann. Eine Theorie, die über die GUT hinausgeht und auch die Gravitation mit einbezieht, wird **Theory of Everything (TOE)** genannt. Eine Kandidatin ist z.B. die **Stringtheorie**.

## 2.6 Das expandierende Universum

In den ersten Momenten nach dem Urknall lag eine derartig unvorstellbar hohe Energiedichte und Temperatur vor, dass alles einer einheitlichen Superkraft unterlegen haben könnte. Erst später mit abnehmender Dichte und bei geringerer mittlerer Teilchenenergie bildeten sich die Asymmetrien aus, die sich in den verschiedenen Erscheinungsformen der einen Kraft offenbaren.

*Hintergrundstrahlung:* Ein Wendepunkt in der Entwicklung des Universums war die Entkopplung von Strahlung und Materie. Bei Teilchenenergien oberhalb der typischen Bindungsenergien von Atomen bestand die Materie nicht aus neutralen Atomen, sondern war ein Plasma aus Elektronen und positiven Ionen. Diese geladenen Teilchen standen in einer intensiven Wechselwirkung mit der elektromagnetischen Energie, die das gesamte Universum ausfüllte, so dass ein Gleichgewicht bestand. Mit Abfallen der Temperatur des Universums unter 3000 K (die Temperatur, bei der  $k_B T$  in der Größenordnung der atomaren Bindungsenergien liegt) bildete ein Großteil der Materie neutrale Atome. Die damit wenigen verbleibenden Wechselwirkungen waren nicht mehr in der Lage, die Photonen im Gleichgewicht mit der Materie zu halten. Die Photonen wurden ausgefroren bzw. das Universum wurde durchsichtig. Dies geschah etwa 380000 Jahre nach dem Urknall. Die Photonen bewegten sich weiterhin in zufälligen Richtungen und gaben dem Universum die Eigenschaften eines Schwarzkörperspektrums von 3000 K. Da sich das Universum seither ausgedehnt hat, ist die heute empfangene Strahlung rotverschoben und entspricht einem Schwarzkörperspektrum mit viel geringerer Temperatur. Dies wurde 1965 von Arnold A. Penzias und Robert W. Wilson bestätigt, siehe Abb. 2.6. Sie entdeckten die heute so bezeichnete **kosmische Hintergrundstrahlung (cosmic microwave background (CMB))**. Sie erhielten dafür 1978 den Nobelpreis. Die heute allgemein bekannte Temperatur von 2.7 K ist in hervorragender Übereinstimmung mit der Theorie des seit dem Urknall expandierenden Universums.

*Hintergrund:* Penzias und Wilson arbeiteten 1965 in Holmdel mit Hilfe einer großen Funkantenne, die den Bell Laboratories gehörte. Sie stießen dabei auf ein störendes Hintergrundgeräusch, das aus allen Richtungen und jederzeit gleich war. Ein Jahr suchten sie vergeblich

Abbildung 2.6: Arnold Penzias (rechts) und Robert Wilson (links) vor der Hornantenne, mit der die Radioastronomen den kosmischen Mikrowellenhintergrund entdeckten. Die in der Kabine links untergebrachte Messapparatur steht heute im Deutschen Museum. 1978 Nobelpreis an Penzias und Wilson.



Abbildung 2.7: Robert Henry Dicke, \*6.5.1916 in St. Louis, Missouri, † 4.3.1997 in Princeton, New Jersey.



Abbildung 2.8: George A. Gamow, \*4.3.1904 in Odessa, † 19.8.1968 in Boulder, Colorado.

nach der Ursache des ununterbrochenen Zischens, welches ihre eigentliche experimentelle Arbeit unmöglich machte. Sie konnten keine Ursache ausfindig machen. Sie fragten Robert Henry Dicke, siehe Abb. 2.7, um Rat, der in der benachbarten Princeton University mit einer Arbeitsgruppe nach der Hintergrundstrahlung suchte. Er folgerte, dass sie die von George Gamow, siehe Abb. 2.8, vorhergesagte Strahlung zufällig gefunden hatten. Kurze Zeit darauf wurden zwei Artikel im *Astrophysical Journal* veröffentlicht. Penzias und Wilson beschrieben in ihrem Artikel, wie sie auf die Hintergrundstrahlung gestoßen waren. Dicke erklärte in seinem Artikel, worum es sich dabei handelte.

*Frühere Zeiten:* Wenn auch die einzelnen Schritte diskutiert werden, so besteht Konsens über die grobe Chronologie der Ereignisse seit dem Urknall. Die Geschichte bis heute ist in Abb. 2.9 dargestellt.

*Planck-Ära:* ( $< 10^{-44}$  s = Planck-Zeit,  $\sim 10^{32}$  K = Planck-Temperatur) Unmittelbar nach dem Urknall war das Universum vermutlich ein Gemisch aus hochenergetischen Elementar-

teilchen. Diese traten mit ungeheurer Geschwindigkeit aufgrund einer einzigen Kraft miteinander in Wechselwirkung. Das Universum war unvorstellbar klein, viele Größenordnungen kleiner als ein Nukleon.

Inflation: ( $10^{-35} - 10^{-32}$  s, Expansion um Faktor  $10^{30} - 10^{50}$ ) Sehr bald begann eine schnelle und gewaltige Expansion, die Inflation. Diese ist die vorherrschende Erklärung für ein Problem des heutigen Universums. Dieses ist äußerst homogen und deutet damit auf ein Gleichgewicht hin. Jedoch sind seine Bestandteile viel zu weit voneinander entfernt, als dass sie miteinander hätten kommunizieren können, also Informationen über Dichte und Temperatur hätten austauschen können. Außer sie hätten früher miteinander in engem Kontakt gestanden, bevor sie durch die gewaltige Expansion voneinander getrennt wurden. Es ist unbekannt, was diese Inflation verursacht hat. Möglicherweise ist die kosmologische Konstante hierfür verantwortlich.

GUT-Ära: (schließt sich an Planck-Ära nach spontaner Symmetriebrechung an,  $> 10^6$  GeV) In dieser frühen Periode muss irgendwann eine spontane Symmetriebrechung aufgetreten sein. Zuerst hat sich die Gravitation von der Großen Vereinheitlichten Stark-elektroschwachen Kraft gelöst.

Elektroschwache Ära: In der darauffolgenden Zeit hat sich die starke von der elektroschwachen Kraft getrennt.

Quark-Lepton Ära: Das Universum kühlte sich weiter ab. Solange aber die Teilchenenergien über etwa 1 TeV lagen, war die Energie groß genug, um das Auftreten großer Mengen aller drei Generationen der elementaren Fermionen zu ermöglichen, sowie ihrer Antiteilchen.

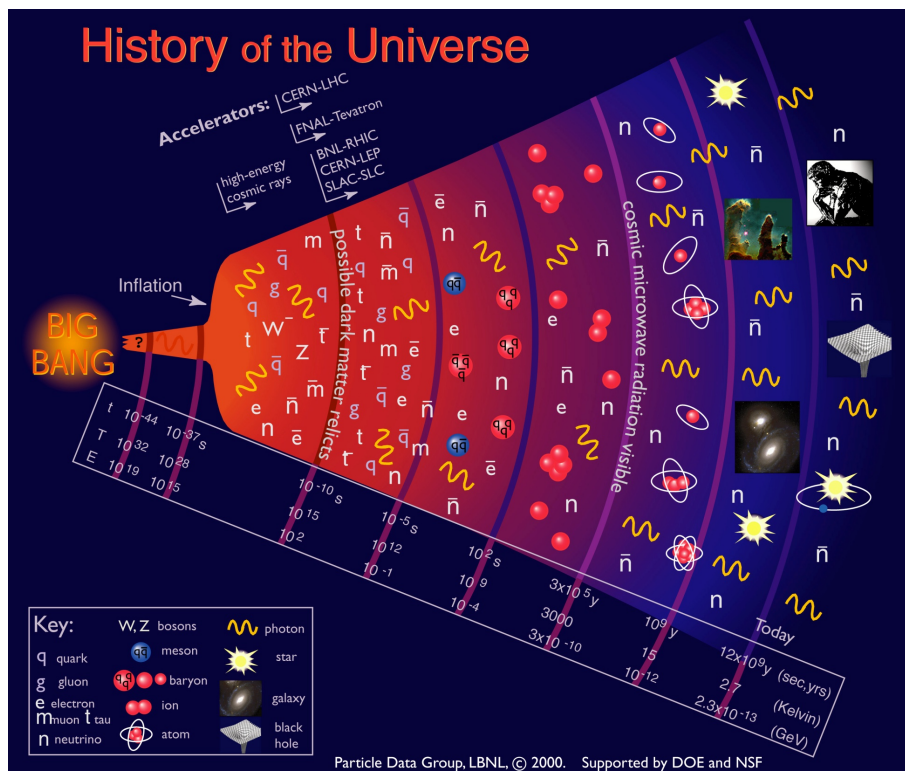


Abbildung 2.9: Die Geschichte des Universums.

Diese Mischung war eine Quark-Leptonen-Suppe.

Nach  $10^{-12}$ s waren die Energien auf etwa 1 TeV gefallen. Die elektromagnetische und die schwache Kraft trennten sich voneinander. Die uns bekannte Welt mit vier getrennten Kräften begann. Diese Energien sind uns heute experimentell zugänglich.

Hadronen-Ära: Nach etwa  $10^{-6}$  s war die Energie bei 1 GeV und die Quarks kondensierten zu Hadronen.

Etwa zwischen  $1\mu\text{s}$  und  $10\mu\text{s}$  bzw. 1 GeV und 0.1 GeV wurden die schweren Fermionen immer seltener, da sie in leichtere Teilchen zerfallen können. Die vorhandenen Energien reichten dann nicht mehr für genügend Nachschub aus. Unterhalb dieser Energien bestand das Universum zum größten Teil aus Nukleonen und leichten Leptonen. Nach mehreren Minuten betrug die mittlere Dichte dann etwa 1 MeV, welches grob der Bindungsenergie pro Nukleon im Atomkern entspricht, so dass sich Atomkerne bildeten. Dies ist die *Ära der Atomkerne*. Nach etwa 380000 Jahren und bei 3000 K bildeten sich die Atome in der *Ära der Atome*. Erst sehr viel später entstanden die Himmelskörper.

## 2.7 Inflation und Kosmologische Konstante

Einige der bei der Expansion des Universums unbekanntes Faktoren können mit Hilfe eines einfachen Modells mit in Betracht gezogen werden. Wir schauen uns zunächst ein Projektil der Masse  $m$  an. Dieses wird von der Oberfläche eines Planeten der Masse  $M$  vertikal nach oben geschossen. Seine Energie ist durch

$$E = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GMm}{r} \quad (2.6)$$

gegeben, wobei  $r$  die Entfernung vom Mittelpunkt des Planeten ist. Ist  $E$  positiv, kann das Projektil entkommen, andernfalls kehrt es zur Erde zurück. Die Geschwindigkeit bei  $E = 0$  entspricht in der klassischen Mechanik der Fluchtgeschwindigkeit. Wir nehmen nun an, dass der Planet explodiert und als Kugel mit gleichförmiger, aber abnehmender Dichte so expandiert, dass sich der äußere Rand immer genau bei der Entfernung des Projektils  $r(t)$  befindet. Das Projektil würde sich genauso verhalten, aber jetzt kann  $M$  durch das Produkt aus Dichte und Volumen ersetzt werden, so dass wir haben

$$E = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{Gm\rho}{r} \frac{4}{3} \pi r^3. \quad (2.7)$$

Daraus ergibt sich

$$\left( \frac{dr/dt}{r} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{2E/m}{r^2}. \quad (2.8)$$

Diese Gleichung bestimmt das Verhalten jedes einzelnen Stücks des explodierenden Planeten, unter der Voraussetzung, dass kein Fragment ein anderes überholt. Geht man von den Einstein'schen Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie aus, so kann daraus direkt ein ähnlicher Ausdruck abgeleitet werden. Dabei handelt es sich um die **Friedmann-Gleichung**,

$$\left( \frac{dR/dt}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{R^2}. \quad (2.9)$$

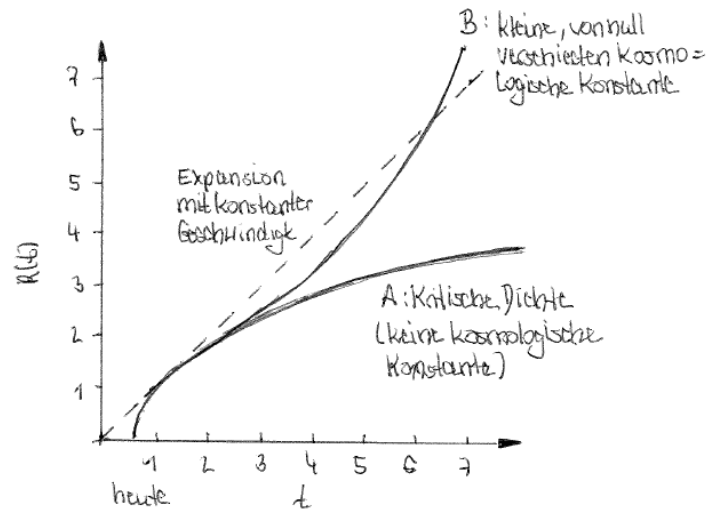


Abbildung 2.10: Expansion des Universums für (A) ein kritisches Universum, das nur aus Masse besteht (fortwährende Expansion), und (B) ein Universum, das durch die kosmologische Konstante beschleunigt expandiert. Gestrichelt: Expansion mit konstanter Geschwindigkeit.

Man bezeichnet  $R(t)$  als **Skalenfaktor**. Er ist ein Maß für die Größe des Universums. Die Konstante  $K$  ist das Analogon der Projektilenergie. In der allgemeinen Relativitätstheorie wird sie jedoch als **globale Raumkrümmung** bezeichnet. Es gilt

$$\begin{aligned} K > 0 : & \text{Raum ist positiv gekrümmt.} & \text{Universum kann sich nicht für immer ausdehnen.} \\ K < 0 : & \text{Raum ist negativ gekrümmt.} & \text{Universum kann sich für immer ausdehnen.} \end{aligned}$$

(2.10)

Mit der Expansion des Universums nimmt die Materiedichte ab. Dies kann dadurch berücksichtigt werden, dass  $R$  beim heutigen Alter des Universums als 1 definiert wird. Die Materiedichte ist dann durch  $\rho_M/R^3$  gegeben, wobei wir heute die Materiedichte  $\rho_M$  haben. Die Friedmann-Gleichung wird dementsprechend abgeändert und zugleich wird eine andere Dichte  $\rho_\Lambda$  hinzugefügt. Es handelt sich hierbei um eine Konstante, die von  $R$  unabhängig ist und sich also während der Expansion des Universums nicht verändert. Damit bekommen wir

$$\left(\frac{dR/dt}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_M}{3R^3} + \frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3} - \frac{K}{R^2}. \quad (2.11)$$

Durch Umdefinition der Massen- und Zeiteinheiten kann erreicht werden, dass einige Konstanten in der Gleichung eliminiert werden und wir die Form

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR/dt}{R}\right)^2 &= \frac{\Omega_M}{R^3} + \Omega_\Lambda - \frac{K'}{R^2} \\ R_{\text{heute}} &= 1 \\ (dR/dt)_{\text{heute}} &= 1, \end{aligned} \quad (2.12)$$

erhalten, wobei  $dR/dt$  beim heutigen Alter auf 1 gesetzt wurde. Je nachdem, welche Werte  $\Omega_M$ ,  $\Omega_\Lambda$  und  $K'$  annehmen, verhält sich das Universum ganz unterschiedlich. Die heutigen



*A. Friedmann*

Abbildung 2.11: Der russischen Physiker, Geophysiker und Mathematiker Alexander A. Friedmann, \*16.6.1888 in Sankt Petersburg, † 16.9.1925 in Leningrad.

Beobachtungen lassen vermuten, dass das Universum flach ist, also  $K' = 0$ . Auch in diesem Fall sind große Unterschiede in den Lösungen möglich. Wenn wir annehmen, dass wir uns entsprechend  $\Omega_\Lambda = 0$  ausbreiten, dann ergibt sich aus Glg. (2.12) zum heutigen Zeitpunkt  $\Omega_M = 1$ . In den hier gewählten Einheiten ist also die Materiedichte des flachen Universums, die **kritische Dichte** genannt wird, einfach 1. Wenn die Jetztzeit gleich 1 gesetzt wird, dann ergibt sich in diesem Fall die Lösung

$$R(t) = \left[ \frac{3}{2} \left( t - \frac{1}{3} \right) \right]^{2/3}. \quad (2.13)$$

Das Universum wird dann ewig, aber mit immer geringerer Geschwindigkeit expandieren, wie die Kurve A in Abb. 2.10 zeigt. Die gestrichelte Linie stellt den Fall  $R(t) = t$  dar. Dies entspricht dem einfachen Fall, dass die Expansionsrate schon immer so groß war wie heute und das Alter des Universums 1 ist. Aus Kurve A liest man ab, dass das tatsächliche Alter des Universums aufgrund der gravitativen rückwärts gerichteten Anziehung geringer sein sollte. Anders verhält es sich, wenn  $\Omega_\Lambda$  von null verschieden ist. Bei  $\Omega_\Lambda$  handelt es sich um die sogenannte **kosmologische Konstante**. Sie ist mit dem Raum selbst verknüpft und ändert sich nicht, wenn sich das Universum ausdehnt. Die Kurve B in Abb. 2.10 zeigt das Verhalten, das sich ergibt, wenn die heutige Dichte im Universum wiederum kritisch ist, aber 1% davon auf  $\Omega_\Lambda$  zurückgeht. Während zu frühen Zeiten die Kurven A und B sehr ähnlich aussehen, bewirkt  $\Omega_\Lambda$ , dass das Universum später schneller expandiert. Es wächst tatsächlich sogar exponentiell an. Der Wert der kosmologischen Konstante ist unbekannt. Sie könnte jedoch eine besondere Eigenschaft des Universums erklären - die Inflation.

#### Anekdote:

Einstein hatte die kosmologische Konstante ursprünglich in seine Gleichungen eingeführt, um ein statisches Universum zu erreichen. Die Arbeiten Friedmanns, Abb. 2.11, die bei



Abbildung 2.12: Der US-amerikanische Astronom Edwin Hubble, \*20.11.1889 in Marshfield, Missouri, † 28.9.1953 in San Marino, Kalifornien.

ihrem Erscheinen zunächst kaum beachtet wurden, ermöglichten eine Expansion des Universums. Die Fachwelt bevorzugte stationäre Universen. Als 1929 durch **Edwin Hubbles** (Fig. 2.12) astronomische Messungen eine systematische Rotverschiebung in den Spektren entfernter Galaxien entdeckt wurde, musste fortan eine Expansion des Universums ernsthaft in Erwägung gezogen werden. Einstein soll daraufhin seine Verwendung der kosmologischen Konstante angeblich als “größte Eselei meines Lebens” bezeichnet haben. Dieser Spruch wurde ihm jedoch von Gamow nachgesagt. Später wurde die kosmologische Konstante wieder eingeführt, als Repräsentantin der **dunklen Energie**.<sup>2</sup>

## 2.8 Astroteilchenphysik, Dunkle Materie

Auch die Astroteilchenphysik und die Hochenergiephysik sind immer mehr miteinander verknüpft. Die Astroteilchenphysik beschäftigt sich mit dem Nachweis von Elementarteilchen kosmischer Herkunft, z.B. kosmische **Neutrinos**, die bei **Supernovae** erzeugt werden. Dies geschieht in Experimenten wie **AMANDA** oder **IceCube**. Ein anderes Beispiel ist der Nachweis der **kosmischen Strahlung** z.B. im **Pierre-Auger Observatorium**<sup>3</sup>, siehe Abb. 2.13, oder bei **KASCADE-Grande**. Weiterhin beschäftigen sich verschiedene Experimente mit dem direkten (Experimente wie **CRESST** oder **EDELWEISS**<sup>4</sup>) oder indirekten Nachweis (z.B. **H.E.S.S.** oder **ANTARES**) von **Dunkler Materie**. Die Untersuchung höchstenergetischer elektromagnetischer Gammastrahlen, die sich nur mit Teilchendetektoren nachweisen lassen, fällt auch in den Bereich der Astroteilchenphysik.

*Dunkle Materie:* Die Existenz der Dunklen Materie, die nicht direkt sichtbar ist, aber gravitativ wechselwirkt, wird in der Kosmologie postuliert, weil sich nur so im Standardmodell

<sup>2</sup>Dabei handelt es sich um eine hypothetische Form der Energie, um die beobachtete beschleunigte Expansion des Universums zu erklären. Weder ihre physikalische Interpretation ist geklärt noch ist ihre Existenz experimentell nachgewiesen. Sie macht nach gängiger Theorie fast 3/4 der Energiedichte des Kosmos aus.

<sup>3</sup>Das KIT ist hier maßgeblich mit beteiligt.

<sup>4</sup>Das KIT ist hier beteiligt.

der Kosmologie die Bewegung der sichtbaren Materie erklären lässt, insbesondere die Rotationsgeschwindigkeit der sichtbaren Sterne um das Zentrum einer Galaxie, siehe Abb. 2.14.

Bereits 1932 vermutete der niederländische Astronom **Jan Hendrik Oort**, Abb. 2.15, die Existenz Dunkler Materie im Bereich der Milchstraßenscheibe aufgrund seiner Beobachtungen zur Anzahldichte und Geschwindigkeitsverteilung senkrecht zur Scheibe von verschiedenen Sternpopulationen und für verschiedene Abstände zur Scheibe. Ungefähr zur gleichen Zeit, 1933, beobachtete der Schweizer Physiker und Astronom **Fritz Zwicky**, Abb. 2.16, dass der Coma-Haufen (ein Galaxienhaufen) nicht durch die Gravitationswirkung seiner sichtbaren Bestandteile zusammengehalten werden kann. Er stellte die Hypothese auf, dass die fehlende Masse in Form von Dunkler Materie vorliegt. **Vera Rubin**, Abb. 2.17, untersuchte seit 1960 die Umlaufgeschwindigkeiten von Sternen in Spiralgalaxien. Es zeigte sich, dass die Umlaufgeschwindigkeit der Sterne höher ist, als sie mit zunehmenden Abstand zum Galaxiezentrum sein dürfte. Seitdem wurde die Dunkle Materie ernst genommen. Die Dunkle Materie, die bisher nicht nachgewiesen werden konnte, spielt bei der Strukturbildung des Universums eine wichtige Rolle. Die Messungen von zuvor **WMAP** und heute **PLANCK** ergeben einen Anteil der Dunklen Materie an der Materie- bzw. Energiedichte des Universums von 26.8%, Abb. 2.18. In der Teilchenphysik gibt es verschiedene Kandidaten für die Dunkle Materie. So zum Beispiel das leichteste supersymmetrische Teilchen im Rahmen von supersymmetrischen Theorien. Jedoch konnte bisher kein direkter Nachweis im Labor erbracht werden.

Anekdote:

Friedrich Dürrenmatt war von Zwicky, der den Bau der US-amerikanischen Atombombe befürwortete, aber deren Einsatz gegen Japan verurteilte, fasziniert. Er diente ihm als Vorbild für die Figur des Möbius in der Tragikomödie “Die Physiker”.



Abbildung 2.13: Das Pierre-Auger Observatorium in der argentinischen Pampa zur Untersuchung der kosmischen Strahlung bei höchsten Energien.



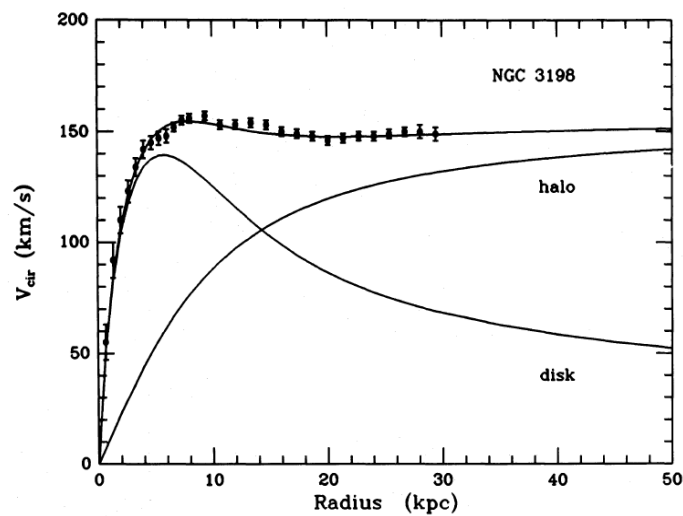


Abbildung 2.14: Die beobachtete Umlaufgeschwindigkeit von Sternen in den Außenbereichen von Galaxien ist höher als aufgrund der sichtbaren Materie zu erwarten ist.



Abbildung 2.15: Der niederländische Astronom Jan Hendrik Oort, \*28.4.1900 in Franeker, † 5.11.1992 in Leiden.

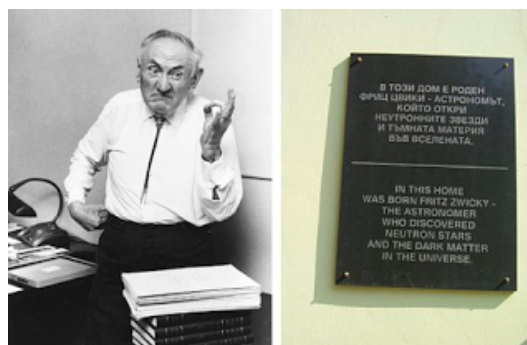


Abbildung 2.16: Der Schweizer Physiker und Astronom Fritz Zwicky, \*14.2.1898 in Warna, Bulgarien, † 8.2.1974 in Pasadena, Kalifornien.



Abbildung 2.17: Die US-amerikanische Astronomin Vera Rubin, \*23.7.1928 in Philadelphia, Pennsylvania.

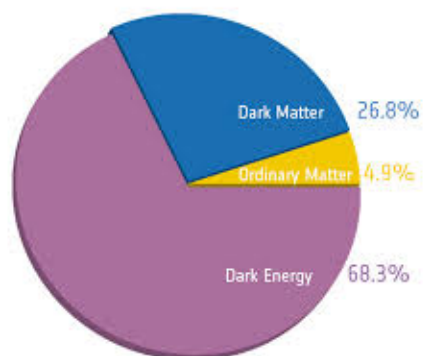


Abbildung 2.18: Materie- bzw. Energieanteil des Universums.



# Kapitel 3

## Lagrangedichten

### 3.1 Konventionen

Zunächst sollen einige Konventionen festgelegt werden, bevor wir uns in die Quantenfeldtheorie vertiefen.

**Natürliche Einheiten** In der theoretischen Teilchenphysik werden natürliche Einheiten (Planck Einheiten) gewählt. Dabei werden die Lichtgeschwindigkeit  $c$  und das Plancksche Wirkungsquantum  $\hbar$  gleich 1 gesetzt. Als Energieeinheit, die dadurch nicht festgelegt wird, wird das Elektronenvolt verwendet:  $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

1. Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  wird gleich 1 gesetzt:

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \equiv 1 \Rightarrow 1 \text{ s} = 3 \cdot 10^8 \text{ m} . \quad (3.1)$$

2. Die Plancksche Wirkungskonstante wird gleich 1 gesetzt:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6.6 \cdot 10^{-25} \text{ GeV s} \equiv 1 \Rightarrow 1 \text{ s} = 1.5 \cdot 10^{24} \text{ GeV}^{-1} . \quad (3.2)$$

Und

$$\hbar c = 1 \Rightarrow 1 \text{ m} = 5.1 \cdot 10^{15} \text{ GeV}^{-1} . \quad (3.3)$$

Sowie

$$m = \frac{E_{\text{Ruhe}}}{c^2} = E_{\text{Ruhe}} \quad (3.4)$$

$$\frac{1 \text{ eV}}{c^2} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{(3 \cdot 10^8)^2} \text{ kg} = 1.78 \cdot 10^{-36} \text{ kg} \stackrel{!}{=} 1 \text{ eV} \Rightarrow 1 \text{ kg} = 5.6 \cdot 10^{26} \text{ GeV} . \quad (3.5)$$

3. Die elektrische Elementarladung  $e > 0$  ist gegeben durch die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante  $\alpha$ :

$$\frac{e^2}{4\pi} = \alpha \approx \frac{1}{137. \dots} \Rightarrow e = 0.3. \quad (3.6)$$

Die Ladung  $e$  ist dimensionslos!

Somit sind also alle physikalischen Einheiten Potenzen der Energie. Der Exponent ist die (Massen-) Dimension. So haben wir also

$$[\text{Länge}] = [\text{Zeit}] = -1, \quad [\text{Masse}] = 1, \quad [e] = 0. \quad (3.7)$$

**Minkowski-Metrik** Ein metrischer Raum ist ein Vektorraum mit einer Metrik. Wir haben den kontravarianten Vierervektor

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad (\text{kontravariant}). \quad (3.8)$$

Der zu dem Vektorraum gehörige Dualraum enthält als Elemente die kovarianten Vierervektoren

$$x_\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \quad (\text{kovariant}). \quad (3.9)$$

Der Übergang zwischen kontra- und kovariant wird durch die Minkowski-Metrik  $g_{\mu\nu}$  vermittelt,

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Das Skalarprodukt ist gegeben durch

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}. \quad (3.11)$$

Es ist

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad \text{und} \quad g^\nu_\mu = \delta^\nu_\mu. \quad (3.12)$$

**Levi-Civita-Tensor** Der Levi-Civita-Tensor ist definiert durch

$$e^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{für gerade Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.13)$$

Dabei ist

$$\epsilon^{0123} = +1 \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{0123} = g_{0\mu}g_{1\nu}g_{2\rho}g_{3\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}\epsilon^{0123} = -\epsilon^{0123} = -1. \quad (3.14)$$

Wir haben auch

$$\epsilon^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \quad \text{d.h. } \epsilon^{12} = 1. \quad (3.15)$$

**Einsteinsche Summenkonvention** Über wiederkehrende Indizes wird summiert, d.h.

$$a_i b_i = \sum_i a_i b_i . \quad (3.16)$$

Meist haben wir

$$a_\mu b^\mu = \sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu . \quad (3.17)$$

Wenn wir es mit Vierervektoren zu tun haben, so laufen griechische Indizes von 0 bis 3 und lateinische von 1 bis 3.

## 3.2 Quantenfeldtheorie

In der klassischen Physik kennt man Teilchen und Felder, so z.B. das elektromagnetische Feld. Ein Teilchen ist durch die Angabe von Ort und Zeit festgelegt, ein Feld hingegen hat eine unendliche Anzahl von Freiheitsgraden. Teilchen werden in der Quantenmechanik durch eine Wellenfunktion beschrieben. Felder treten als äußere Felder, z.B. das Maxwellfeld, auf. Durch die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes werden Photonen eingeführt und damit der Welle-Teilchen-Dualismus beim Licht. Aus der Sicht der theoretischen Physik sind Elementarteilchen, also die kleinsten Bausteine der Materie, die geringsten Anregungsstufen bestimmter Felder.

Um Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen zu beschreiben bedient man sich der **Quantenfeldtheorie (QFT)**. In ihr werden die Prinzipien der klassischen Feldtheorie und der Quantenmechanik kombiniert. Diese Theorie geht über die Quantenmechanik hinaus, indem sie Teilchen und Felder einheitlich behandelt. Es werden nicht nur Observablen wie z.B. die Energie quantisiert sondern auch die **wechselwirkenden** (Teilchen-)Felder selbst. Die Quantisierung der Felder wird auch als **Zweite Quantisierung** bezeichnet. Sie ermöglicht es, explizit die Entstehung und Vernichtung von Elementarteilchen (**Paarerzeugung, Anihilation**) zu berücksichtigen. **Relativistische Quantenfeldtheorien** berücksichtigen die **spezielle Relativitätstheorie** und finden in der Elementarteilchenphysik Anwendung.<sup>1</sup>

Die Verwendung der Quantenfeldtheorie erlaubt es, ein fundamentales Problem der Quantenmechanik zu lösen: Ihre Unfähigkeit, Systeme mit variierender Teilchenzahl zu beschreiben. Wie aus der relativistischen Quantenmechanik bekannt, gibt es gemäß der relativistischen **Klein-Gordon-Gleichung** und der **Dirac-Gleichung** Lösungen negativer Energie, die als Antiteilchen interpretiert werden. Somit können bei ausreichender Energie, Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugt werden.<sup>2</sup> Dies macht ein System mit konstanter Teilchenzahl unmöglich.

Der erste Schritt zu einer Quantenfeldtheorie besteht im Auffinden der **Lagrangedichten** für die Quantenfelder. Diese müssen als **Euler-Lagrange-Gleichung** die Differentialgleichung für das Feld liefern. Diese sind für ein **Skalarfeld** die Klein-Gordon-Gleichung, für ein

<sup>1</sup>Nicht-relativistische Quantenfeldtheorien sind z.B. in der Festkörperphysik relevant.

<sup>2</sup>In dem Dirac-Bild entspricht das dem Anheben eines Teilchens aus dem Dirac-See der Zustände negativer Energien in einen Zustand positiver Energie. Dadurch entsteht im Dirac-See ein Loch, das als Positron interpretiert wird, sowie ein Elektron mit positiver Energie, sprich ein Elektron-Positron-Paar.

**Spinorfeld** die Dirac-Gleichung und für das Photon die **Maxwellgleichungen**. Sie sind die Bewegungsgleichungen für freie Felder, die nicht wechselwirken. Sie sind aus den Lagrangedichten für freie Felder abgeleitet. Um Wechselwirkungen der Felder untereinander einzuführen, müssen die Lagrangedichten um zusätzliche Terme erweitert werden.

### 3.3 Lagrangedichten für freie Felder

#### 3.3.1 Die Euler-Lagrange-Gleichung

Oft wird in der Quantenmechanik der Hamilton-Operator benutzt, um ein System zu beschreiben. Alternativ kann aber auch der **Lagrange-Formalismus** (eingeführt von Joseph Louis Lagrange, Abb. 3.1) verwendet werden. Das in der klassischen Mechanik grundlegende Gesetz lässt sich ausdrücken als,

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla}V, \quad (3.18)$$

wobei  $\vec{F}$  die Kraft,  $m$  die Masse eines Teilchens am Ort  $\vec{x}$ ,  $\vec{a}$  die Beschleunigung und  $V$  das Potential beschreibt. Die Lagrangefunktion wird dann definiert als

$$L \equiv \underbrace{T}_{\text{kinetische}} - \underbrace{V}_{\text{potentielle Energie}} \equiv L(q_i, \frac{dq_i}{dt}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.19)$$

Bei  $q_i$  handelt es sich um die **verallgemeinerten** Koordinaten und  $dq_i/dt \equiv \dot{q}_i$  sind deren zeitlichen Ableitungen,  $n$  ist die Anzahl der Freiheitsgrade.

Das **Hamiltonsche Prinzip** besagt, dass die Bewegung zwischen der Zeit  $t_1$  und  $t_2$  so abläuft, dass die Bahnkurve die Wirkung  $S$  stationär macht,

$$\delta S = 0, \quad (3.20)$$

wobei die Wirkung definiert ist als

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L dt. \quad (3.21)$$

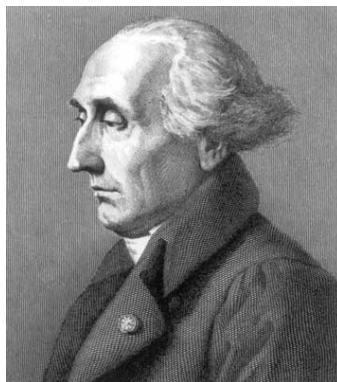


Abbildung 3.1: Der italienische Mathematiker und Astronom Joseph Louis Lagrange, \*25. 1.1736 in Turin als Giuseppe Lodovico Lagrangia; † 10. April 1813 in Paris. [Quelle:Wikipedia].

Da  $S$  meist minimal wird, spricht man vom **Prinzip der kleinsten Wirkung**. Diese Bedingung führt zu den **Euler-Lagrange-Gleichungen**,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.22)$$

### 3.3.2 Die Euler-Lagrange-Gleichung für Felder

Im Folgenden soll die Bewegungsgleichung für Felder hergeleitet werden. Ein Feld beschreibt ein kontinuierliches System mit unendlich vielen Freiheitsgraden, z.B. die Auslenkung einer klassischen Saite. Das System wird durch das Feld  $\phi$  beschrieben, das eine Funktion des Ortes und der Zeit ist,

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(x^\mu), \quad (3.23)$$

wobei wir den relativistischen Vierer-Ortsektor

$$x^\mu = (t, \vec{x}), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (3.24)$$

eingeführt haben.<sup>3</sup> Das Feld besitzt unendlich viele Freiheitsgrade, die mit Hilfe des Ortsvektors  $\vec{x}$  identifiziert werden. Es werden also die diskreten Koordinaten  $q_i$  und deren Ableitungen durch die kontinuierlichen Funktionen  $\phi(x^\mu)$  und  $\partial_\mu \phi(x^\mu)$  ersetzt,

$$\begin{cases} q_i & \rightarrow \phi(x^\mu) \\ \frac{dq_i}{dt}, \vec{\nabla} q_i & \rightarrow \partial_\mu \phi(x^\mu) \end{cases} \quad (3.25)$$

Die Summe über die Freiheitsgrade geht über in ein Integral über  $\vec{x}$ . Wir führen nun die **Lagrangedichte**  $\mathcal{L}$  als eine Funktion des Feldes und seiner Ableitungen ein,

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (3.26)$$

Damit wird die Wirkung

$$S \equiv \int L dt = \int dt \int d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (3.27)$$

Beachte, dass das Integral  $\int d^4x \equiv \int dx$  Lorentz-invariant ist.<sup>4</sup> Wir verlangen, dass die Wirkung, aus der sich die Bewegungsgleichungen ableiten, Lorentz-invariant ist. Damit muss also die Lagrangedichte Lorentz-invariant sein.<sup>5</sup> Aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S \\ &= \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dabei ist

$$\delta (\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \delta \phi. \quad (3.29)$$

<sup>3</sup>Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  wird gleich 1 gesetzt.

<sup>4</sup>Die Lorentzkontraktion wird durch die Zeitdilatation kompensiert.

<sup>5</sup>Neben der Lorentzinvarianz können andere Symmetrien in die Lagrangedichte eingebaut werden wie z.B. Eichsymmetrien.



Partielle Integration

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \Big|_{x_1}^{x_2} - \int \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi \quad (3.30)$$

liefert, da der erste Term wegen  $\delta\phi = 0$  an den Rändern verschwindet,

$$0 = \int d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta\phi. \quad (3.31)$$

Da dies für beliebige Variationen des Feldes gelten muss, ergeben sich die Euler-Lagrange-Gleichungen für das Feld  $\phi$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (3.32)$$

Dies kann auf den Fall mehrerer Felder verallgemeinert werden. Sei  $\mathcal{L}$  eine Funktion von  $n$  Feldern  $\phi_i$ ,

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.33)$$

dann ergeben sich  $n$  Euler-Lagrange-Gleichungen,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right) = 0. \quad (3.34)$$

### 3.3.3 Die Lagrangedichte des skalaren Klein-Gordon Feldes

Wir betrachten ein **skalares Feld**

$$\phi(x^\mu) = \phi(x^0, \vec{x}). \quad (3.35)$$

Gesucht ist eine Lagrangedichte, die Funktion des Feldes und seiner Ableitungen ist,

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (3.36)$$

und außerdem die Bedingung der Lorentz-Invarianz erfüllt.<sup>6</sup> Als Ansatz schreiben wir

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (3.37)$$

Wir finden

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi} = -m^2\phi \quad (3.38)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{1}{2}(\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial(\partial_0 \phi)} \right) \frac{1}{2} \left[ (\partial_0 \phi)(\partial_0 \phi) - \sum_{j=1}^3 (\partial_j \phi)(\partial_j \phi) \right] \\ &= \begin{pmatrix} \partial_0 \phi \\ -\partial_i \phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial^0 \phi \\ \partial^i \phi \end{pmatrix} = \partial^\mu \phi. \end{aligned} \quad (3.39)$$

---

<sup>6</sup>Ferner soll die Massendimension der Lagrangedichte 4 nicht überschreiten, um die Renormierbarkeit der Theorie zu gewährleisten. Wir werden auf den Begriff der Renormierbarkeit später zurückkommen. Die in Glg. (3.37) angegebene Lagrangedichte ist renormierbar.

Mit der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (3.40)$$

folgt

$$\partial_\mu (\partial^\mu \phi) + m^2 \phi = (\square + m^2) \phi = 0 . \quad (3.41)$$

Dies ist aber die Klein-Gordon Gleichung.

### 3.3.4 Die Lagrangedichte des Dirac-Feldes

Wir betrachten die beiden Spinoren

$$\psi \quad \text{und} \quad \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad (3.42)$$

als unabhängige Spinoren, wobei

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i) , \quad i = 1, 2, 3 , \quad (3.43)$$

die Dirac  $\gamma$ -Matrizen sind. Eine Lorentz-invariante Lagrangedichte als Funktion des Dirac-feldes und seiner Ableitung ist durch

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} \equiv i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \quad (3.44)$$

gegeben.<sup>7</sup> Wir müssen zweimal die Euler-Lagrange-Gleichung für die beiden unabhängigen Felder anwenden. Für  $\psi$  finden wir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \quad \text{und} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = i \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \psi \quad (3.46)$$

und damit unter Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung

$$(i \not{\partial} - m) \psi = 0 , \quad (3.47)$$

wobei

$$\not{\partial} \equiv \gamma_\mu \partial^\mu . \quad (3.48)$$

Dies ist die Dirac-Gleichung für das Feld  $\psi$ . Analog finden wir für das Feld  $\bar{\psi}$  die Dirac-Gleichung

$$\bar{\psi} (i \overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0 . \quad (3.49)$$

---

<sup>7</sup>Diese ist auch renormierbar, da die Massendimension 4 nicht überschritten wird.

### 3.4 Wechselwirkungen

Die bisher betrachteten Lagrangedichten beschreiben freie Felder, die nicht wechselwirken, und führen zu den Bewegungsgleichungen für freie Felder. Um Wechselwirkungen der Felder untereinander beschreiben zu können, müssen weitere Terme zu den Lagrangedichten hinzugefügt werden. Dabei muss folgendes gelten:

1. Alle hinzugefügten Terme müssen **skalar** sein, d.h. **invariant** unter **Poincaré-Transformationen**.
2. Die Dimension der hinzugefügten Terme muss  $(\text{Länge})^{-4} = (\text{Masse})^4$  sein, da die Lagrangedichte in der skalaren Wirkung über die Raumzeit integriert wird. Dies kann, falls nötig, durch einen konstanten Faktor mit passender Dimension erreicht werden. Bei diesen Faktoren handelt es sich um die **Kopplungskonstanten**.
3. Wechselwirkungen werden durch sogenannte **Eichfelder** vermittelt, z.B. das Photon. Bei Wechselwirkungen von **Eichfeldern** mit anderen Feldern muss die Lagrangedichte eichkovariant sein. Das heißt, dass sich die Form der Lagrangedichte unter Eichtransformationen nicht ändern darf.

*Eichtransformation:* Eine Eichtransformation ändert die Eichfelder einer physikalischen Theorie (z.B. elektromagnetische Potentiale) so, dass die physikalisch wirksamen Felder (z.B. elektromagnetisches Feld) und damit alle beobachtbaren Abläufe gleich bleiben. Dies nennt man *Eichfreiheit*.

Warum sind Eichtransformationen in der Teilchenphysik wichtig? Die Teilchenphysik möchte das Verhalten von Elementarteilchen aus möglichst einfachen Grundannahmen ableiten. Hierbei hilfreich ist die Forderung nach einer Gruppe von Transformationen der beteiligten Felder, unter welcher die Dynamik der Teilchen invariant bleibt. Die Gestalt der zu konstruierenden Lagrangedichte wird durch diese Symmetrie bzw. Eichfreiheit stark eingeschränkt und hilft somit bei der Konstruktion der Theorie.

Alle fundamentalen Wechselwirkungen werden durch Eichtheorien beschrieben. Gemäß dem Noether Theorem weist die einer Eichtransformation zu Grunde liegende Symmetrie auf die Existenz einer Erhaltungsgröße hin. Somit wird jedem Teilchen, das der zu beschreibenden Wechselwirkung unterliegt, eindeutig eine erhaltene Ladung zugeordnet. Beispiele hierfür sind die elektrische Ladung, die Hyperladung, der schwache Isospin, die Farbladung. Die Ladung gibt an, wie stark ein Teilchen an das Eichboson koppelt und legt auch das Vorzeichen dieser Kopplung fest.

### 3.5 Feldquantisierung

Die **Feldquantisierung** ermöglicht es, die Quantennatur der Felder zu beschreiben, und ist der erste Schritt, um das Verhalten der Felder berechenbar zu machen. Es gibt hierfür zwei unterschiedliche Formalismen mit unterschiedlichem Vorgehen:

- Der **kanonische** Formalismus lehnt sich an den Formalismus der Quantenmechanik an. Er eignet sich, um grundlegende Eigenschaften der Felder, wie z.B. das Spin-Statistik-Theorem, zu zeigen. Allerdings ist die Berechnung von Wechselwirkungsamplituden und die Quantisierung bei nicht-abelschen Eichtheorien recht kompliziert.



Abbildung 3.2: Die deutsche Mathematikerin Emmy Noether, \*23.3.1882 in Erlangen, † 14.4.1935 in Bryn Mawr, Pennsylvania. [Quelle:Wikipedia].

- Der **Pfadintegral**-Formalismus geht vom Prinzip der kleinsten Wirkung aus. Es wird über sämtliche Feldkonfigurationen integriert. Die sich nicht aufhebenden Beiträge kommen bei schwacher Kopplung nur von Pfaden in der Nähe der Minima der Wirkung. Die Berechnung von Wechselwirkungsamplituden ist in diesem Formalismus relativ einfach und die Symmetrien der Felder kommen klar zum Ausdruck. Allerdings ist die Konvergenz des Pfadintegrals mathematisch nicht streng bewiesen.

Die kanonische Quantisierung ist Thema der VL *Theoretische Teilchenphysik 1*. Der Pfadintegralformalismus wird in *Theoretische Teilchenphysik 2* und/oder in Spezial-VLen behandelt.

### 3.6 Das Emmy-Noether-Theorem für Felder

Ohne Beweis geben wir das Emmy-Noether-Theorem, Abb. 3.2, für Felder an:

*Zu jeder Symmetrie des Wirkungsintegrals gegenüber einer kontinuierlichen Transformation gibt es einen erhaltenen Strom des Feldes.*

Als Beispiel betrachten wir die Invarianz unter Translation. Bei einer infinitesimalen Translation  $\delta a^\mu$  ändert sich der Raumzeitvektor

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta a^\mu \equiv x^\mu + \delta x^\mu . \quad (3.50)$$

Die Variation der Lagrangedichte ist durch

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \quad (3.51)$$

gegeben. Es gilt

$$\delta \phi = (\partial_\nu \phi) \delta x^\nu = \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \delta a^\nu \quad \text{und} \quad \delta (\partial_\mu \phi) = \partial_\mu (\delta \phi) . \quad (3.52)$$

Mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \quad (3.53)$$

finden wir für Glg. (3.51)

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) = \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \right] \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) \\ &= \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right) = \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi) \right) \delta a^\nu .\end{aligned}\quad (3.54)$$

Andererseits kann die Änderung der Lagrangedichte auch bezüglich der Raumzeitkoordinaten ausgedrückt werden,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta a^\mu = (\partial_\mu\mathcal{L})\delta a^\mu\delta_\nu^\mu .\quad (3.55)$$

Vergleich der Gleichungen (3.54) und (3.55) liefert

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi) - \delta_\nu^\mu\mathcal{L} \right) \delta a^\nu = 0 .\quad (3.56)$$

D.h. wir haben den erhaltenen Strom

$$\partial_\mu T_\nu^\mu , \quad \text{wobei} \quad T_\nu^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi) - \delta_\nu^\mu\mathcal{L}\quad (3.57)$$

gefunden. Bei  $T$  handelt es sich um den **Energie-Impuls-Tensor** des Feldes.

Die  $T_0^0$  Komponente entspricht der Hamiltondichte  $\mathcal{H}$ ,

$$\mathcal{H} \equiv T_0^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}(\partial_0\phi) - \mathcal{L} .\quad (3.58)$$

Der Hamilton-Operator ist gleich

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x T_0^0 .\quad (3.59)$$

Vergleich mit dem klassischen Analogon,

$$H(p, q) = p \frac{dq}{dt} - L\quad (3.60)$$

liefert die kanonische **Impuls-Dichte des Feldes**,

$$\Pi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} .\quad (3.61)$$

Damit ist also

$$T_0^0 = \Pi(\partial_0\phi) - \mathcal{L} .\quad (3.62)$$

Der **Impuls des Feldes** ist durch die  $T_i^0$  Komponenten gegeben,

$$\begin{aligned}P_i \equiv \int d^3x T_i^0 &= \int d^3x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}(\partial_i\phi) , \quad i = 1, 2, 3 \\ &= \int d^3x \Pi(\partial_i\phi) .\end{aligned}\quad (3.63)$$

# Kapitel 4

## Quantenelektrodynamik

Die Quantenelektrodynamik ist die quantenfeldtheoretische Beschreibung des Elektromagnetismus. Es geht hierbei um die Wechselwirkung von Photonen mit geladenen Teilchen. Wir beginnen mit der klassischen Theorie des Elektromagnetismus.

### 4.1 Die klassischen Maxwell-Gleichungen

Die Maxwell-Theorie ist eine klassische Feldtheorie, die mit der Relativitätstheorie übereinstimmt. In den Heavyside-Lorentz Einheiten, für die

$$c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1 , \tag{4.1}$$

wobei  $\epsilon_0$  die Dielektrizitätskonstante und  $\mu_0$  die Permeabilität bezeichnet, lauten die Maxwell-Gleichungen (J.C. Maxwell, siehe Abb. 4.1)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho , & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{J} & \text{inhomogene} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \text{homogene} \end{aligned} \tag{4.2}$$



Abbildung 4.1: Der schottische Physiker James Clerk Maxwell, \*13.6.1831 in Edinburgh, † 5.11.1879 in Cambridge [Quelle:Wikipedia].

Dabei sind  $\vec{E}, \vec{B}$  das elektrische Feld und die magnetische Flussdichte und  $\rho, \vec{J}$  die elektrische Ladungsdichte und die Stromdichte. Das **elektromagnetische Vierer-Potential** ist definiert als

$$A^\mu \equiv (\phi, \vec{A}) . \quad (4.3)$$

Die Felder  $\phi$  und  $\vec{A}$  hängen folgendermaßen mit  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  zusammen:

$$\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{E} \equiv -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} . \quad (4.4)$$

Die Potentiale sind Lösungen der homogenen Maxwell-Gleichungen, wie man leicht durch Einsetzen nachweist. Der antisymmetrische elektromagnetische (EM) Feldtensor ist definiert durch

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu . \quad (4.5)$$

Damit lassen sich die inhomogenen Maxwell-Gleichungen schreiben als

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu , \quad \text{wobei } J^\nu \equiv (\rho, \vec{J}) . \quad (4.6)$$

Bei  $J^\nu$  handelt es sich um den 4-er Vektor für die elektrische Ladungs- und Stromdichte. Diese Form der Maxwell-Gleichungen macht ihre Kovarianz (Invarianz unter Lorentz-Transformationen) explizit. Der elektromagnetische Feldstärken-Tensor ist durch

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

gegeben.<sup>1</sup> Er transformiert sich unter der Lorentz-Transformation gemäß

$$(F^{\mu\nu})' = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu F^{\alpha\beta} . \quad (4.8)$$

Der Tensor enthält sowohl elektrische als auch magnetische Felder. Eine Lorentztransformation mischt also, wie erwartet, die elektrischen und magnetischen Felder. Der 4er Potentialvektor wird als die fundamentale physikalische Größe betrachtet. Die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  können aus  $A^\mu$  hergeleitet werden.

## 4.2 Eichfreiheit, Photon

Das Photon wird durch das 4-er Potential  $A^\mu$  beschrieben. Allerdings tritt hier ein Problem auf. Das Photon ist ein masseloses Teilchen und hat damit nur 2 Freiheitsgrade, die seinen Polarisationszuständen entsprechen.<sup>2</sup> Das Vektorfeld hat aber 4 Freiheitsgrade. Das Problem zeigt sich darin, dass das 4-er Potential  $A^\mu$  nicht eindeutig definiert ist. Wir haben eine sogenannte **Eichfreiheit**: Unter der **Eichtransformation**

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \lambda = \left( \phi + \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \vec{A} - \vec{\nabla} \lambda \right) , \quad (4.9)$$

<sup>1</sup>Die homogenen Maxwell-Gleichungen lassen sich schreiben als  $\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0$  mit dem dualen Feldstärkentangens  $\tilde{F}^{\mu\nu} = 1/2 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ .

<sup>2</sup>Das klassische elektromagnetische Feld ist transversal, hat also 2 Freiheitsgrade.

wobei  $\lambda = \lambda(x)$  eine beliebige Funktion des 4-er Vektors  $x^\mu$  ist, wird der elektromagnetische Feldtensor nicht geändert, denn

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu(A^\nu + \partial^\nu\lambda) - \partial^\nu(A^\mu + \partial^\mu\lambda) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu . \quad (4.10)$$

Eichsymmetrie bedeutet, dass es eine Redundanz in der Beschreibung gibt. D.h., zwei Zustände, die durch eine Eichsymmetrie miteinander in Beziehung stehen, müssen miteinander identifiziert werden. Es handelt sich um den gleichen physikalischen Zustand. Wir haben also einen vergrößerten Phasenraum, der von Eichkurven durchzogen ist, siehe Abb. 4.2. Alle Zustände, die entlang einer gegebenen Linie liegen, können durch eine Eichtransformation erreicht werden und werden miteinander identifiziert. Wir können daher von jeder Eichkurve einen Repräsentanten wählen, wobei es egal ist, welchen wir wählen, da sie alle physikalisch äquivalent sind. Allerdings gibt es hier bessere und weniger gute **Eichungen**, die man wählen kann. Das hängt von dem zu untersuchenden Problem ab. (Vergleichbar mit der Wahl geeigneter Koordinaten z.B. in einem Problem der klassischen Mechanik.) Eine mögliche Eichung ist die

$$\textbf{Lorentz Eichung: } \partial_\mu A^\mu = 0 . \quad (4.11)$$

Die Maxwell-Gleichungen vereinfachen sich unter dieser Bedingung zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \underbrace{\partial_\mu \partial^\nu A^\mu}_{=0} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu . \quad (4.12)$$

Also erhalten wir für die Maxwell-Gleichungen in der Lorentz-Eichung

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = J^\nu . \quad (4.13)$$

Nun ist aber durch die Lorentz-Bedingung das Potential nicht eindeutig definiert. So können wir zum 4-er Potential noch den Gradient einer skalaren Funktion  $\lambda$  hinzuaddieren,

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \lambda , \quad (4.14)$$

wobei

$$\partial_\mu \partial^\mu \lambda = 0 \quad (4.15)$$

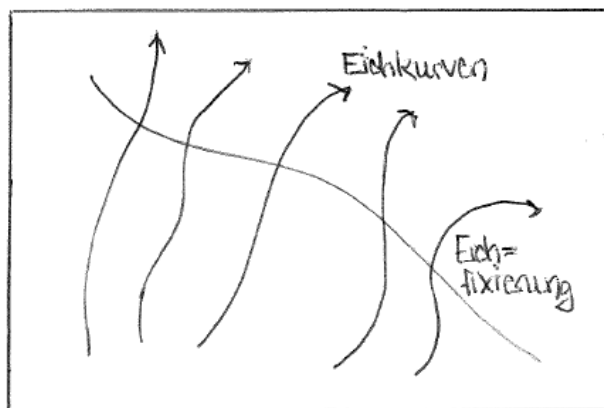


Abbildung 4.2: Eichkurven/Eichbahnen und Eichfixierung.



gelten muss, so dass

$$\partial_\mu A^\mu = 0 . \quad (4.16)$$

Im Fall des Vakuums ( $J^\nu = 0$ ) kann man eine zusätzliche Bedingung stellen. Im Vakuum haben wir

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 , \quad (4.17)$$

und wir setzen

$$A^0 \equiv 0 . \quad (4.18)$$

Es folgt die

$$\text{Coulomb-Eichung: } A^0 \equiv 0 , \quad \vec{\nabla} \vec{A} = 0 . \quad (4.19)$$

Während die Lorentz-Eichung kovariant ist, ist die Coulomb-Eichung nicht kovariant. Jedoch ist sie nützlich, um die physikalischen Freiheitsgrade zu zeigen. Die 3 Komponenten von  $\vec{A}$  genügen einer einzigen Bedingung,  $\vec{\nabla} \vec{A} = 0$ , so dass 2 Freiheitsgrade übrig bleiben.

Für ein freies Photon folgt aus den Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 . \quad (4.20)$$

Vergleich mit

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = 0 \quad (4.21)$$

zeigt, dass es sich um die Klein-Gordon Gleichung für ein masseloses Teilchen handelt. Allerdings besitzt Glg. (4.20) vier Komponenten. Wir können das Photon durch eine ebene Welle beschreiben, die mit einem 4-komponentigen Polarisationsvektor  $\epsilon^\mu(p)$  versehen ist, wobei  $p$  den 4-er Impuls des Photons bezeichnet. Also

$$A^\mu(x) = a e^{-ipx} \epsilon^\mu(p) . \quad (4.22)$$

Der Polarisationsvektor hat eine Beziehung zum Spin des Photons. Aus der Maxwell-Gleichung folgt,

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad (-i)^2 p_\mu p^\mu A^\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad p_\mu p^\mu = p^2 = 0 . \quad (4.23)$$

Wir erhalten also wie erwartet

$$m = 0 \quad \text{und} \quad E = |\vec{p}| . \quad (4.24)$$

Der Polarisationsvektor  $\epsilon^\mu$  besitzt vier Komponenten. Aus der Lorentz-Bedingung folgt,

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu &= (-i) p_\mu a e^{-ipx} \epsilon^\mu(p) = 0 \\ \Rightarrow \quad p_\mu \epsilon^\mu &= 0 . \end{aligned} \quad (4.25)$$

Dies legt eine der vier Komponenten von  $\epsilon^\mu$  fest.

Anwenden der Coulomb-Eichung

$$A^0 \equiv 0 , \quad \vec{\nabla} \vec{A} = 0 \quad (4.26)$$

liefert

$$\epsilon^0 = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\epsilon} \vec{p} = 0 . \quad (4.27)$$

Der Polarisationsvektor  $\vec{\epsilon}$  ist also senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Das freie Photon ist in der Coulomb-Eichung transversal polarisiert.

### 4.3 Lagrangedichte des Elektromagnetismus

Wir suchen eine Lagrangedichte, die die Maxwell-Gleichungen liefert. Diese muss Lorentz- und eichinvariant sein. Für ein freies Feld haben wir die Proca-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} . \quad (4.28)$$

Diese ist Lorentz- und eichinvariant. Sie lässt sich umschreiben in

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{frei}} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}\partial^\mu A^\nu \\ &= -\frac{1}{2}((\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - (\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu)) , \end{aligned} \quad (4.29)$$

wobei wir in der 2. Zeile ausgenutzt haben, dass der Feldstärkentensor antisymmetrisch ist. Es folgt daraus

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{frei}}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = -F_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{frei}}}{\partial A^\nu} = 0 . \quad (4.30)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen liefern

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{frei}}}{\partial A^\nu} - \partial^\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{frei}}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 . \quad (4.31)$$

Dies sind die Maxwell-Gleichungen für den freien Fall, d.h. ohne Quelle.

Für ein Feld mit Quelle addieren wir eine Lorentz-invarianten Term, der das Feld mit der Quelle  $J^\mu$  koppelt. Also

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{frei}} + \mathcal{L}_{\text{Quelle}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu . \quad (4.32)$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{Quelle}}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{Quelle}}}{\partial A^\nu} = -J_\nu . \quad (4.33)$$

Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichung liefert

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu . \quad (4.34)$$

Das sind die Maxwell-Gleichungen bei Ankopplung an eine Quelle. Die gesamte Maxwell-Theorie lässt sich also zusammenfassen in der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu . \quad (4.35)$$

Daraus folgt auch die Kontinuitätsgleichung. Denn

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu \quad \Rightarrow \quad \partial^\nu J_\nu = \underbrace{\partial^\nu \partial_\mu}_{\text{symmetrisch}} \underbrace{F_{\mu\nu}}_{\text{antisymmetrisch}} = 0 . \quad (4.36)$$

## 4.4 Teilchen im elektromagnetischen Feld

In der klassischen Elektrodynamik kann die Bewegung eines geladenen Teilchens der Ladung  $e$  in einem elektromagnetischen Potential durch die kanonische minimale Substitution des kinetischen Impulses und der Energie gewonnen werden,

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A} \quad \text{und} \quad E \rightarrow E - e\phi. \quad (4.37)$$

Wir erweitern diese Methode auf

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu. \quad (4.38)$$

Und in Analogie zur Operatorschreibweise, ersetzen wir

$$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu - eA^\mu. \quad (4.39)$$

Die minimale Substitution legt es dann nahe, dass die Dirac-Gleichung für ein Elektron in Anwesenheit eines elektromagnetischen Felds gemäß

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m]\psi = 0 \quad (4.40)$$

erweitert werden muss.

Damit erhalten wir die gesamte **Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik (QED)**. Sie setzt sich zusammen aus den freien Lagrangedichten für das Elektron und für das Photon und aus dem Wechselwirkungs (WW)-Anteil und lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{L}_{\text{Wechselwirkung}} \\ &= \bar{\psi} [\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m] \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \\ &= \underbrace{\bar{\psi} [i\gamma^\mu \partial_\mu - m] \psi}_{\text{freies Dirac-Feld}} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\text{freies EM Feld}} - \underbrace{(J^\mu + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) A_\mu}_{\text{Quellen und WW zw. Dirac- und EM-Feld}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Anwenden der Euler-Lagrange-Gleichungen für  $A^\mu$  liefert

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu + e\bar{\psi}\gamma_\nu\psi. \quad (4.42)$$

Hierbei ist

$$j_\nu = \bar{\psi}\gamma_\nu\psi \quad (4.43)$$

der Dichtestrom 4-er Vektor der Diracgleichung.

## 4.5 Feldquantisierung

Die Quantisierung der in der Teilchenphysik relevanten Felder wird rigoros in der Vorlesung ‘‘Theoretische Teilchenphysik 1’’ hergeleitet. Hier beschränken wir uns auf grundlegende Überlegungen und geben die Lösungen ohne ausführliche Herleitungen an. Dies überlassen wir der Vorlesung der ‘‘Theoretischen Teilchenphysik 1’’.

In der relativistischen Quantenmechanik haben wir die Klein-Gordon und die Dirac-Gleichung dadurch gefunden, dass wir die Felder klassisch behandelt haben und  $p^\mu$  als Operator betrachtet haben. Dabei ergaben sich aber einige Probleme wie die negative Wahrscheinlichkeit bei der Klein-Gordon Gleichung z.B. Bei der Suche nach einer allgemeinen Theorie der Elementarteilchen müssen wir insbesondere folgende Fragen lösen:

1. Wie beschreiben wir *Bosonen* im Gegensatz zu *Fermionen*?
2. Wie behandeln wir *Teilchen* und *Antiteilchen*? Aufgrund der Energie-Masse-Äquivalenz ist es nicht möglich, eine mit der Relativitätstheorie vereinbare Theorie zu betrachten, die die Anzahl von Teilchen und Antiteilchen erhält. Die Frage ist, wie die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen bzw. Antiteilchen formal behandelt werden kann.

Diese Probleme können in der Quantenfeldtheorie (Qft) durch die Quantisierung des Feldes, 'zweite Quantisierung' genannt, gelöst werden. Das Feld beschreibt ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden, wobei der Ortsvektor die Rolle eines kontinuierlichen Indexes spielt, um die Freiheitsgrade zu identifizieren,

$$\underbrace{\Psi}_{\text{quantisiertes Feld}} \quad \underbrace{(x^\mu)}_{\text{kontinuierlicher Index}} . \quad (4.44)$$

Wir gehen also in der Quantenfeldtheorie von der klassischen Lagrangedichte aus, die die Dynamik des Feldes beschreibt, und interpretieren das Feld als einen Operator mit Kommutationsregeln. In der Qft wird das Feld nicht mehr als Wellenfunktion eines Teilchens interpretiert, sondern vielmehr wird die Theorie als Vielteilchentheorie re-interpretiert. Das Feld entspricht einer physikalischen Größe, deren Anregung Teilchen beschreibt:

$$\text{Anregung des Feldes} \quad \Leftrightarrow \quad \text{ein Teilchen} (\equiv \text{ein Quant des Feldes}) . \quad (4.45)$$

Die Anregungen des Feldes werden mit Hilfe von Quantenoszillatoren beschrieben.<sup>3</sup>

## 4.6 Die Quantisierung des reellen Klein-Gordon Feldes

Wir beginnen mit der klassischen Lagrangedichte für ein Klein-Gordon Feld,

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 . \quad (4.46)$$

Ausgehend von dieser erhält man die Hamiltondichte

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 . \quad (4.47)$$

Diese ist positiv definit. D.h. das Feld besitzt immer eine positive Energie! Das Feld wird nun dadurch quantisiert, dass den Feldern und dem kanonisch konjugierten Impuls,

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{KG}}}{\partial(\partial_0 \phi)}, \quad (4.48)$$

zur gleichen Zeit Kommutatorregeln auferlegt werden,

$$\left[ \phi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}', t) \right] \equiv i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (4.49)$$

$$\left[ \phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t) \right] \equiv \left[ \Pi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}', t) \right] \equiv 0 . \quad (4.50)$$

<sup>3</sup>Frage: Welche Teilchen entsprechen den Anregungen des quantisierten  $A^\mu$ -, Dirac-, Klein-Gordon-Feldes?

Wie können wir nun die Anregungen des Feldes beschreiben?<sup>4</sup> Wir machen wie in der Quantenmechanik den Ansatz einer ebenen Welle. Zusätzlich müssen wir aber noch die Operator-eigenschaften des Feldes ins Spiel bringen und dafür sorgen, dass es aus einer unendlichen Anzahl von Feldquanten besteht. Damit setzen wir an

$$\phi(\vec{x}, t) \equiv \underbrace{\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}}_{\text{Summe über alle Moden}} \underbrace{\frac{1}{2E_p}}_{\text{Normierung}} \underbrace{[a(\vec{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\vec{p})e^{+ipx}]}_{\text{Summe ebener Wellen}}, \quad (4.51)$$

wobei

$$E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (4.52)$$

Dabei sind  $a(\vec{p})$  und  $a^\dagger(\vec{p})$  Fourier-Koeffizienten, die Operatoren sind. Man kann beweisen (siehe Übungsaufgabe), dass aus den Kommutatorregeln folgt

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] \equiv (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (4.53)$$

$$[a(\vec{p}), a(\vec{p}')] \equiv [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] \equiv 0. \quad (4.54)$$

Die Gleichungen erinnern an die Regeln von quantisierten, einfachen harmonischen Oszillatoren. Dies wollen wir weiter untersuchen.

In der Quantenmechanik hatten wir den Teilchenzahl-Operator  $N \equiv a^\dagger a$  kennengelernt. Analog führen wir in unserem Fall den **Teilchenzahl-Operator**

$$N \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \tilde{N}(\vec{p}), \quad \text{wobei } \vec{p} = \text{kontinuierlicher Index} \quad (4.55)$$

ein. Der Operator beschreibt den Zustand des Oszillators mit Impuls  $\vec{p}$ . Wir betrachten ein kontinuierliches Impulsspektrum, so dass der Operator  $\tilde{N}(\vec{p})$  der Teilchendichte, d.h. Anzahl der Teilchen/ $d^3p$  entspricht. Da  $\vec{p}$  eine kontinuierliche Variable ist, gibt es unendlich viele Oszillatoren. Das Feld ist die Summe von unendlich vielen, voneinander unabhängigen Oszillatoren. Der **Grundzustand**, das **Vakuum**, enthält keine Teilchen Und wir definieren ihn als,

$$a(\vec{p})|0\rangle = 0 \quad \text{für alle } \vec{p}. \quad (4.56)$$

Um bestimmte Moden des Feldes anzuregen (zu erzeugen), benutzen wir, ganz analog zur Quantenmechanik, den Erzeugungsoperator, d.h. den Leiteroperator, eines bestimmten Impulses

$$a^\dagger(\vec{p})|0\rangle = |1_{\vec{p}}\rangle, \quad (4.57)$$

$$a^\dagger(\vec{p})a^\dagger(\vec{q})|0\rangle = |1_{\vec{p}}1_{\vec{q}}\rangle, \quad (4.58)$$

$$a^\dagger(\vec{p})a^\dagger(\vec{q})a^\dagger(\vec{q})|0\rangle = |1_{\vec{p}}2_{\vec{q}}\rangle, \quad (4.59)$$

und so fort.

Bestimmen wir die Norm eines Zustandes, so finden wir

$$\langle 0|a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p})|0\rangle \stackrel{(4.56)}{=} \langle 0|[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p})]|0\rangle = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(0) \langle 0|0\rangle = \infty. \quad (4.60)$$

<sup>4</sup>Beachte, das Feld entspricht nicht der Wellenfunktion eines Teilchens.

Diese Art Divergenz kennen wir bereits aus der Quantenmechanik. Von dort wissen wir auch, dass man normierbare Zustände erhält, indem man **Wellenpakete** betrachtet,

$$a_f^\dagger |0\rangle = \int d\tilde{k} f(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle, \quad (4.61)$$

wobei

$$d\tilde{k} \equiv \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \quad (4.62)$$

und

$$E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (4.63)$$

Der Zustand ist normierbar, falls  $f$  quadratintegrabel ist,

$$\langle 0 | a_f a_f^\dagger | 0 \rangle = \int d\tilde{k}_1 \int d\tilde{k}_2 f^*(\vec{k}_1) f(\vec{k}_2) \langle 0 | a(\vec{k}_1) a^\dagger(\vec{k}_2) | 0 \rangle = \int d\tilde{k}_1 |f(\vec{k}_1)|^2 < \infty. \quad (4.64)$$

Die Operatoren  $a$  und  $a^\dagger$  müssen mit Testfunktionen  $f$  verschmiert werden, um normierbare Operatoren zu ergeben.

Die Energie des Feldes bekommen wir aus

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x T_0^0. \quad (4.65)$$

Den Impuls des Feldes erhalten wir aus

$$P_i = \int d^3x T_i^0 = \int d^3x \Pi (\partial_i \phi). \quad (4.66)$$

Einsetzen der Fourierzerlegung des Feldes und des Impulses und Anwenden der Kommutatorregeln für  $a$  und  $a^\dagger$  liefert (siehe Übungsaufgabe) den Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} E_p [2\tilde{N}(\vec{p}) + C]. \quad (4.67)$$

Dabei ist  $\tilde{N}$  der Teilchenzahldichte-Operator,

$$\tilde{N}(\vec{p}) = a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{p}), \quad (4.68)$$

und  $C$  eine  $c$ -Zahl.<sup>5</sup> Der Impuls des Feldes ergibt sich zu

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \vec{p} [2\tilde{N}(\vec{p}) + C]. \quad (4.69)$$

*Das Feld wird also durch eine unendliche Summe von quantisierten einfachen harmonischen Oszillatoren dargestellt.*

Wenn wir uns die Energie anschauen (wir setzen  $C = 1$ ),

$$H = \frac{1}{2} \int d\tilde{p} E_p [2\tilde{N}(\vec{p}) + 1] = \int d\tilde{p} E_p \tilde{N}(\vec{p}) + \underbrace{\frac{1}{2} \int d\tilde{p} E_p}_{\text{Nullpunktenergie} \rightarrow \infty}, \quad (4.70)$$

---

<sup>5</sup>Für ein kontinuierliches Impulsspektrum ist  $C$  gleich der Dirac-Delta-Funktion  $\delta(0)$ , für ein diskretes Spektrum ist  $C$  gleich 1.

so sehen wir, dass das Integral der Energie nach unendlich geht. In der Qft vernachlässigt man allerdings die Nullpunktsenergie, da nur Energieunterschiede eine physikalische Bedeutung besitzen. Der Nullpunkt kann daher so definiert werden, dass die Energie des Feldes durch

$$H = \int d\vec{p} \tilde{N}(\vec{p}) E_p \quad (4.71)$$

gegeben ist. Das Vakuum hatten wir in Glg. (4.56) definiert. Daraus ergibt sich (*zu zeigen*)

$$E_0 = \int d\vec{p} \tilde{N}(\vec{p}) E_p |0\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \vec{P} = 0. \quad (4.72)$$

Ferner finden wir (*zu zeigen*)

$$\begin{aligned} |1_{\vec{p}}\rangle : \quad E &= E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} & \text{und} \quad \vec{P} &= \vec{p} \\ |1_{\vec{p}}1_{\vec{q}}\rangle : \quad E &= E_p + E_q & \text{und} \quad \vec{P} &= \vec{p} + \vec{q}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Wir können diese Anregungen also mit Teilchen identifizieren. Wir haben dann den 1-Teilchen-Zustand, der gegeben ist durch

$$a_f^\dagger |0\rangle = \int d\vec{k} f(\vec{k}) a^\dagger(\vec{k}) |0\rangle, \quad (4.74)$$

denn (*zu zeigen!*)

$$N a_f^\dagger |0\rangle = a_f^\dagger |0\rangle. \quad (4.75)$$

$N$ -Teilchen-Zustände sind durch

$$|n\rangle = \hat{N} a_{f_1}^\dagger \dots a_{f_2}^\dagger |0\rangle \quad (4.76)$$

gegeben, wobei  $\hat{N}$  eine Normierungskonstante ist. Sie hat den Wert  $\hat{N} = 1$ , falls alle  $f_i$  verschieden sind, und  $N = (n!)^{-1/2}$ , falls alle  $f_i$  gleich sind. Für den Fall, dass je  $r_1$  und je  $r_2$  der  $f_i$  gleich sind, haben wir dann

$$\hat{N} = (r_1! r_2!)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.77)$$

Den Raum, der von allen solchen Zuständen (für  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) aufgespannt wird, nennt man den **Fockraum**. Es ist (*zu zeigen!*)

$$N |n\rangle = n |n\rangle. \quad (4.78)$$

Schauen wir uns nun das Problem mit der negativen Energie an. Wir waren auf dies in der klassischen Quantenmechanik gestoßen. Der Grund ist, dass dort

$$e^{-iEt} \rightarrow E > 0 \quad (4.79)$$

$$e^{+iEt} \rightarrow E \leq 0. \quad (4.80)$$

Das Vorzeichen der Phase gibt das Vorzeichen der Energie an. In der Qft haben wir das Feld geschrieben als

$$\phi(\vec{x}, t) \propto \underbrace{a(\vec{p}) e^{-ipx}}_{\text{positive Frequenz}} + \underbrace{a^\dagger(\vec{p}) e^{+ipx}}_{\text{negative Frequenz}}. \quad (4.81)$$

Dabei vernichtet  $a(\vec{p})$  ein Teilchen mit positiver Energie, und  $a^\dagger(\vec{p})$  erzeugt ein Teilchen mit positiver Energie. Die Qft hat also die relativistische Bedingung, die positive und negative Frequenzen verlangt, mit einer Theorie in Einklang gebracht, in der Teilchen und Antiteilchen mit positiver Energie erzeugt und vernichtet werden können.

Wie verhält es sich nun mit der **Statistik des Feldes**? Wir stellen fest, dass aufgrund der Kommutatorregeln der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der Zustand mit zwei identischen Teilchen *symmetrisch unter der Vertauschung der Teilchen* ist,

$$a^\dagger(\vec{p}) a^\dagger(\vec{q}) = a^\dagger(\vec{q}) a^\dagger(\vec{p}) , \quad (4.82)$$

da

$$[a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] \equiv 0 . \quad (4.83)$$

Darüber hinaus *kann eine Impulsmode viele Teilchen besitzen*, da z.B.

$$a_f^\dagger(\vec{p}) a_f^\dagger(\vec{p}) a_f^\dagger(\vec{p}) |0\rangle = |3_{\vec{p}}\rangle . \quad (4.84)$$

Wir schließen daraus, dass die **Klein-Gordon Teilchen Bosonen sind**. Sie folgen der **Bose-Einstein-Statistik**.

## 4.7 Quantisierung des komplexen Klein-Gordon Feldes

Ohne auch hier auf die rigorose Herleitung einzugehen, die TTP1 vorbehalten ist, geben wir die Quantisierung des komplexen Klein-Gordon Feldes an. Das bisher betrachtete Feld  $\phi = \phi^\dagger$  beschreibt selbstkonjugierte Teilchen, also Teilchen, die gleich ihrem Antiteilchen sind. Beispiele hierfür sind das ungeladene Pion  $\pi^0$  oder das Higgsboson. Es gibt allerdings auch Spin-0 Teilchen, die nicht gleich ihrem Antiteilchen sind. Hierunter fallen beispielsweise die geladenen Pionen  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  oder das Kaon  $K^0$ ,  $\bar{K}^0$ . Diese Teilchen sind dann nicht durch ein hermitesches Feld beschreibbar. Der Ansatz für ein geladenes skalares Teilchen geht daher von einem Dublett von zwei hermiteschen Feldern  $\phi_1, \phi_2$  aus,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) . \quad (4.85)$$

Die Quantisierung des geladenen Feldes führt auf

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} [a(\vec{k})e^{-ikx} + \underbrace{b^\dagger(\vec{k})e^{ikx}}_{\neq a^\dagger, \text{ da } \phi \neq \phi^\dagger}] . \quad (4.86)$$

Es gelten die Kommutator-Relationen

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = [b(\vec{k}), b^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4.87)$$

$$\text{alle anderen Kommutatoren} = 0 . \quad (4.88)$$

Die verschiedenen Operatoren werden analog zum hermiteschen Fall als Erzeuger und Vernichter interpretiert,

$$a^\dagger \quad \text{erzeugt ein Teilchen vom Typ } a \text{ mit Spin 0 und Masse } m \quad (4.89)$$

$$b^\dagger \quad \text{erzeugt ein Teilchen vom Typ } b \text{ mit Spin 0 und Masse } m \quad (4.90)$$

$$a \quad \text{vernichtet ein Teilchen vom Typ } a \text{ mit Spin 0 und Masse } m \quad (4.91)$$

$$b \quad \text{vernichtet ein Teilchen vom Typ } b \text{ mit Spin 0 und Masse } m . \quad (4.92)$$



Das heißt, das Feld

$$\phi \quad \text{vernichtet ein Quant vom Typ } a, \text{ erzeugt ein Quant vom Typ } b \quad (4.93)$$

$$\phi^\dagger \quad \text{vernichtet ein Quant vom Typ } b, \text{ erzeugt ein Quant vom Typ } a. \quad (4.94)$$

Die Zustände werden folgendermaßen interpretiert,

$$|a(\vec{k})\rangle \quad \text{ist ein 1-Teilchenzustand mit Masse } m, \text{ Spin } 0 \text{ und Ladung } + \quad (4.95)$$

$$|b(\vec{k})\rangle \quad \text{ist ein 1-Teilchenzustand mit Masse } m, \text{ Spin } 0 \text{ und Ladung } - . \quad (4.96)$$

Es handelt sich um das Teilchen und sein Antiteilchen.

## 4.8 Quantisierung des Dirac-Feldes

Wir wissen bereits aus der relativistischen Quantenmechanik, dass die Lösung der Dirac-Gleichung durch Spinoren gegeben ist. Unser Ansatz für das quantisierte Dirac-Feld muss also auch Spinoren beinhalten. Ferner beschreiben wir mit dem Dirac-Feld geladene Teilchen mit Spin 1/2 wie z.B. das Elektron. Wir müssen daher die möglichen Spinzustände berücksichtigen, und wir benötigen wie beim komplexen skalaren Feld zwei verschiedene Operator-Typen. Der Ansatz für das Dirac-Feld  $\psi$  und sein adjungiertes  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$  ist

$$\psi(x) = \int d\vec{p} \sum_{s=1,2} [a_s(\vec{p}) u_s(\vec{p}) e^{-ipx} + b_s^\dagger(\vec{p}) v_s(\vec{p}) e^{+ipx}] \quad (4.97)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int d\vec{p} \sum_{s=1,2} [a_s^\dagger(\vec{p}) \bar{u}_s(\vec{p}) e^{+ipx} + b_s(\vec{p}) \bar{v}_s(\vec{p}) e^{-ipx}] . \quad (4.98)$$

Bei  $u_s, v_s$  ( $s = 1, 2$ ) handelt es sich um vier Spinoren, bei  $a_s, a_s^\dagger, b_s, b_s^\dagger$  um vier Operatoren,  $s$  summiert über den Spinzustand und  $\vec{p}$  entspricht der Impulsmode. Die Frage ist nun, welchen Vertauschungsregeln die Operatoren genügen. Wir haben im Fall des Klein-Gordon Feldes gesehen, dass die Forderung von Kommutator-Regeln auf Bosonen führte. Da das Dirac-Feld Fermionen beschreibt, fordern wir dementsprechend hier **Antikommutator-Regeln**. Denn, wenn wir fordern

$$\{b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}')\} \equiv b(\vec{p})b^\dagger(\vec{p}') + b^\dagger(\vec{p}')b(\vec{p}) = (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (4.99)$$

und wiederum  $b(\vec{p})$  als Vernichter interpretieren,

$$b(\vec{p})|0\rangle = 0 \quad (4.100)$$

und  $b^\dagger(\vec{p})$  als Erzeuger, also z.B.

$$b^\dagger(\vec{p})|0\rangle = |1_{\vec{p}}\rangle, \quad (4.101)$$

so finden wir mit dem Teilchenzahl-Operator

$$N = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} b^\dagger(\vec{k})b(\vec{k}), \quad (4.102)$$

dass

$$\begin{aligned}
Nb^\dagger(\vec{p})|1_{\vec{p}}\rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} b^\dagger(\vec{k}) b(\vec{k}) b^\dagger(\vec{p}) |1_{\vec{p}}\rangle \\
&= b^\dagger(\vec{p}) |1_{\vec{p}}\rangle - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} b^\dagger(\vec{k}) b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{k}) b^\dagger(\vec{p}) |0\rangle \\
&= b^\dagger(\vec{p}) |1_{\vec{p}}\rangle - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} b^\dagger(\vec{k}) b^\dagger(\vec{p}) (2\pi)^3 2E_p \delta^3(\vec{p} - \vec{k}) |0\rangle \\
&= b^\dagger(\vec{p}) |1_{\vec{p}}\rangle - b^\dagger(\vec{p}) |1_{\vec{p}}\rangle = 0 .
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Es gilt also

$$b^\dagger(\vec{p})|1_{\vec{p}}\rangle = 0 \quad \text{oder} \quad b^\dagger(\vec{p})b^\dagger(\vec{p})|0\rangle = 0 . \tag{4.104}$$

Es gibt für eine Mode also nur zwei unabhängige Zustände, nämlich  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$ . Es können sich also nicht zwei gleiche Zustände in derselben Mode befinden. Die Antikommutations-Relationen führen also auf *Fermionen*. Das *Ausschließungsprinzip* verbietet alle Zustände außer  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$ . Wir fordern also die Antikommutator-Relationen

$$\{a_r(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')\} = \delta_{rs} (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{k}') \tag{4.105}$$

$$\{b_r(\vec{k}), b_s^\dagger(\vec{k}')\} = \delta_{rs} (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{k}') \tag{4.106}$$

$$\{a, b\} = \{a, a\} = \{b, b\} = \dots = 0 . \tag{4.107}$$

In analoger Weise zu dem Vorgehen beim Klein-Gordon Feld kann die Energie bestimmt werden. Man findet (siehe Übungsaufgabe)

$$H = \int d\vec{p} \sum_{s=1,2} E_p \left( \underbrace{a_s^\dagger(\vec{p}) a_s(\vec{p})}_{=\tilde{N}_s^a(\vec{p})} + \underbrace{b_s^\dagger(\vec{p}) b_s(\vec{p})}_{=\tilde{N}_s^b(\vec{p})} \right) , \tag{4.108}$$

wobei  $\tilde{N}_s^a(\vec{p})$  und  $\tilde{N}_s^b(\vec{p})$  die Teilchenzahldichte-Operatoren sind für die beiden Arten von Teilchen im Spinzustand  $s$ . Und wir haben für den Impulsvektor

$$\vec{P} = \int d\vec{p} \sum_{s=1,2} \vec{p} (a_s^\dagger(\vec{p}) a_s(\vec{p}) + b_s^\dagger(\vec{p}) b_s(\vec{p})) . \tag{4.109}$$

Das Dirac-Spinorfeld beschreibt also zwei Arten von Teilchen, z.B. Elektronen und Positronen. Wir interpretieren die Operatoren entsprechend, d.h.

$$a_s^\dagger(\vec{p}) \text{ erzeugt ein Elektron mit Energie } E_p > 0, \text{ Spin } s \text{ und Impuls } \vec{p} \tag{4.110}$$

$$b_s^\dagger(\vec{p}) \text{ erzeugt ein Positron mit Energie } E_p > 0, \text{ Spin } s \text{ und Impuls } \vec{p} . \tag{4.111}$$

Der Ein-Elektronzustand mit Spin  $s$  ist durch

$$|e^-(\vec{p}, s)\rangle = a_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle \tag{4.112}$$

gegeben, und der des Positrons durch

$$|e^+(\vec{p}, s)\rangle = b_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle . \tag{4.113}$$

Schauen wir uns nochmals die Statistik an. Aufgrund der Antikommutator-Relationen gilt

$$a^\dagger(\vec{p})a^\dagger(\vec{q})|0\rangle = -a^\dagger(\vec{q})a^\dagger(\vec{p})|0\rangle . \quad (4.114)$$

D.h., der Zustand ist antisymmetrisch unter der Vertauschung von Teilchen. *Dirac-Spinorfelder beschreiben also Teilchen, die der Fermi-Dirac-Statistik gehorchen.* Es kann i.a. gezeigt werden (siehe TTP1), dass die Bedingung, dass die Energie des Teilchens immer positiv definiert wird, die Antikommutator-Regeln erzwingt.

# Kapitel 5

## Feynman-Regeln, Wirkungsquerschnitt

Wir haben uns bisher vornehmlich mit der freien Theorie beschäftigt, also Feldern, die keinerlei Wechselwirkungen unterliegen. Die Lagrangedichte enthält dann nur in den Feldern quadratische Terme. Mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben sich daraus homogene, lineare Feldgleichungen. Diese sind exakt lösbar durch Fourier-Entwicklung. Im folgenden wollen wir uns mit Wechselwirkungen zwischen den Feldern beschäftigen. Es zeigt sich jedoch, dass dann eine exakte Lösung nicht mehr möglich ist. Man greift daher zur Berechnung der Wechselwirkungsphänomene mithilfe der Störungstheorie auf eine Beschreibung durch freie Felder zurück. Die Lagrangedichte, bzw. der Hamiltonoperator wird dabei als eine Summe aus einem freien Hamilton-Operator  $H_0$  und einem Operator  $H_W$ , der die Wechselwirkung beschreibt, dargestellt,

$$H = H_0 + H_W . \quad (5.1)$$

Es erweist sich als zweckmäßig, im Wechselwirkungsbild zu arbeiten. Dies ist ein Hybrid aus Schrödinger- und Heisenbergbild, in dem sowohl die Zustände  $\psi$  als auch die Operatoren  $O$  zeitabhängig sind. Die Operatoren erfüllen hierbei die Bewegungsgleichungen der freien Theorie. Wir haben also

$$\text{Wechselwirkungsbild: } i\partial_t|\psi\rangle^W = H_W|\psi\rangle^W \quad \text{und} \quad i\partial_t O^W = [O^W, H_0] . \quad (5.2)$$

Daraus folgt, dass die Feldoperatoren wie zuvor eine Fourier-Zerlegung haben.

Wir wollen im folgenden Streuexperimente beschreiben. Die dabei involvierte Wechselwirkung soll hierfür nur über einen endlichen Zeitraum  $[T_1, T_2]$  wirken. Lange bevor die Wechselwirkung stattfindet, können die Teilchen als freie Teilchen behandelt werden. Der zugehörige Zustandsraum kann daher durch einen Fockraum beschrieben werden. Während der Wechselwirkung treten dann komplizierte Prozesse auf. Die verschiedenen Teilchen streuen aneinander, sie annihilieren, oder neue Teilchen werden erzeugt. Lange nachdem die Wechselwirkung stattgefunden hat, können die Teilchen dann wiederum als freie Teilchen behandelt und durch Zustände in einem Fockraum beschrieben werden. Die asymptotischen Zustände  $|\phi(t \rightarrow -\infty)\rangle$  und  $|\phi(t \rightarrow +\infty)\rangle$  erfüllen die freie Bewegungsgleichung mit  $H_W = 0$ . Also haben wir folgendes Bild

$$|\phi(-\infty)\rangle \rightarrow \text{Wechselwirkungsgebiet} \rightarrow |\phi(+\infty)\rangle , \quad (5.3)$$

wobei die Wechselwirkung nur im Zeitraum zwischen  $T_1$  und  $T_2$  stattfindet. Wir werden also keine Wechselwirkungszustände beschreiben. Wenn  $|n\rangle$  die Eigenzustände von  $H_0$  sind, so können wir schreiben

$$|\phi(-\infty)\rangle = \sum_n a_n |n\rangle \quad \text{mit} \quad \sum_n |a_n|^2 = 1 \quad (5.4)$$

$$|\phi(+\infty)\rangle = \sum_n b_n |n\rangle \quad \text{mit} \quad \sum_n |b_n|^2 = 1. \quad (5.5)$$

Der Zustand wird also durch die Wechselwirkung geändert, aber seine Norm bleibt erhalten. Dies entspricht einer Drehung im Zustandsraum. Es gibt somit eine **unitäre Transformation**  $S$  mit

$$|\phi(+\infty)\rangle = S|\phi(-\infty)\rangle. \quad (5.6)$$

Diese sogenannte  $S$ -Matrix muss bestimmt werden.

## 5.1 Bestimmung der $S$ -Matrix

Der Ausgangspunkt für die Bestimmung der  $S$ -Matrix ist die Schrödingergleichung

$$i\partial_t |\phi(t)\rangle = H_W |\phi(t)\rangle \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad |\phi(-\infty)\rangle = |i\rangle. \quad (5.7)$$

Die Differentialgleichung kann in eine Integralgleichung umgeschrieben werden, aus der eine iterative Lösung bestimmt wird, indem immer wieder  $|\phi(t)\rangle$  mit  $t = t_1, t_2, \dots$  in die Gleichung eingesetzt wird. Also

$$\begin{aligned} |\phi(t)\rangle &= |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_W(t_1) |\phi(t_1)\rangle = |i\rangle + (-i) \int_{-\infty}^t dt_1 H_W(t_1) |i\rangle \\ &\quad + (-i)^2 \int_{-\infty}^t dt_1 H_W(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_W(t_2) |\phi(t_2)\rangle \\ &= |i\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n H_W(t_1) H_W(t_2) \dots H_W(t_n) |i\rangle. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Für  $t \rightarrow \infty$  kann daraus die  $S$ -Matrix bestimmt werden. Zunächst wird obiger Ausdruck für  $t \rightarrow \infty$  in eine kompaktere Form gebracht. Dabei verwenden wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 H_W(t_1) H_W(t_2) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 T(H_W(t_1) H_W(t_2)), \quad (5.9)$$

wobei der Zeitordnungoperator  $T$ , definiert über

$$T(H_W(t_1) H_W(t_2)) = \begin{cases} H_W(t_1) H_W(t_2) & t_2 \leq t_1 \\ H_W(t_2) H_W(t_1) & t_2 \geq t_1 \end{cases}. \quad (5.10)$$

Somit ergibt sich

$$|\phi(\infty)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T(H_W(t_1) \dots H_W(t_n)) |i\rangle \equiv S|i\rangle. \quad (5.11)$$

Und damit erhalten wir für die  $S$ -Matrix den Ausdruck

$$S = T \left[ \exp \left( -i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_W(t) \right) \right] = T \left[ \exp \left( i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{L}_W(x) \right) \right]. \quad (5.12)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit vom Anfangszustand  $|i\rangle$  zum Endzustand  $|f\rangle$  in Gegenwart einer Wechselwirkung, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle f|S|i\rangle &= \langle f|\phi(+\infty)\rangle \\ &= \left\langle f \left| \left( 1 + i \int d^4x T \mathcal{L}_W(x) + \frac{i^2}{2!} \int d^4x \int d^4y T(\mathcal{L}_W(x)\mathcal{L}_W(y)) + \dots \right) \right| i \right\rangle \end{aligned} \quad (5.13)$$

Benötigt werden Matrixelemente der Form  $\langle f|T\varphi_1(x_1)\dots\varphi_n(x_n)|i\rangle$ , wobei die  $\varphi_i(x_i)$  allgemein Quantenfelder im Wechselwirkungsbild sein sollen. Ferner sollen die  $\varphi$  sowohl bosonische als auch fermionische Felder sein,  $\varphi_i \in \{\psi, A_\mu, \phi, \dots\}$ .

In der Quantenelektrodynamik haben wir beispielsweise eine Wechselwirkungs-Lagrangedichte der Form  $\mathcal{L}_W \sim e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ , siehe Glg. (4.41). Die ersten Terme der  $S$ -Matrixentwicklung sind also

$$\begin{aligned} \langle f|S|i\rangle &= \left\langle f \left| \left( 1 + ie \int d^4x T [\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)] \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(ie)^2}{2!} \int d^4x \int d^4y T [\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)A_\nu(y)] + \dots \right) \right| i \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Die elektrische Ladung  $e$  ist durch die Feinstrukturkonstante  $\alpha$  gegeben,

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137.036}, \quad (5.15)$$

wobei wir natürliche Einheiten verwendet haben. Die elektrische Ladung ist somit ziemlich klein, so dass die Entwicklung der  $S$ -Matrix als Funktion der elektrischen Ladung schnell konvergieren wird und die Näherung mit nur einigen Termen im Allgemeinen gut sein wird.

## 5.2 Von der $S$ -Matrix zu den Feynman-Diagrammen

Wir sind in der Teilchenphysik an Prozessen der Art

$$\underbrace{A + B + C + \dots}_{m \text{ Teilchen}} \rightarrow \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots}_{n \text{ Teilchen}} \quad (5.16)$$

interessiert. Dabei kann die Anzahl  $m$  der Teilchen im Anfangszustand von der Anzahl  $n$  der Teilchen des Endzustandes verschieden sein. In der Qft müssen wir also die folgende Amplitude berechnen

$$\underbrace{\langle \vec{p}_1 \vec{p}_2 \dots |}_{\text{Endzustand}} S \underbrace{|\vec{p}_A \vec{p}_B \dots \rangle}_{\text{Anfangszustand}}. \quad (5.17)$$

Dabei ist z.B. für ein Boson der Zustand  $|\vec{p}_1\rangle$  durch

$$|\vec{p}_1\rangle = a^\dagger(\vec{p}_1)|0\rangle \quad (5.18)$$

gegeben. Für ein Fermion mit Spin  $s_1$  haben wir

$$|\vec{p}_1\rangle = a_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1)|0\rangle. \quad (5.19)$$

Die verschiedenen Prozesse können dadurch bestimmt werden, dass man die Fourierzerlegungen der Felder im  $S$ -Matrixelement einsetzt und die diversen Kommutator- bzw. Antikommutator-Relationen verwendet. Ferner werden unendliche Konstanten, analog zu den Glgen. (4.70) und (4.71) weggelassen. Diese Rechnungen sind recht aufwendig. Jedoch lassen sich daraus Rechenregeln ableiten, die angeben, wie die einzelnen Bausteine des Prozesses berechnet werden. Diese Regeln werden (nach Richard P. Feynman, Abb. 5.1) **Feynmanregeln** genannt und werden in der Vorlesung TTP1 rigoros hergeleitet. Hier beschränken wir uns darauf, die Regeln anzugeben und zu verwenden, um einfache Prozesse zu berechnen. Um einen bestimmten Prozess zu berechnen wird dieser zunächst graphisch in einem sogenannten **Feynman-Diagramm** dargestellt. Mit jedem darin enthaltenen Baustein verbinden sich **Feynmanregeln**, die sukzessive eingesetzt werden, um zur  $S$ -Matrix des Prozesses zu gelangen.

*Anekdoten:* Zu Richard P. Feynman gibt es viele Anekdoten, die seinen Büchern “*Surely You’re Joking, Mr. Feynman*” und “*What do you care what other people Think?!*” entnommen werden können. Hier eine Anekdote anderer Art:

Bürger haben in München eine Straßenecke zum Feynman-Platz ernannt. Der Grund hierfür ist, dass die Straßen, die dort zusammenlaufen, ein Feynman-Diagramm bilden. So verläuft nördlich und westlich die Kanalstraße, südlich die Liebherrstraße und östlich die Mannhardtstraße, siehe Abb. 5.2.

### 5.3 Feynmandiagramme und Feynmanregeln der QED

Die in der QED auftretenden Teilchen sind Leptonen, also z.B. Elektronen und Positronen, sowie das Photon, das die Wechselwirkung zwischen den Leptonen vermittelt. Die Elektro-



Abbildung 5.1: Der amerikanische Physiker und Nobelpreisträger von 1965 (außerdem Bongo-Spieler, Zeichner, zeitweise Molekularbiologe, Hieroglyphen-Entzifferer, Patent-Inhaber des Atomflugzeugs, Buchautor) Richard P. Feynman, \*11.5.1918 in Queens, New York, †15.2.1988 in Los Angeles.



Abbildung 5.2: Der Feynman-Platz in München.

nen, Positronen und Photonen können sich im Raum ausbreiten, **propagieren**, oder miteinander wechselwirken.

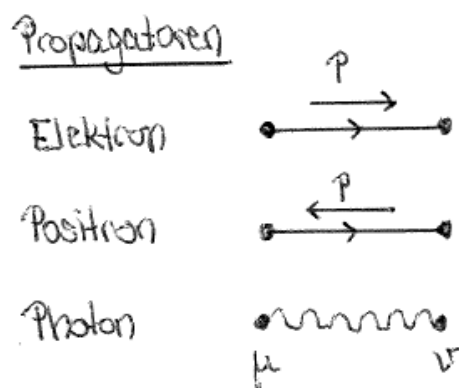


Abbildung 5.3: Feynman-Propagator für das Elektron (oben), das Positron (Mitte) und das Photon (unten).

Feynman-Propagator: Die Propagation von Elektronen und Positronen, der Propagator, wird graphisch durch eine durchgezogene Linie dargestellt, die mit einem Pfeil versehen ist, der den Ladungsfluss angibt. Abbildung 5.3 (oben) zeigt den Propagator eines Elektrons mit Viererimpuls  $p^\mu$ . Per Konvention ist der Pfeil auf der Linie der Fluss der Ladung  $-e$ , der Pfeil über der Linie zeigt die Richtung des 4er-Impulses an. Die Zeitrichtung hier und im folgenden ist stets von links nach rechts. Ein Elektron mit Ladung  $-e$  breitet sich also vorwärts in der Zeit aus. Dies entspricht der Ausbreitung eines Positrons mit Ladung  $+e$  rückwärts in der Zeit. Der Propagator des Positrons ist in Abb. 5.3 (Mitte) dargestellt. Beachte, dass der 4-er Impuls des Positrons stets entgegengesetzt dem Fluss der Ladung ist.

Der Photonpropagator, Abb. 5.3 ist durch eine gewellte Linie dargestellt. Die beiden Lorentzindizes symbolisieren die zu den 4-er Polarisationsvektoren gehörigen Indizes des



Photons an Anfangs- und Endpunkt.

Vertex:  $e\bar{e}\gamma$

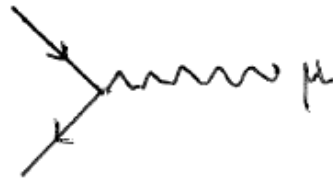


Abbildung 5.4: Feynman-Graph für den Elektron-Positron-Photon-Vertex.

Der Vertex: Die Wechselwirkung zwischen einem Elektron, Positron und Photon ist in Abb. 5.4 dargestellt.

Die mit den Feynman-Diagrammen verbundenen Rechenregeln, die Feynman-Regeln, sind in den Abb.en 5.5 und 5.6 angegeben. Abbildung 5.5 zeigt die Feynmanregeln der Propagatoren des Elektrons/Positrons und des Photons sowie des Vertex. Das  $i\epsilon$  ( $\epsilon \ll 1$ ) in den Propagatoren sorgt dafür, dass in der Ausbreitung die Kausalität gewährleistet ist.

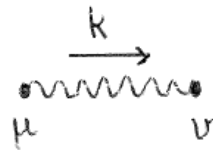
Feynmanregeln

Propagatoren:

Elektron:  $\frac{i}{p - m + i\epsilon}$



Photon:  $\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$



Vertex:  $e\bar{e}\gamma$

$-ie\gamma^\mu$

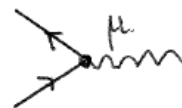


Abbildung 5.5: Feynman-Regeln der QED: Elektron- (oben), Photonpropagator (Mitte) und  $e^+e^-\gamma$ -Vertex (unten).

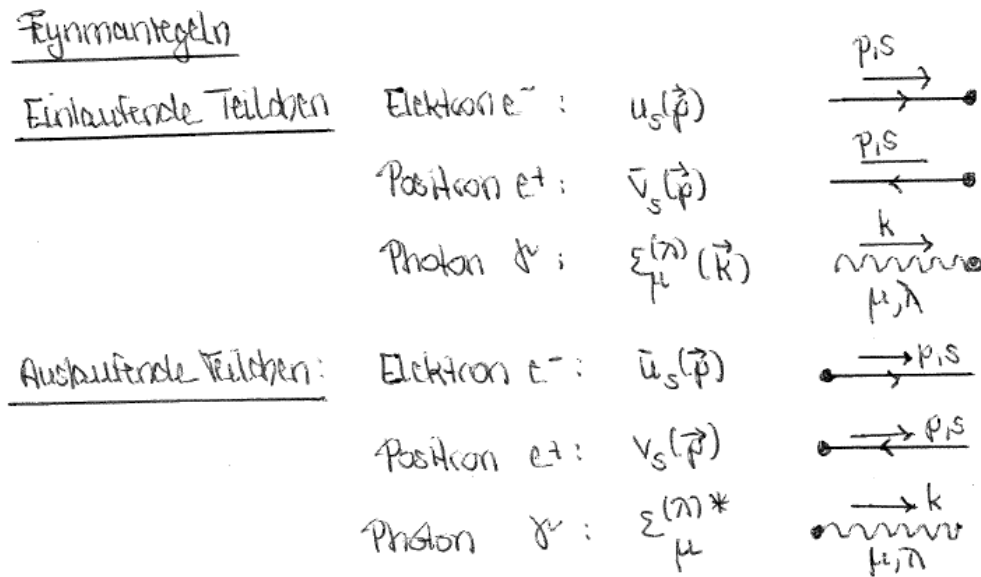


Abbildung 5.6: Feynman-Regeln der QED: Einlaufende Teilchen (oben) und auslaufende Teilchen (unten).

Einlaufende und auslaufende Teilchen: Um die verschiedenen Prozesse berechnen zu können, benötigen wir auch noch die Feynmanregeln für ein- und auslaufende Teilchen. Diese sind in Fig. 5.6 angegeben. Dabei bezeichnet  $s$  den Spinzustand des Elektrons/Positrons und  $\lambda$  den Polarisationszustand des Photons.

Aufstellen der Feynman-Diagramme: Die Feynmanregeln können nun verwendet werden, um wie beim Legospielen die einzelnen Bausteine eines Prozesses zusammenzustöpseln (= Feynman-Diagramm) und sie gemäß den Feynmanregeln mit Rechenregeln zu identifizieren. So zeigt Abb. 5.7 die Elektron-Positron-Streuung in eine Myon-Antimyon-Paar.<sup>1</sup> Bei der Aufstellung der Feynman-Diagramme ist zu beachten, dass nur solche Diagramme gezeichnet werden, die mit der Theorie und ihren Wechselwirkungen verträglich sind. Ferner müssen alle möglichen topologisch verschiedenen Diagramme berücksichtigt werden, die zu der Ordnung in der Kopplungskonstante gehören, bis zu der der Prozess berechnet werden soll. Dies ist in Abb. 5.8 für den Prozess der Paarvernichtung eines Elektrons und Positron in zwei Photonen dargestellt.

Feynmanregeln der QED: Bei der Aufstellung der zu einem bestimmten Prozess gehörigen Streuamplitude sind neben der Anwendung der oben angegebenen Feynmanregeln noch weitere Regeln zu beachten:

- \* An jedem Vertex gilt Impulserhaltung.
- \* Multipliziere die Amplitude (s.u.) mit  $(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i)$ , wobei  $P_f$  ( $P_i$ ) die Summe der Impulse der auslaufenden (einlaufenden) Teilchen ist.
- \* Für jede geschlossene Schleife muss ein Integral über den zugehörigen 4er-Impuls ausgeführt werden,  $\frac{d^4l}{(2\pi)^4}$ .

<sup>1</sup>Wie vorher bereits erwähnt, zeigt der Zeitpfeil immer von links nach rechts.

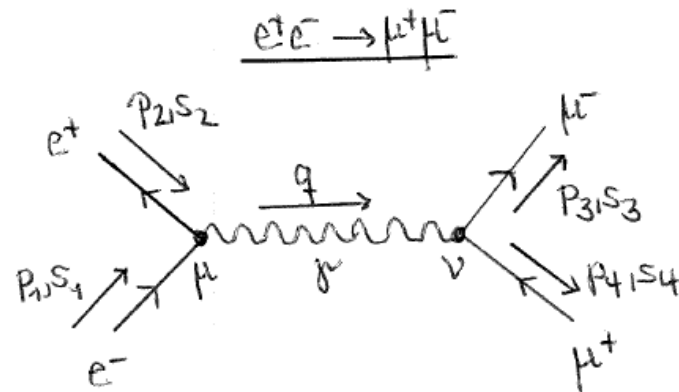


Abbildung 5.7: Feynman-Diagramm des Prozesses  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  in führender Ordnung.

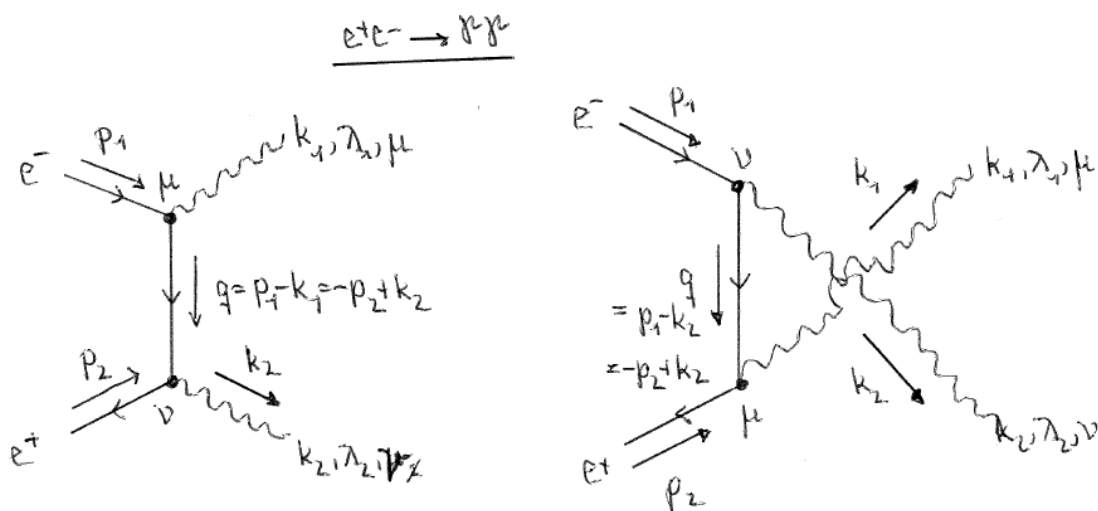


Abbildung 5.8: Die zur Elektron-Positron-Vernichtung in 2 Photonen beitragenden Feynman-Diagramme in führender Ordnung.

- \* Jede Fermionschleife erhält einen Faktor  $(-1)$ , und es muss die Spur gebildet werden.
- \* Bei der Vertauschung von äußeren Fermionen muss ein Faktor  $(-1)$  hinzugefügt werden.
- \* Beim Aufschreiben des mathematischen Ausdrucks gemäß den Feynmanregeln ist zu beachten, dass die Fermionlinien stets **entgegen der Fermionrichtung** durchlaufen werden.

## 5.4 Der Prozess $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$

Wir wollen die Feynmanregeln für den Prozess der Paarvernichtung eines Elektrons und Positrons in zwei Photonen anwenden. Der uns interessierende Streuprozess ist also

$$e^-(p_1, s_1) + e^+(p_2, s_2) \rightarrow \gamma^\mu(k_1, \lambda_1) + \gamma^\nu(k_2, \lambda_2). \quad (5.20)$$

Hierbei bezeichnen  $p_1$  und  $p_2$  jeweils den Viererimpuls des einlaufenden Elektrons bzw. Positrons und  $k_1$  und  $k_2$  den Viererimpuls von jeweils einem auslaufenden Photon. Die zugehörigen Spinzustände von Elektron und Positron sind mit  $s_1$  und  $s_2$  bezeichnet, die Polarisationszustände der auslaufenden Photonen mit  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . Die Photonen tragen ferner die Lorentz-Indizes  $\mu$  und  $\nu$ . (Es handelt sich um Spin-1 Teilchen.) Um die Streuamplitude zu erhalten, müssen wir das zu diesem Prozess gehörige  $S$ -Matrixelement bestimmen. Dieses lässt sich gemäß Glg. (5.14) in eine Reihe in der Kopplungskonstanten entwickeln, welche in der QED  $e$  ist. Mit Hilfe der Feynman-Diagramme und Feynmanregeln können wir auf relativ einfache Weise das Streumatrixelement bestimmen. Dazu müssen wir zunächst alle die zu dem Prozess beitragenden Diagramme zeichnen, die mit der Theorie verträglich sind. Es dürfen also nur solche Wechselwirkungen verwendet werden, die in der Theorie erlaubt sind. In der QED ist dies der  $e^+e^-\gamma$ -Vertex. Hier müssen wir darauf achten, dass wir strikt nur die Diagramme zeichnen, die jeweils von der gleichen Ordnung in der Kopplungskonstanten sind. Die zu dem Prozess Glg. (5.20) beitragenden Diagramme in der niedrigsten Ordnung in der Störungstheorie sind in Abb. 5.8 dargestellt. Es gibt zwei topologisch verschiedene Diagramme. In der Abbildung wurden bereits sämtliche Impulse, Spin- und Polarisationszustände sowie Lorentz-Indizes verteilt. Das erleichtert die Aufstellung der Streuamplitude durch Anwenden der Feynmanregeln. Ferner wurde bereits die Impulserhaltung an den Vertizes ausgenutzt, was dazu führt, dass im ersten Diagramm

$$q = p_1 - k_1 = -p_2 + k_2 \quad (5.21)$$

und im zweiten Diagramm

$$q' = p_1 - k_2 = -p_2 + k_1. \quad (5.22)$$

Die Gesamtamplitude  $\mathcal{M}$  des Streuprozesses setzt sich aus den zu den beiden Diagrammen gehörigen Streuamplituden  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  zusammen. Also ist

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2. \quad (5.23)$$

Wir stellen nun durch Anwenden der Feynmanregeln die Amplitude  $\mathcal{M}_1$  auf. Hierbei müssen wir beachten, dass wir die Fermionlinien entgegen der Fermionrichtung durchlaufen. Das bedeutet, dass wir beim Aufschreiben der Amplitude  $\mathcal{M}_1$  bei dem Positron unten links beginnen müssen. Dies ist ein einlaufendes Antiteilchen, so dass wir die Regel hierfür, nämlich  $\bar{v}(p_2, s_2)$  verwenden, dann laufen wir weiter zum ersten Vertex mit Lorentzindex  $\nu$  und setzen dort die Regel für den zugehörigen Vertex ein. Als nächstes durchlaufen wir den Elektronpropagator, für den wir die Regel für den Propagator einsetzen. Wir gelangen dann zum Vertex mit Index  $\mu$  und verwenden die entsprechende Vertex-Regel. Zu guter Letzt gelangen wir beim einlaufenden Elektron an, für das  $u(p_1, s_1)$  zu verwenden ist. Jetzt fehlen nur noch die Regeln für die beiden auslaufenden Photonen, die durch  $\epsilon_\mu^{(\lambda_1)*}(k_1)$  und  $\epsilon_\nu^{(\lambda_2)*}(k_2)$  gegeben sind. Wir erhalten also insgesamt

$$\mathcal{M}_1 = \bar{v}_2(p_2, s_2) (-ie\gamma^\nu) \frac{i}{\not{q} - m + i\epsilon} (-ie\gamma^\mu) u(p_1, s_1) \epsilon_\mu^{(\lambda_1)*}(k_1) \epsilon_\nu^{(\lambda_2)*}(k_2). \quad (5.24)$$

Nun muss noch die Amplitude  $\mathcal{M}_2$  bestimmt werden. *Versuchen Sie sich einmal selbst daran.*

## 5.5 Der Wirkungsquerschnitt

Wir haben uns bisher damit beschäftigt, das zu einem Prozess gehörige Matrixelement, bzw. die zugehörige Streuamplitude zu bestimmen. Das Matrixelement enthält die Dynamik des Prozesses, ist aber noch keine physikalisch beobachtbare Größe, d.h. **Observable**. Hierfür muss der Wirkungsquerschnitt berechnet werden. Er ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, mit der zwischen einem einlaufenden Zustand und dem auslaufenden Zustand der in Frage kommende Prozess stattfindet, der durch das  $S$ -Matrixelement beschrieben wird. Der Wirkungsquerschnitt hat die Dimension einer Fläche und wird typischerweise in **Barn** ( $1\text{b} = 10^{-24}\text{cm}^2$ ) angegeben, also z.B. pb (picobarn) =  $10^{-12}\text{b}$  oder fb (femtobarn) =  $10^{-15}\text{b}$ . Ein anschauliches Maß für die Stärke des jeweils betrachteten Prozess ist durch die Vorstellung vom Wirkungsquerschnitt als einer jedem Targetteilchen zugeordneten Trefferfläche gegeben. Je häufiger der Prozess ist, desto größer ist die Trefferfläche. Wir wollen im folgenden sehen, wie sich der dem Prozess zugehörige Wirkungsquerschnitt bestimmen lässt. Wie im Fall der nicht-relativistischen **Goldenen Regel von Fermi** gibt es eine relativistisch kovariante Regel, um den Wirkungsquerschnitt zu bestimmen.

### 5.5.1 Fermis Goldene Regel

Wir erinnern uns an Fermis Goldene Regel, die eine Gleichung in der quantenmechanischen Störungstheorie ist. Ausgangspunkt ist der Hamiltonoperator  $H$ , der sich aus dem Hamiltonoperator  $H_0$  zusammensetzt, für welchen das System exakt lösbar ist, und einem Störoperator  $V$ ,

$$H = H_0 + V . \quad (5.25)$$

Fermis Goldene Regel ist eine theoretische Vorhersage für die Übergangsrate, also die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit, mit der ein Anfangszustand  $|i\rangle$ , der dem Einfluss einer Störung ausgesetzt ist, in einen Endzustand  $|f\rangle$  übergeht. Die Übergangsrate ist durch

$$\begin{aligned} W_{fi} &= (2\pi) \int dE_f |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \rho(E_f) \\ &= (2\pi) |V_{fi}|^2 \rho(E_f) \end{aligned} \quad (5.26)$$

gegeben. Die Integration wird über die möglichen Endzustände durchgeführt. Hierbei bezeichnet  $V_{fi}$  das zu diesem Übergang gehörende Matrixelement des Störoperators  $V$ ,  $\rho(E_f)$  die Zustandsdichte der beobachteten Endzustände der Energie  $E_f$  und  $|i\rangle$  und  $|f\rangle$  die Eigenzustände zu dem ungestörten Hamiltonoperator  $H_0$ , der um eine Störung  $V$  erweitert wird.

### 5.5.2 Der Wirkungsquerschnitt für Teilchenreaktionen

Wir sind an Reaktionen der Art

$$a_1(p_1) + a_2(p_2) \rightarrow b_1(q_1) + \dots + b_n(q_n) \quad (5.27)$$

interessiert. Zwei Teilchen streuen also in einen Endzustand mit  $n$  Teilchen, wobei in einem bestimmten Zeitintervall ein Prozess stattfindet, der durch das  $S$ -Matrixelement beschrieben

wird. Das  $S$ -Matrixelement für den Übergang von Anfangs- zu Endzustand schreiben wir als

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta \left( \sum_f p_f - \sum_i p_i \right) \langle f | \mathcal{T} | i \rangle . \quad (5.28)$$

Der erste Term beschreibt eine triviale Reaktion, wo keinerlei Wechselwirkung vorliegt. Diese ist im zweiten Term enthalten. Über die Glg. (5.28) definieren wir die Lorentz-invariante  $\mathcal{T}$ -Matrix. Die  $\delta$ -Funktion beschreibt die Energie-Impuls-Erhaltung.

Der Wirkungsquerschnitt ist gegeben durch

$$\sigma = \frac{\text{Übergangsrate} (\equiv \text{Zahl der Ereignisse/Zeit})}{\text{Fluss der einlaufenden Teilchen}} . \quad (5.29)$$

Dabei sind Zähler und Nenner im vorgegebenen Lorentz-System definiert. So kann zum Beispiel  $a_2$  ruhend sein, während  $a_1$  einläuft. Ferner nehmen wir an, dass  $i \neq f$ , und wir arbeiten mit Impulseigenzuständen im Anfangs- und Endzustand. Alle 1-Teilchenzustände  $|p_i\rangle$ ,  $|q_i\rangle$  sind auf 1 normiert bezüglich des Lorentz-invarianten Maßes

$$\frac{d^4 q_i}{(2\pi)^3} \delta(q_i^2 - m_i^2) \theta(q_i^0) = \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2q_i^0} , \quad \text{mit } q_{i0} = +\sqrt{\vec{q}_i^2 + m_i^2} , \quad (5.30)$$

wobei  $\theta$  die Heaviside-Funktion bezeichnet. Der differentielle Wirkungsquerschnitt der Reaktion Glg. (5.27) ist durch<sup>2</sup>

$$d\sigma = \underbrace{\frac{1}{2w(s, m_1^2, m_2^2)}}_{\text{Flussfaktor}} \underbrace{\prod_{j=1}^n \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3 2q_j^0} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum_{j=1}^n q_j - p_1 - p_2 \right)}_{\text{Lorentz-invariantes Phasenraumelement}} \cdot \underbrace{|\langle b_1(\vec{q}_1) \dots b_n(\vec{q}_n) | \mathcal{T} | a_1(\vec{p}_1) a_2(\vec{p}_2) \rangle|^2}_{\tau\text{-Matrixelement}} \quad (5.31)$$

gegeben, wobei  $m_{1,2}$  die Massen der einlaufenden Teilchen bezeichnen. Der Flussfaktor beschreibt in kovarianter Form den Fluss der Teilchen im Anfangszustand. Er ist gegeben durch

$$2w(s, m_1^2, m_2^2) = 4[(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{\frac{1}{2}} . \quad (5.32)$$

Der Phasenraum ist universell und Lorentz-invariant. Auch das Matrixelement ist Lorentz-invariant, hängt aber vom jeweiligen Prozess ab. Die 4-er  $\delta$ -Funktion garantiert die 4er-Impulserhaltung.

#### Weitere Bemerkungen:

1. Bei Teilchen mit Spin ist folgendermaßen zu verfahren: Für jedes unpolarisierte Teilchen im Anfangszustand ist über seine Spinzustände zu mitteln. Für jede nicht beobachtete Spinpolarisation eines Teilchens im Endzustand ist über entsprechende Spinzustände zu summieren. Das heißt hier:

$$|\mathcal{T}_{fi}|^2 \rightarrow \sum'_{\text{Spins}} |\mathcal{T}_{fi}|^2 \equiv \frac{1}{(2s_{a_1} + 1)(2s_{a_2} + 1)} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{T}_{fi}|^2 , \quad (5.33)$$

<sup>2</sup>Für die rigorose Herleitung wird wiederum auf TTP1 verwiesen.

wobei  $s_{a_1}, s_{a_2}$  jeweils der Spin von Teilchen  $a_1$  und  $a_2$  ist. Für die Spinsummen ist zu verwenden (*siehe Übungsblatt*)

$$\sum_{s=1}^2 u(\vec{p}, s)_\alpha \bar{u}(\vec{p}, s)_\beta = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \quad (5.34)$$

$$\sum_{s=1}^2 v(\vec{p}, s)_\alpha \bar{v}(\vec{p}, s)_\beta = (\not{p} - m)_{\alpha\beta} \quad (5.35)$$

Beachte, der Gewichtungsfaktor  $1/(2s+1)$  gilt nur für massive Teilchen. Wenn es sich um ein Photon oder Gluon handelt, dann ist der Gewichtungsfaktor 2, da masselose Teilchen nur 2 physikalische Polarisationszustände haben.

2. Falls  $n_0$  der  $n$  Endzustandsteilchen identisch sind, dann ist der Zustand nicht korrekt normiert. Es fehlt der Faktor  $1/\sqrt{n_0!}$ . Das heißt, in diesem Fall muss  $d\sigma$  mit  $1/n_0!$  multipliziert werden. Also

$$d\sigma = \frac{1}{2w} (\prod_j d\tilde{q}_j) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(Q - P) \sum'_{\text{Spins}} |\mathcal{T}_{fi}|^2 \cdot \frac{1}{n_0!} . \quad (5.36)$$

3. Der Wirkungsquerschnitt wird üblicherweise in der Einheit *barn* angegeben. Es gilt

$$\frac{1}{\text{GeV}^2} = 0.389 \cdot 10^{-3} \text{ barn} . \quad (5.37)$$

Der Wirkungsquerschnitt ist mit der Anzahl der Ereignisse über die sogenannte Luminosität  $L$  verknüpft:

$$N = L \cdot \sigma . \quad (5.38)$$

Diese kann über einen sehr genau bekannten Referenzwirkungsquerschnitt bestimmt werden, den man in der Theorie sehr genau berechnet hat. Zum Beispiel benutzt man an Elektron-Positron-Collidern den Wirkungsquerschnitt der Bhabha-Streuung  $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ , an Hadroncollidern wie dem LHC z.B. die Produktion von  $W$ -Bosonen,  $pp \rightarrow W^+W^-$ . Die Luminosität ist also grob gesagt ein Maß für den einlaufenden Strom. So wurde für das LEP (1993-1998) eine integrierte Luminosität von etwa  $200 \text{ pb}^{-1}$  gemessen, für das Tevatron Run II (4/02-9/11) - D0 -  $11.9 \text{ fb}^{-1}/\text{delivered}$  ( $10.7 \text{ fb}^{-1}/\text{recorded}$ ), LHC (4/10-12/12) ATLAS  $23.3 \text{ fb}^{-1}$  delivered ( $21.7 \text{ fb}^{-1}$  recorded), LHC CMS  $23.3 \text{ fb}^{-1}$  delivered ( $21.79 \text{ fb}^{-1}$  recorded). Und bei run 2: (18.4.-31.10.2016) ATLAS  $38.9 \text{ fb}^{-1}$  delivered ( $36.0 \text{ fb}^{-1}$  recorded), (1.5.-31.10.2016) CMS  $41.07 \text{ fb}^{-1}$  delivered ( $37.82 \text{ fb}^{-1}$  recorded).

# Kapitel 6

## Der Prozess $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Wir wollen nun das bisher Gelernte auf die Berechnung des Wirkungsquerschnitts für den Prozess

$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \tag{6.1}$$

anwenden. Wir bleiben dabei strikt im Rahmen der QED, berücksichtigen also nur Wechselwirkungen zwischen Photonen und geladenen Leptonen.

### 6.1 Das Myon

Das Myon gehört zur 2. Generation der drei Leptonfamilien. Hier sind zunächst einige Fakten über dieses Elementarteilchen.

- ◇ Das Myon ist in all seinen Eigenschaften (Quantenzahlen, Wechselwirkungen usw.) identisch zum Elektron, bis auf seine Masse:
- ◇ Das Myon hat eine Masse von

$$m_\mu = 105.6 \text{ MeV} \approx 200 m_e . \tag{6.2}$$

- ◇ Die Wechselwirkung mit dem Photon ist gegeben durch (Fig. 6.1)  $-ie\gamma^\nu$ .



Abbildung 6.1: Der Photon-Myon-Myon Vertex.



- ◇ Allerdings ist das Myon im Gegensatz zum Elektron instabil. Es zerfällt über die schwache Wechselwirkung<sup>1</sup> gemäß (siehe Fig. 6.2)

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu . \quad (6.3)$$

Hierbei ist  $\bar{\nu}_e$  das Anti-Elektron-Neutrino und  $\nu_\mu$  das Myon-Neutrino. Die Massen  $m_{\nu_{e/\mu}}$  der Neutrinos sind sehr klein, aber von null verschieden, wie wir heute wissen.

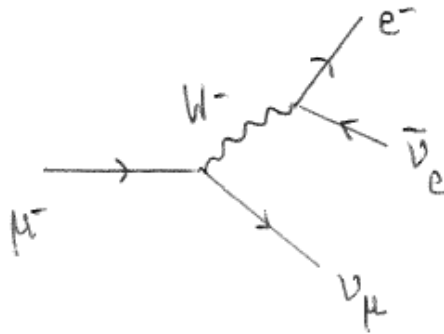


Abbildung 6.2: Der Myon-Zerfall.

- ◇ Die Berechnung der Zerfallsbreite liefert

$$\Gamma_\mu = \frac{G_F^2 \cdot m_\mu^5}{192 \pi^3} = 3.001 \cdot 10^{-19} \text{ GeV} , \quad (6.4)$$

wobei  $G_F$  die Fermi-Konstante ist,

$$G_F = 1.16637 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{GeV}^2} . \quad (6.5)$$

Und für die Lebensdauer ergibt sich

$$\frac{\hbar}{\Gamma_\mu} = \frac{6.582 \cdot 10^{-25} \text{ GeV} \cdot \text{s}}{3.001 \cdot 10^{-19} \text{ GeV}} \approx 2.19 \cdot 10^{-6} \text{ s} . \quad (6.6)$$

## 6.2 Der Wirkungsquerschnitt für $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

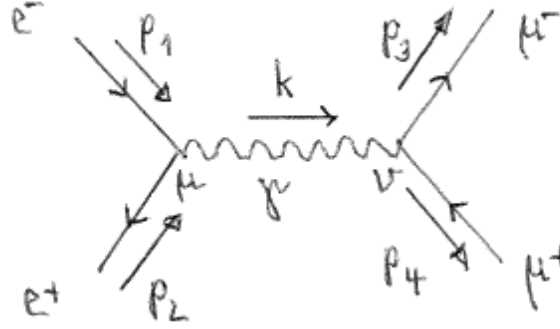
Zu dem Prozess

$$e^-(p_1, s_1) + e^+(p_2, s_2) \rightarrow \mu^-(p_3, s_3) + \mu^+(p_4, s_4) \quad (6.7)$$

trägt nur ein Diagramm bei, siehe Fig. 6.3. Wegen Impulserhaltung haben wir für den Photonimpuls  $k$ ,

$$k = p_1 + p_2 = p_3 + p_4 . \quad (6.8)$$

<sup>1</sup>Diese werden wir später in der VL noch genauer kennenlernen.


 Abbildung 6.3: Der Prozess  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

Wir führen die abkürzende Schreibweise  $u_1 \equiv u(\vec{p}_1, s_1)$  etc. ein. Damit haben wir unter Anwendung der Feynmanregeln für das Diagramm

$$\mathcal{M} = \bar{v}_{2\alpha}(-ie)\gamma_{\alpha\beta}^\mu u_{1\beta} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} \bar{u}_{3\delta}(-ie)\gamma_{\delta\rho}^\nu v_{4\rho}. \quad (6.9)$$

Hier bezeichnen  $\alpha, \beta, \delta, \rho$  die Spinorindizes. Für  $\mathcal{M}^\dagger$  finden wir ( $\sigma, \tau, \eta, \omega$  bezeichnen die Spinorindizes)

$$\mathcal{M}^\dagger = (ie)^2 \bar{v}_{4\sigma} \gamma_{\sigma\tau}^{\nu'} u_{3\tau} \frac{ig_{\mu'\nu'}}{k^2 - i\epsilon} \bar{u}_{1\eta} \gamma_{\eta\omega}^{\mu'} v_{2\omega}. \quad (6.10)$$

Hier haben wir verwendet, dass

$$\begin{aligned} (\bar{v}_a \gamma^\mu u_b)^\dagger &= (v_a^\dagger \gamma_0 \gamma^\mu u_b)^\dagger = u_b^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma_0^\dagger v_a = u_b^\dagger \gamma_0 \gamma^\mu \underbrace{\gamma_0 \gamma_0}_{=1} v_a = \bar{u}_b \gamma^\mu v_a \quad \text{und analog} \\ (\bar{u}_a \gamma^\mu v_b)^\dagger &= \bar{v}_b \gamma^\mu u_a, \end{aligned} \quad (6.11)$$

denn

$$\bar{v} \equiv v^\dagger \gamma_0 \quad \text{und} \quad \bar{u} \equiv u^\dagger \gamma_0 \quad (6.12)$$

$$\gamma_0^\dagger = \gamma_0 \quad (6.13)$$

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0. \quad (6.14)$$

Wir berechnen den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt. Das heißt, wir mitteln über die Polarisierungen im Anfangszustand und summieren über die Polarisierungen im Endzustand,

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2. \quad (6.15)$$

Verwendung der Relationen (5.34), (5.35) liefert damit

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4k^4} (\not{p}_2 - m_e)_{\omega\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^\mu (\not{p}_1 + m_e)_{\beta\eta} \gamma_{\eta\omega}^{\mu'} g_{\mu\nu} g_{\mu'\nu'} (\not{p}_3 + m_\mu)_{\tau\delta} \gamma_{\delta\rho}^\nu (\not{p}_4 - m_\mu)_{\rho\sigma} \gamma_{\sigma\tau}^{\nu'} \\ &= \frac{e^4}{4k^4} \text{Sp}[(\not{p}_2 - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^{\nu'}] \cdot \text{Sp}[(\not{p}_3 + m_\mu) \gamma^\mu (\not{p}_4 - m_\mu) \gamma^{\nu'}]. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Da die Spur für eine ungerade Anzahl von Gamma-Matrizen verschwindet, haben wir

$$\text{Sp}[(\not{p}_3 + m_\mu)\gamma^\mu(\not{p}_4 - m_\mu)\gamma^{\nu'}] = \text{Sp}(\not{p}_3\gamma^\mu\not{p}_4\gamma^{\nu'}) - m_\mu^2\text{Sp}(\gamma^\mu\gamma^{\nu'}). \quad (6.17)$$

Zur weiteren Auswertung verwenden wir

$$\text{Sp}(\gamma^\mu\gamma^{\nu'}) = 4g^{\mu\nu'} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} p_{3\alpha'}p_{4\beta'}\text{Sp}(\gamma^{\alpha'}\gamma^\mu\gamma^{\beta'}\gamma^{\nu'}) &= p_{3\alpha'}p_{4\beta'}4[g^{\mu\beta'}g^{\nu'\alpha'} + g^{\mu\alpha'}g^{\nu'\beta'} - g^{\mu\nu'}g^{\alpha'\beta'}] \\ &= 4[p_3^{\nu'}p_4^\mu + p_3^\mu p_4^{\nu'} - g^{\mu\nu'}p_3 \cdot p_4]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Damit haben wir für die Spur insgesamt

$$4[p_3^{\nu'}p_4^\mu + p_3^\mu p_4^{\nu'} - p_3 \cdot p_4 g^{\mu\nu'} - m_\mu^2 g^{\mu\nu'}]. \quad (6.20)$$

Und für die andere Spur finden wir analog

$$4[p_1^{\nu'}p_2^\mu + p_1^\mu p_2^{\nu'} - p_1 \cdot p_2 g^{\mu\nu'} - m_e^2 g^{\mu\nu'}]. \quad (6.21)$$

Im folgenden wird die Elektronmasse auf null gesetzt,  $m_e = 0$ . Der Fehler ist dabei von der Ordnung  $m_e^2/m_\mu^2 = 1/200^2$ . Multiplikation von (6.20) und (6.21) liefert dann schließlich (nachrechnen!)

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4k^4} 16[2(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) + 2(p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + 2m_\mu^2(p_1 \cdot p_2)]. \quad (6.22)$$

Im Schwerpunktssystem, siehe Fig. 6.4, mit der Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$  haben wir für die Vierervektoren

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ p_3 &= \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \sin \theta \cos \phi \\ \beta \sin \theta \sin \phi \\ \beta \cos \theta \end{pmatrix}, \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \sin \theta \cos \phi \\ -\beta \sin \theta \sin \phi \\ -\beta \cos \theta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

mit

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}}. \quad (6.24)$$

Für die einzelnen benötigten Größen finden wir damit

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{s}{2}, \quad k^2 = (p_1 + p_2)^2 = s \quad (6.25)$$

$$p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 = \frac{s}{4}(1 - \beta \cos \theta) \quad \text{und} \quad p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 = \frac{s}{4}(1 + \beta \cos \theta). \quad (6.26)$$

Damit finden wir

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2 = e^4[1 + \beta^2 \cos^2 \theta + (1 - \beta^2)]. \quad (6.27)$$

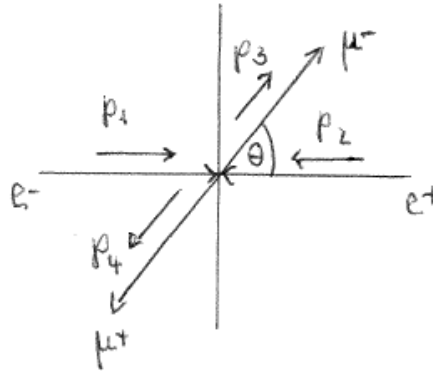


Abbildung 6.4: Schwerpunktsystem.

Dabei wurde verwendet, dass

$$\frac{m_\mu^2}{s} = \frac{1}{4}(1 - \beta^2). \quad (6.28)$$

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt benötigen wir noch den Phasenraum. Er ist für den  $2 \rightarrow 2$  Prozess gegeben durch

$$\begin{aligned} d\text{LIPS}(2) &= \frac{1}{2w(s, m_e^2, m_e^2)} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2p_3^0} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2p_4^0} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2w} \int \frac{d^3 p_3}{2p_3^0} \int d^4 p_4 \delta(p_4^2 - m_\mu^2) \theta(p_4^0) \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2s} \int \frac{d^3 p_3}{2p_3^0} \underbrace{\delta((p_1 + p_2 - p_3)^2 - m_\mu^2)}_{s - 2\sqrt{s}p_3^0 + m_\mu^2 - m_\mu^2} \\ &= \frac{1}{8\pi^2 s} \int \underbrace{\frac{|\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3|}{2p_3^0}}_{\frac{|\vec{p}_3| p_3^0 d p_3^0}{2p_3^0}} \underbrace{d \cos \theta d\phi}_{d\Omega} \frac{1}{2\sqrt{s}} \delta\left(p_3^0 - \frac{\sqrt{s}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{8\pi^2 s} \frac{1}{4\sqrt{s}} \frac{\sqrt{s}\beta}{2} \int d\Omega \\ &= \frac{\beta}{64\pi^2 s} \int d\Omega. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Dabei haben wir verwendet dass

$$w(s, m_e^2 = 0, m_e^2 = 0) = s \quad \text{und} \quad |\vec{p}_3| = \frac{\sqrt{s}\beta}{2}. \quad (6.30)$$

Und somit ergibt sich der unpolarisierte differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{\text{unpol}} = \frac{\beta}{64\pi^2 s} \left(\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_3, s_4} |\mathcal{M}|^2\right) = \frac{e^4 \beta}{64\pi^2 s} [2 + \beta^2(\cos^2 \theta - 1)]. \quad (6.31)$$

Den totalen Wirkungsquerschnitt erhält man durch Integration über den Raumwinkel  $\Omega$ ,

$$\int d\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \theta. \quad (6.32)$$

Mit der Feinstrukturkonstanten

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} \quad (6.33)$$

und  $\beta \approx 1$  ergibt sich der totale Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} . \quad (6.34)$$

Bei z.B. einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = 90$  GeV ergibt sich

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{1}{137} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{90} \right)^2 \cdot 0.389 \cdot 10^{-3} \text{ barn} \approx 11 \text{ pb} . \quad (6.35)$$

# Kapitel 7

## Das Standardmodell der Teilchenphysik

### 7.1 Eichsymmetrien

Die Dirac Lagrangedichte für ein freies Fermionfeld  $\Psi$  der Masse  $m$  lautet

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi. \quad (7.1)$$

Diese ist symmetrisch unter  $U(1)$ , d.h. invariant unter Transformationen

$$\Psi(x) \rightarrow \exp(-i\alpha)\Psi(x) = \Psi - i\alpha\Psi + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (7.2)$$

Und für den adjungierten Spinor  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0$  haben wir

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \exp(i\alpha)\bar{\Psi}(x). \quad (7.3)$$

#### 7.1.1 Abelsche Eichtransformationen

Wenn die Kopplung an ein Photon berücksichtigt wird, lautet die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi = \mathcal{L}_0 - ej^\mu A_\mu, \quad (7.4)$$

wobei

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi. \quad (7.5)$$

Bei Eichtransformation des externen Photonfeldes  $A_\mu$ ,

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x) \quad (7.6)$$

geht die Lagrangedichte über in

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}_0 - ej^\mu A_\mu - \underbrace{ej^\mu\partial_\mu\Lambda}_{e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\Lambda}. \quad (7.7)$$

Das heißt, dass  $\mathcal{L}$  nicht eichinvariant ist. Die Eichtransformation der Felder  $\Psi$  und  $\bar{\Psi}$  muss so geändert werden, dass die Lagrangedichte eichinvariant wird. Dies geschieht durch Einführung eines  $x$ -abhängigen Parameters  $\alpha$ , also  $\alpha = \alpha(x)$ . Damit

$$i\partial_\mu\Psi \rightarrow i\exp(-i\alpha)\partial_\mu\Psi + \exp(-i\alpha)\Psi(\partial_\mu\alpha), \quad (7.8)$$

so dass

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 + \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\alpha . \quad (7.9)$$

Dieser Term zankelliert den zusätzlichen Term in Glg. (7.7) falls

$$\alpha(x) = e\Lambda(x) . \quad (7.10)$$

Damit lautet die vollständige Eichtransformation

$$\Psi \rightarrow \Psi'(x) = U(x)\Psi(x) \quad \text{mit} \quad U(x) = \exp(-ie\Lambda(x)) \quad (U \text{ unitär}) \quad (7.11)$$

$$\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}'(x) = \bar{\Psi}(x)U^\dagger(x) \quad (7.12)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x) = U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) - \frac{i}{e}U(x)\partial_\mu U^\dagger(x) . \quad (7.13)$$

Die Lagrangedichte transformiert sich gema ( $U^\dagger = U^{-1}$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= \bar{\Psi}\gamma^\mu U^{-1}i\partial_\mu(U\Psi) - e\bar{\Psi}U^{-1}\gamma^\mu \left( UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{e}U\partial_\mu U^{-1} \right) U\Psi - m\bar{\Psi}U^{-1}U\Psi \\ &= \bar{\Psi}\gamma^\mu i\partial_\mu\Psi + \bar{\Psi}\gamma^\mu(U^{-1}i(\partial_\mu U))\Psi - e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu + \bar{\Psi}\gamma^\mu(i(\partial_\mu U^{-1})U)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \\ &= \mathcal{L} + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu(\underbrace{U^{-1}U}_1)\Psi = \mathcal{L} . \end{aligned} \quad (7.14)$$

Minimale Substitution  $p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu$  führt auf

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - eA_\mu \equiv iD_\mu . \quad (7.15)$$

Dabei ist  $D_\mu(x)$  die *kovariante Ableitung*. Der Begriff *kovariant* bedeutet, dass sie sich genauso wie das Feld transformiert

$$\Psi(x) \rightarrow U(x)\Psi(x) \quad \text{und} \quad D_\mu\Psi(x) \rightarrow U(x)(D_\mu\Psi(x)) . \quad (7.16)$$

Das heißt

$$(D_\mu\Psi)' = D'_\mu\Psi' = D'_\mu U\Psi \stackrel{!}{=} UD_\mu\Psi , \quad (7.17)$$

so dass sich die kovariante Ableitung also transformiert gemäß

$$D'_\mu = UD_\mu U^{-1} = \exp(-ie\Lambda)(\partial_\mu + ieA_\mu)\exp(ie\Lambda) = \partial_\mu + ie\partial_\mu\Lambda + ieA_\mu \stackrel{(7.6)}{=} \partial_\mu + ieA'_\mu . \quad (7.18)$$

Damit ist

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\gamma^\mu iD_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad (7.19)$$

offensichtlich eichinvariant.

Die kinetische Energie der Photonen ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu . \quad (7.20)$$

Der Feldstarkeitensor  $F^{\mu\nu}$  lässt sich mithilfe der kovarianten Ableitung ausdrücken (nachrechnen!): Wir wählen folgenden Ansatz für den Tensor 2. Stufe

$$[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu + ieA_\mu, \partial_\nu + ieA_\nu] = ie[\partial_\mu, A_\nu] + ie[A_\mu, \partial_\nu] = ie(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) . \quad (7.21)$$

Damit haben wir für den Feldstarkeitensor

$$F^{\mu\nu} = \frac{-i}{e}[D^\mu, D^\nu] . \quad (7.22)$$

Sein Transformationsverhalten ist gegeben durch

$$-\frac{i}{e}[UD^\mu U^{-1}, UD^\nu U^{-1}] = -\frac{i}{e}U[D^\mu, D^\nu]U^{-1} = UF^{\mu\nu}U^{-1} . \quad (7.23)$$

## 7.1.2 Darstellung nicht-abelscher Gruppen

Sei  $G$  eine Gruppe mit den Elementen  $g_1, g_2, \dots \in G$ . Eine  $n$ -dimensionale Darstellung von  $G$  ist gegeben durch die Abbildung  $G \rightarrow C^{(n,n)}$ ,  $g \rightarrow U(g)$ . D.h. die Abbildung abstrakter Elemente der Gruppe auf komplexe  $n \times n$  Matrizen, so dass  $U(g_1 g_2) = U(g_1)U(g_2)$  gilt und damit die Gruppeneigenschaften erhalten bleiben. Ein  $U \in SU(N)$  lässt sich schreiben als  $U = \exp(i\theta^a T^a)$ . Für die  $SU(2)$  also  $U = \exp(i\vec{\omega} \cdot \vec{J})$ . Die Gruppe  $SU(N)$  besitzt  $N^2 - 1$  Generatoren  $T^a$ . Für die  $SU(2)$  sind dies die 'Drehimpulsoperatoren'  $J_i$ . Die  $N^2 - 1$  reellen Parameter  $\theta^a$  sind in der  $SU(2)$  geben durch  $\vec{\omega}$ . Die Generatoren der  $SU(2)$  lauten  $J_i = (-i)\sigma_i/2^1$  und im allgemeinen Fall  $T^a = \lambda^a/2$ . Die Generatoren genügen der folgenden Kommutatorrelation

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c . \quad (7.24)$$

Die  $f^{abc}$  sind die Strukturkonstanten der  $SU(N)$ -Lie-Algebra. Sie sind total antisymmetrisch und definieren  $(N^2 - 1)(N^2 - 1)$ -dimensionale Matrizen  $T_{lk}^a \equiv -i f_{lk}^a \equiv -i f^{alk}$ . Im Fall der  $SU(2)$  haben wir

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k . \quad (7.25)$$

Es gilt ferner

$$\text{Sp} \left( \left[ \frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] \frac{\lambda^c}{2} \right) = i f^{abe} \text{Sp} \left( \frac{\lambda^e}{2} \frac{\lambda^c}{2} \right) = i f^{abe} \frac{1}{2} \delta^{ec} = \frac{i}{2} f^{abc} . \quad (7.26)$$

Die Generatoren erfüllen die Jacobi-Identität

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0 . \quad (7.27)$$

Unter Benutzung von (7.24) erhält man

$$0 = (-i f_{cl}^b)(-i f_{lk}^a) + (-i f_{lc}^a)(-i f_{lk}^b) + i f^{abl}(-i f_{ck}^l) . \quad (7.28)$$

Damit

$$0 = (T^b T^a)_{ck} - (T^a T^b)_{ck} + i f^{abl} (T^l)_{ck} . \quad (7.29)$$

Damit haben wir eine  $N^2 - 1$ -dimensionale Darstellung der  $SU(N)$  Lie-Algebra erhalten

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c . \quad (7.30)$$

Dies ist die *adjungierte Darstellung*. Es gibt folgende  $SU(N)$  Darstellungen

- $d = 1$ : triviale Darstellung (Singulett).
- $d = N$ : fundamentale Darstellung ( $\lambda^a/2$ ), antifundamentale Darstellung ( $-\lambda^{*a}/2$ ).
- $d = N^2 - 1$ : adjungierte Darstellung.

---

<sup>1</sup>Bei  $\sigma_i$  handelt es sich um die Pauli-Matrizen.



### 7.1.3 Nichtabelsche Eichtransformationen

Ausgangspunkt ist die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1\dots N} \bar{\psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_i = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi \quad \text{mit} \quad \bar{\Psi} = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_N). \quad (7.31)$$

Die Lagrangedichte ist invariant unter einer globalen  $SU(N)$  Eichtransformation

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \exp(i\theta^a T^a) \Psi = (1 + i\theta^a T^a + \mathcal{O}((\theta^a)^2)) \Psi = U \Psi \quad \text{und} \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = \bar{\Psi} U^{-1} \quad (7.32)$$

Die Generatoren  $T^a$  sind

$$\begin{aligned} \text{fundamentale Darstellung:} & \quad (T^a)_{ij} = \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij} & \quad d = N \\ \text{adjungierte Darstellung} & \quad (T^a)_{bc} = -if^{abc} & \quad d = N^2 - 1 \\ \text{triviale Darstellung} & \quad T^a = 0 \Leftrightarrow U(\theta) = 1. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Betrachten wir nun lokale Symmetrien, also  $\theta^a = \theta^a(x)$ . Die Transformation von  $\Psi$  sei  $\Psi' = U\Psi$ . Wir führen eine kovariante Ableitung ein,

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu = \partial_\mu - igT^a A_\mu^a. \quad (7.34)$$

Die  $T^a$  können verschieden sein, aber  $A_\mu^a$  ist identisch in allen  $D_\mu$ . Beispiel Supersymmetrie (SUSY)

$$\begin{aligned} \text{squark, quark} & \quad T^a = \frac{\lambda^a}{2} & \quad (d = N) \\ \text{gluino} & \quad (T^a)_{bc} = -if^{abc} & \quad (d = N^2 - 1) \end{aligned} \quad (7.35)$$

Die kovariante Ableitung transformiert sich genauso wie  $\Psi$ , also  $(D_\mu \Psi)' = U(D_\mu \Psi)$ . Damit

$$(D_\mu \Psi)' = D'_\mu \Psi' = D'_\mu U \Psi \Rightarrow D'_\mu U = U D_\mu \quad (7.36)$$

Ist erfüllt wenn

$$\partial_\mu - igA'_\mu = D'_\mu = U D_\mu U^{-1} = U(\partial_\mu - igA_\mu)U^{-1} = UU^{-1}\partial_\mu + U(\partial_\mu U^{-1}) - igUA_\mu U^{-1} \Rightarrow \quad (7.37)$$

$$A'_\mu = \frac{i}{g} U(\partial_\mu U^{-1}) + UA_\mu U^{-1}. \quad (7.38)$$

Wichtig:  $A_\mu^a$  ist unabhängig von der Darstellung  $U$ . Der Feldstärketensor sei definiert durch  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a \sim [D^\mu, D^\nu]$ . Die  $F_{\mu\nu}^a$  sind unabhängig von der Darstellung der  $T^a$ . Wir haben für das Transformationsverhalten

$$F'_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [D'^\mu, D'^\nu] = \frac{i}{g} [UD_\mu U^{-1}, UD_\nu U^{-1}] = UF_{\mu\nu} U^{-1} \quad \text{homogene Transformation} \quad (7.39)$$

## 7.2 Spontane Symmetriebrechung

Die Symmetrie einer Lagrangedichte ist *spontan gebrochen*, wenn die Lagrangedichte symmetrisch ist, aber das physikalische Vakuum *nicht* der Symmetrie gehorcht. Wir werden sehen, dass, wenn die Lagrangedichte einer Theorie invariant unter einer exakten kontinuierlichen Symmetrie ist, welche nicht die Symmetrie des physikalischen Vakuums ist, eines oder mehrere masselose Spin-0 Teilchen auftreten. Diese werden Goldstone Bosonen genannt. Wenn die spontan gebrochene Symmetrie eine lokale Eichsymmetrie ist, führt das Zusammenspiel (induziert durch den Higgsmechanismus) zwischen den Mächtegern-Goldstone Bosonen und den masselosen Eichbosonen zu den Massen der Eichbosonen und entfernt die Goldstone Bosonen aus dem Spektrum.

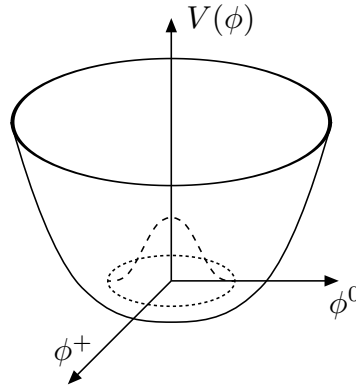


Abbildung 7.1: Das Higgspotential.

### 7.2.1 Beispiel: Ferromagnetismus

Es handelt sich um ein System wechselwirkender Spins,

$$H = - \sum_{i,j} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j . \quad (7.40)$$

Das Skalarprodukt der Spinoperatoren ist unter Rotation ein Singulett, ist also rotationsinvariant. Im Grundzustand des Ferromagneten (bei genügend niedriger Temperatur, unterhalb der Curie-Temperatur) zeigen alle Spins in dieselbe Richtung. Dies ist der Zustand niedrigster Energie. Der Grundzustand ist nicht mehr rotationsinvariant. Bei Drehung des Systems entsteht ein neuer Grundzustand derselben Energie, der sich aber vom vorigen unterscheidet. Der Grundzustand ist also entartet. Die Auszeichnung einer bestimmten Richtung bricht die Symmetrie. Es liegt spontane Symmetriebrechung (SSB) vor.

### 7.2.2 Beispiel: Feldtheorie für ein komplexes Feld

Wir betrachten die Lagrangedichte für ein komplexes Skalarfeld

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad \text{mit dem Potential} \quad V = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 . \quad (7.41)$$

(Hinzufügen höherer Potenzen in  $\phi$  führt zu einer nicht-renormierbaren Theorie.) Die Lagrangedichte ist invariant unter einer  $U(1)$ -Symmetrie,

$$\phi \rightarrow \exp(i\alpha) \phi . \quad (7.42)$$

Wir betrachten den Grundzustand. Dieser ist gegeben durch das Minimum von  $V$ ,

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = \mu^2 \phi + 2\lambda (\phi^* \phi) \phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu^2 > 0 \\ \phi^* \phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} & \text{für } \mu^2 < 0 \end{cases} \quad (7.43)$$

Der Parameter  $\lambda$  muß positiv sein, damit das System nicht instabil wird. Für  $\mu^2 < 0$  nimmt das Potential die Form eines Mexikanerhutes an, siehe Fig. 7.1. Bei  $\phi = 0$  liegt ein lokales Maximum, bei

$$|\phi| = v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}} \quad (7.44)$$

ein globales Minimum. Teilchen entsprechen harmonischen Oszillatoren für die Entwicklung um das Minimum des Potentials. Fluktuationen in Richtung der (unendlich vielen degenerierten) Minima besitzen Steigung null und entsprechen masselosen Teilchen, den Goldstone Bosonen. Fluktuationen senkrecht zu dieser Richtung entsprechen Teilchen mit Masse  $m > 0$ . Die Entwicklung um das Maximum bei  $\phi = 0$  würde zu Teilchen negativer Masse (Tachyonen) führen, da die Krümmung des Potentials hier negativ ist.

Entwicklung um das Minimum bei  $\phi = v$  führt zu (wir haben für das komplexe skalare Feld zwei Fluktuationen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ )

$$\phi = v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) = \left( v + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1 \right) + i\frac{\varphi_2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \quad (7.45)$$

$$\phi^*\phi = v^2 + \sqrt{2}v\varphi_1 + \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2). \quad (7.46)$$

Damit erhalten wir für das Potential

$$V = \lambda(\phi^*\phi - v^2)^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda} \quad \text{mit} \quad v^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \Rightarrow \quad (7.47)$$

$$V = \lambda \left( \sqrt{2}v\varphi_1 + \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \right)^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda}. \quad (7.48)$$

Vernachlässige den letzten Term in  $V$ , da es sich nur um eine konstante Nullpunktverschiebung handelt. Damit ergibt sich für die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_2)^2 - 2\lambda v^2\varphi_1^2 - \sqrt{2}v\lambda\varphi_1(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2. \quad (7.49)$$

Die in den Feldern quadratischen Terme liefern die Massen, die in den Feldern kubischen und quartischen Terme sind die Wechselwirkungsterme. Es gibt ein massives und ein masseloses Teilchen,

$$m_{\varphi_1} = 2v\sqrt{\lambda} \quad \text{und} \quad m_{\varphi_2} = 0. \quad (7.50)$$

Bei dem masselosen Teilchen handelt es sich um das Goldstone Boson.

### 7.2.3 Das Goldstone Theorem

Seien

- $N$  = Dimension der Algebra der Symmetriegruppe der vollständigen Lagrangedichte.
- $M$  = Dimension der Algebra der Gruppe, unter welcher das Vakuum nach der spontanen Symmetriebrechung invariant ist.

$\Rightarrow$  Es gibt N-M Goldstone Bosonen ohne Masse in der Theorie.

Das Goldstone Theorem besagt, daß es für jeden spontan gebrochenen Freiheitsgrad der Symmetrie ein masseloses Goldstone Boson gibt.

Für Eichtheorien gilt das Goldstone Theorem nicht: Masselose skalare Freiheitsgrade werden von den Eichbosonen absorbiert, um ihnen Masse zu geben. Das Goldstone Phänomen führt zum Higgs Phänomen.

## 7.2.4 Spontan gebrochene Eichsymmetrien

Wir betrachten als Beispiel die Lagrangedichte eines komplexen skalaren Feldes  $\Phi$ , welches an ein Photonfeld  $A_\mu$  koppelt, die invariant ist unter  $U(1)$ . Die lokalen Transformationen sind gegeben durch

$$\Phi \rightarrow \exp(-ie\Lambda(x))\Phi(x) \quad \text{und} \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\Lambda. \quad (7.51)$$

Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu - ieA_\mu)\Phi^*][(\partial^\mu + ieA^\mu)\Phi] \underbrace{-\mu^2\Phi^*\Phi - \lambda(\Phi^*\Phi)^2}_{-V(\Phi)} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (7.52)$$

(Bemerkung: Um die Lagrangedichte zu quantisieren muß noch ein Eichfixierungsterm eingeführt werden.) Für  $\mu^2 < 0$  kommt es zu spontaner Symmetriebrechung der  $U(1)$ . Dann hat das Feld einen nichtverschwindenden VEV,

$$\langle 0|\Phi|0 \rangle = v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}}. \quad (7.53)$$

Die Fluktuationen um das Minimum (Entwicklung um das Minimum) sind gegeben durch

$$\Phi = v + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) = \left(v + \frac{H(x)}{\sqrt{2}}\right) \exp\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\chi(x)}{v}\right) \left(\approx v + \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + i\chi(x))\right) \quad (7.54)$$

Damit

$$\begin{aligned} D_\mu\Phi &= (\partial_\mu + ieA_\mu)\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_\mu\varphi_1 + i\partial_\mu\varphi_2) + ieA_\mu v + \frac{e}{\sqrt{2}}A_\mu(-\varphi_2 + i\varphi_1) \\ &= \exp\left(i\frac{\chi}{\sqrt{2}v}\right) \left[\partial_\mu + ie\left(A_\mu + \frac{\partial_\mu\chi}{\sqrt{2}ev}\right)\right] \left(v + \frac{H}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned} \quad (7.55)$$

Um bilineare Mischterme in den Feldern zu vermeiden, führen wir folgende Eichtransformation durch,

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\left(\frac{\chi}{\sqrt{2}ev}\right). \quad (7.56)$$

Damit ergibt sich für die kinetische Energie (nenne  $A'$  ab jetzt  $A$ )

$$\begin{aligned} (D_\mu\Phi)^*(D^\mu\Phi) &= \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + e^2 A_\mu A^\mu \left(v + \frac{H}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \underbrace{(e^2 v^2)}_{\frac{1}{2}m_A^2} A_\mu A^\mu \\ &\quad + \underbrace{e^2 A_\mu A^\mu \left(\sqrt{2}vH + \frac{H^2}{2}\right)}_{\text{Wechselwirkungsterme}}. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Und die gesamte Lagrangedichte lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \frac{1}{2}m_A^2 A_\mu A^\mu + e^2 A_\mu A^\mu \left(\sqrt{2}vH + \frac{H^2}{2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \underbrace{2\lambda v^2}_{\frac{1}{2}m_H^2} H^2 - \sqrt{2}v\lambda H^3 - \frac{\lambda}{4}H^4. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Hierbei wurde der konstante Term  $\lambda v^4$ , welcher lediglich den Nullpunkt des Vakuums verschiebt, weggelassen. Die Massen des Higgsteilchens  $H$  und des Photons ergeben sich zu

$$m_A^2 = 2e^2 v^2 \quad (7.59)$$

$$m_H^2 = 4\lambda v^2. \quad (7.60)$$

Es tritt also ein massives Photon (Eichboson) und ein massives skalares Feld, das Higgsteilchen, auf. Das Goldstone Boson tritt als Freiheitsgrad nicht in Erscheinung. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist aber erhalten geblieben. Denn bei ungebrochener  $U(1)$ -Symmetrie ist das Photon masselos und besitzt 2 physikalische Freiheitsgrade, die zwei transversalen Polarisierungen. Die unphysikalische skalare und longitudinale Polarisation tragen im Gupta-Bleuler-Formalismus nicht bei. Das komplexe skalare Feld (entspricht einem geladenen Teilchen)  $\Phi$  besitzt 2 Freiheitsgrade. Bei gebrochener  $U(1)$ -Symmetrie haben wir ein massives Photon mit 3 Freiheitsgraden (mit longitudinaler Polarisation) und ein massives reelles Higgs Boson mit einem Freiheitsgrad. Das Goldstone Boson wurde *aufgegessen*, um dem Photon Masse zu geben, d.h. um den longitudinalen Freiheitsgrad des massiven Eichteilchens zu liefern.

Nochmal: In Eichtheorien treten die Goldstone Bosonen nicht in Erscheinung. Sie sind *Möchtegern* (im Englischen *would-be*) Goldstone Bosonen. Bei SSB werden sie direkt in die longitudinalen Freiheitsgrade der massiven Eichbosonen absorbiert. Es gilt bei Eichtheorien: Seien

- $N$  = Dimension der Algebra der Symmetriegruppe der vollständigen Lagrangedichte.
- $M$  = Dimension der Algebra der Gruppe, unter welcher das Vakuum nach der spontanen Symmetriebrechung invariant ist.
- $n$  = Die Anzahl der skalaren Felder

$\Rightarrow$

Es gibt  $M$  masselose Vektorfelder. ( $M$  ist die Dimension der Symmetrie des Vakuums.)

Es gibt  $N - M$  massive Vektorfelder. ( $N - M$  ist die Anzahl der gebrochenen Generatoren.)

Es gibt  $n - (N - M)$  skalare Higgsfelder.

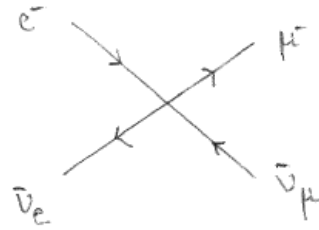
### 7.3 Unitarität: der Pfad zu Eichtheorien

Antoine Henri Becquerel (\*15.12.1852, †25.8.1908, Nobelpreis 1903 zusammen mit Marie und Pierre Curie) entdeckte 1896 eher zufällig die Radiaktivität, als er die Phosphoreszenz von Uransalzen untersuchte.

Lise Meitner (\*7.11.1878, †27.10.1968) und Otto Hahn (\*8.3.1879, †28.7.1968, Nobelpreis 1945) zeigten 1911 bei ihren Untersuchungen zur Kernspaltung, dass die Energie der emittierten Elektronen kontinuierlich ist. Da aber die freiwerdende Energie konstant ist, hatte man ein diskretes Spektrum für den Prozess

$$N \rightarrow N' + e^- \quad (7.61)$$

erwartet. Um diesen offensichtlichen Energieverlust und auch die Verletzung der Drehimpulserhaltung zu erklären, schlug Wolfgang Pauli (\*25.4.1900, †15.12.1958, Nobelpreis 1945) 1930 die Teilnahme eines neutralen extrem leichten Teilchens vor, das er Neutron nannte. Enrico Fermi (\*29.9.1901, †28.11.1954, Nobelpreis 1938) änderte diesen Namen 1931 in *Neutrino*, die

Abbildung 7.2: Der Prozess  $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ .

verkleinerte Form des nahezu zeitgleich entdeckten Neutrons. Mit der Neutrino Hypothese haben wir also den Prozess

$$N \rightarrow P + e^- + \bar{\nu}_e . \quad (7.62)$$

Der erste experimentelle Nachweis des Neutrinos gelang Clyde L. Cowan (\*6.12.1919, †24.5.1974) und Frederick Reines (\*16.3.1918, †26.8.1998, Nobelpreis 1995) 1956 in einem der ersten großen Kernreaktoren.

Fermi entwickelte eine Theorie der schwachen Wechselwirkungen analog zur QED, in der vier Fermionen direkt miteinander wechselwirken. Die zugehörige effektive Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu J^\mu \quad J_\mu = \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e + (\mu) + (q) . \quad (7.63)$$

Bei  $G_F = 1.16637 \cdot 10^{-5} / \text{GeV}^2$  handelt es sich um die Fermi-Konstante. Diese Wechselwirkung kann beispielsweise ein Neutron (oder ein down-Quark) in ein Proton (oder up-Quark), ein Elektron und ein Antineutrino splitten. Der  $\beta$ -Zerfall oder sogenannte geladene Stromreaktionen können dadurch beschrieben werden. Die Fermi-Theorie beschreibt die Prozesse bei kleinen Energien sehr gut. Allerdings findet man für den Wirkungsquerschnitt des Prozesses (siehe Abb. 7.2)

$$e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \quad (7.64)$$

bei hohen Energien

$$\sigma(\bar{\nu}_\mu e^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_e) = \frac{G_F^2 s}{\pi} . \quad (7.65)$$

Der Wirkungsquerschnitt steigt mit der quadratischen Schwerpunktsenergie  $s$  an. Jedoch folgt aus der  $s$ -Wellen Unitarität

$$\sigma < \frac{4\pi}{s} . \quad (7.66)$$

Aus der Forderung nach Unitarität folgt daher eine Gültigkeit der Theorie für Energien  $\sqrt{s} \lesssim 700 \text{ GeV}$ . Die Theorie ist auch nicht renormierbar. Die Lösung besteht darin, die 4-Fermion-Kontaktwechselwirkung durch eine vollständigere Theorie zu ersetzen - mit einem Austausch eines  $W$ - oder eines  $Z$ -Bosons wie in der elektroschwachen (EW) Theorie. Diese

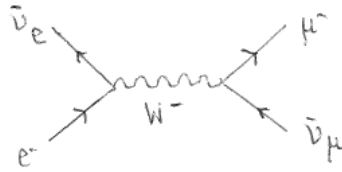


Abbildung 7.3: Einführung von geladenen  $W^\pm$ -Bosonen im Prozess  $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ .

ist renormierbar.

Hideki Yukawa (\*23.1.1907, †8.9.1981, Nobelpreis 1949) etablierte die Hypothese, dass Kernkräfte durch den Austausch neuer hypothetischer Teilchen zwischen den Nukleonen erklärt werden können, in der gleichen Art und Weise, in der die elektromagnetische Kraft zwischen Elektronen durch den Austausch von Photonen beschrieben werden kann. Dieses Teilchen, das die Kernkraft übermitteln sollte, sollte aber im Gegensatz zu den Photonen nicht masselos sein, sondern eine Masse haben. Der Wert kann aus der Reichweite der Kernkräfte abgeschätzt werden. Je größer die Masse des Teilchens, desto kleiner ist die Reichweite der Wechselwirkung, die von dem Teilchen vermittelt wird. Damit ist die punkthafte Fermi-Kopplung der Grenzfall des Austausches eines "schweren Photons", nämlich des  $W$ -Bosons,

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \text{ punkthafte Kopplung} \approx \frac{g^2}{m_W^2 + Q^2} \approx \frac{g^2}{m_W^2} \text{ mit Austausch eines } W - \text{Bosons} .$$

Es sind 4 Schritte nötig, um aus der Fermi-Theorie eine konsistente Feldtheorie zu konstruieren, welche die 4-Punktkopplung dämpft.

Man nimmt an, daß die schwache Wechselwirkung wie die QED durch Vektorboson-Austausch vermittelt wird. Das intermediäre schwache Boson muß die folgenden 3 Eigenschaften haben:

- (i) Es trägt Ladung  $\pm 1$ , da die Manifestationen der schwachen Wechselwirkung (wie z.B.  $\beta$ -Zerfall) Ladungs-ändernd sind.
- (ii) Es muß recht massiv sein, um die kurze Reichweite der schwachen Kraft zu reproduzieren.
- (iii) Seine Parität muß indefinit sein.

#### 1.) Einführung der geladenen $W^\pm$ Bosonen [Yukawa]:

Es werden geladene  $W^\pm$ -Bosonen eingeführt, die die Wechselwirkung vermitteln (siehe Fig. 7.3). Die Wechselwirkungsreichweite ist  $\sim m_W^{-1}$ . Damit wird der Wirkungsquerschnitt für

$$\sqrt{s} \rightarrow \infty : \sigma \sim \frac{G_F^2 m_W^2}{\pi} . \quad (7.67)$$

Die Partialwellenunitarität ist also erfüllt, und es gilt  $G_F = g_W^2/m_W^2$ .

#### 2.) Einführung eines neutralen Vektorbosons $W^3$ [Glashow]:

Die Einführung des intermediären geladenen Bosons schwächt die Divergenz der  $s$ -Wellen Amplitude des obigen Prozesses. Sie ruft jedoch eine neue Divergenz in anderen Prozessen

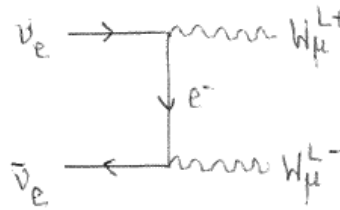


Abbildung 7.4: Die Produktion von longitudinal polarisierten  $W$ -Bosonen.

hervor. So findet man für die Produktion von longitudinal polarisierten  $W$ 's in  $\nu\bar{\nu}$  Kollisionen (Fig. 7.4) bei hohen Energien

$$\sigma(\nu\bar{\nu} \rightarrow W_L W_L) \sim \frac{g_W^4 s}{m_W^4}. \tag{7.68}$$

Dies verletzt die Unitarität für  $\sqrt{s} \gtrsim 1$  TeV.

Dieses Problem wird durch die Einführung eines neutralen  $W^3$  gelöst, das an Fermionen und  $W^\pm$  koppelt, siehe Abb. 7.5. Die Bedingung für das Verschwinden der linearen  $s$  Singularität ist

$$I_{ik}^a I_{kj}^b - I_{ik}^b I_{kj}^a - i f_{abc} I_{ij}^c = 0 \tag{7.69}$$

Also

$$[I^a, I^b] = i f_{abc} I^c$$

Die Fermion-Boson Kopplungen bilden damit eine Lie-Algebra. Diese ist assoziiert mit einer nicht-abelschen Gruppe. Und es gilt

$$\left. \begin{array}{l} \text{Fermion-Boson Kopplung} \sim g_W \times \text{Darstellungsmatrix} \\ \text{Boson-Boson Kopplung} \sim g_W \times \text{Strukturkonstanten} \end{array} \right\} g_W \text{ universell.} \tag{7.70}$$

### 3.) 4-Punkt-Kopplung:

Die Diagramme, die zur longitudinalen  $W$ -Boson Streuung

$$W_L W_L \rightarrow W_L W_L \tag{7.71}$$

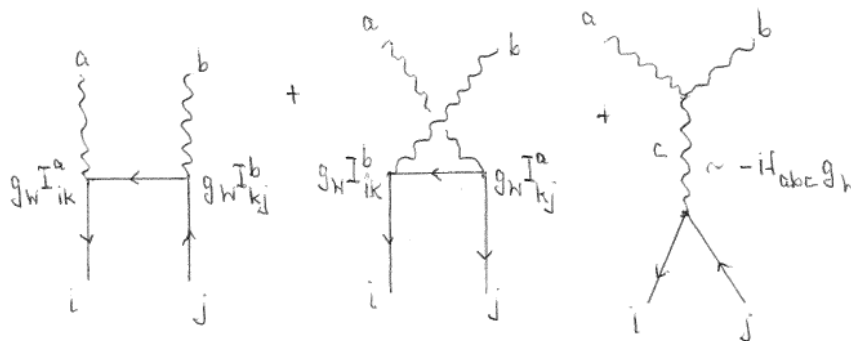


Abbildung 7.5: Die Einführung eines neutralen  $W^3$ -Bosons.



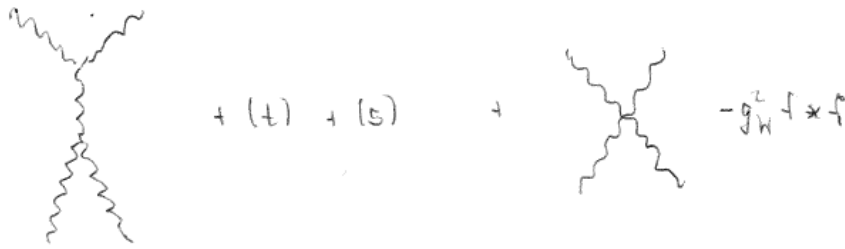


Abbildung 7.6: Die Einführung eines 4-Boson-Vertex.

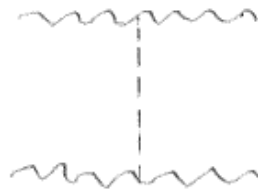


Abbildung 7.7: Die Einführung eines Higgs-Austausch-Diagramms.

beitragen, sind in Abb. 7.6 dargestellt. Die dazugehörige Amplitude berechnet sich zu

$$\text{Amplitude} \sim g_W^2 f^2 \frac{s^2}{m_W^4} \tag{7.72}$$

Die Divergenz in  $s^2$  wird durch die Einführung eines 4-Boson Vertex,

$$\text{4-Boson Vertex: } \sim g_W^2 f * f, \tag{7.73}$$

kompensiert.

4.) Higgsteilchen:

Die verbleibende lineare  $s$  Divergenz wird durch den Austausch eines skalaren Teilchens mit Kopplung  $\sim$  Masse der Quelle kanzelliert, siehe Fig. 7.7. Der gleiche Mechanismus kanzelliert

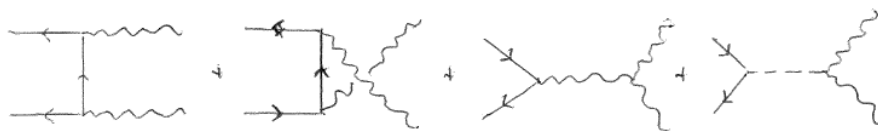


Abbildung 7.8: Der Prozess  $f\bar{f} \rightarrow W_L W_L$ .

die verbleibende Singularität in

$$f\bar{f} \rightarrow W_L W_L \tag{7.74}$$

( $f$  massiv!), siehe Fig. 7.8, wobei das skalare Teilchen proportional zur Masse der Quelle koppelt.

Zusammenfassung:

*Eine Theorie massiver Eichbosonen und Fermionen, die bis zu sehr hohen Energien schwach koppeln, verlangt, aus Unitaritätsgründen, die Existenz eines Higgsteilchens. Das Higgsteilchen ist ein skalares  $0^+$  Teilchen, das an andere Teilchen proportional zu der Masse der Teilchen koppelt.*

⇒ Nicht-abelsche Eichtheorien mit spontaner Symmetriebrechung.

Glashow-Salam-Weinberg Theorie (GSW): [S.L. Glashow, A. Salam, S. Weinberg, Nobelpreis 1979]

*Sheldon Lee Glashow (\* 5.12.1932 in New York) ist ein US-amerikanischer Physiker und Nobelpreisgewinner. Er erhielt 1979 zusammen mit Abdus Salam und Steven Weinberg den Physik Nobelpreis für ihre Arbeit an der 'theory of the unification of the weak and electromagnetic interaction between elementary particles', die unter anderem das Z Boson und die neutralen schwachen Ströme vorhersagt. Abdus Salam (\*29.1.1926 in Jhang, Pakistan; †21. November 1996 in Oxford, England) war ein pakistanischer Physiker und Nobelpreisgewinner. Steven Weinberg (\* 3.5.1933 in New York City) ist ein US-amerikanischer Physiker und Nobelpreisgewinner.*

Die elektroschwache Wechselwirkung ist die vereinigte Theorie der Quantenelektrodynamik und der schwachen Wechselwirkung. Zusammen mit der Quantenchromodynamik bildet sie die Säulen des Standardmodells der Physik. Die Vereinigung wurde ursprünglich theoretisch von S.L. Glashow, A. Salam and S. Weinberg 1967 beschrieben. Experimentell wurde die Theorie 1973 indirekt durch die Entdeckung der neutralen Ströme bestätigt und 1983 durch den experimentellen Nachweis der  $W$  und  $Z$  Bosonen. Eine Besonderheit der elektroschwachen Wechselwirkung ist die Paritätsverletzung.

## 7.4 Die Säulen des Standardmodells

Die dem SM zugrundeliegende Eichsymmetrie ist die:

I) Zugrundeliegende Eichsymmetrie:  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  .

Die  $SU(3)_C$  beschreibt die QCD, und die  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  den elektroschwachen Sektor. Die durch das SM beschriebenen fundamentalen Kräfte sind:

II) Fundamentale Kräfte: Schwache Kraft, elektromagnetische Kraft und die starke Kraft .

Nicht im SM beschrieben ist die Gravitationskraft.

Die mit der QCD verbundene erhaltene Ladung ist die *Farbladung*. Die mit dem *elektroschwachen Sektor* verbundenen Ladungen sind der *schwache Isospin* und die *schwache Hyperladung*. Die entsprechenden *Eichbosonen* sind in der QCD die *8 Gluonen (masselos)* und im elektroschwachen Sektor die  *$W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z$  Bosonen (massiv) und das Photon  $\gamma$  (masselos)*.

Die Materiefelder sind durch 6 Quarks und 6 Leptonen gegeben:

III) Teilcheninhalt: Materieteilchen und Austauscheteilchen .

Es gibt 6 verschiedene Quark-Flavours: up ( $u$ ), down ( $d$ ), charm ( $c$ ), strange ( $s$ ), top ( $t$ ) und bottom ( $b$ ). Diese sind in 3 Familien (Generationen) angeordnet,  $u, d$  sowie  $c, s$  und  $t, b$ . Die

Leptonen sind gegeben durch das Elektron ( $e$ ), das Myon ( $\mu$ ), das Tauon ( $\tau$ ) und die assoziierten Neutrinos  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ . Je ein Lepton und sein zugehöriges Neutrino bilden eine der drei Leptonfamilien. Die 3 Lepton- und 3 Quarkfamilien haben jeweils identische Quantenzahlen und werden durch ihre Massen unterschieden. Bei der Betrachtung der Eichwechselwirkung ist es deshalb ausreichend, nur eine Familie zu betrachten. Noch eine Bemerkung: Inzwischen wissen wir, daß die Neutrinos Masse haben. Bei der Formulierung des SM hier werden wir aber ihre Masse vernachlässigen und als masselos annehmen. Für die Behandlung massiver Neutrinos wird auf die entsprechende Literatur verwiesen.

Die Massen der Teilchen werden durch Spontane Symmetriebrechung generiert:

#### IV) Erzeugung der Teilchenmassen: Higgsmechanismus .

Dazu wird ein komplexes Higgsdublett ( $d_D = 4$  Freiheitsgrade) mit Higgspotential  $V$  hinzugefügt. Die SSB bricht die  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  ( $d_{EW} = 4$ ) herunter auf die elektromagnetische  $U(1)_{em}$  ( $d_{em} = 1$ ). Die elektromagnetische Ladung ist also nach wie vor erhalten. Mit der SSB sind  $d_{EW} - d_{em} = 4 - 1 = 3$  would-be Goldstone Bosonen verbunden, die absorbiert werden, um den  $W$  und  $Z$  Bosonen Masse zu geben. Das Photon bleibt masselos. Ferner verbleibt nach SSB  $d_D - (d_{EW} - d_{em}) = 4 - (4 - 1) = 4 - 3 = 1$  Higgsteilchen im Spektrum.

## 7.5 Die Lagrangedichte des Standardmodells

Die Lagrangedichte des Standardmodells  $\mathcal{L}_{SM}$  setzt sich zusammen aus der Yang-Mills-Fermion Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{YM-Fermion}$ , der Higgs-Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{Higgs}$ , der Yukawa-Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{Yuk}$ , der Eichfixierungslagrangedichte  $\mathcal{L}_{Eichfix}$  und der Geist-Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{Geist}$ ,

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{YM-Fermion} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yuk} + \mathcal{L}_{Eichfix} + \mathcal{L}_{Geist} . \quad (7.75)$$

Die Yang-Mills-Fermion Lagrangedichte enthält die kinetischen Terme der Eichbosonen und der Fermionen sowie die Wechselwirkungen zwischen Eichbosonen und Fermionen. Die Higgs-Lagrangedichte enthält die kinetische Energie des Higgsbosons, sein Potential und die Wechselwirkung mit den massiven Eichbosonen. Die Yukawa-Lagrangedichte enthält die Wechselwirkung des Higgsfeldes mit den Fermionen. Die Eichfixierungslagrangedichte ist nötig, um die Eichung zu fixieren. Die Geist-Lagrangedichte enthält die kinetischen und Wechselwirkungsterme der Hilfsfelder, Geistfelder genannt, die im Rahmen der Eichfixierung der QCD eingeführt werden. Die Herleitung dieser Lagrangedichte ist im Rahmen des Pfadintegral-Formalismus am einfachsten, wird aber im Rahmen dieser Vorlesung nicht behandelt. Es wird auf TTP2 oder Spezialvorlesungen zur QCD oder dem Pfadintegralformalismus verwiesen. Im folgenden werden, abgesehen von der Eichfixierungs- und Geist-Lagrangedichte, die einzelnen Lagrangedichten kurz behandelt. Für die ausführliche Diskussion wird auf TTP1 und TTP2 verwiesen. Wir konzentrieren uns ferner auf den elektroschwachen Sektor. Die relevanten Beiträge im Rahmen der QCD werden kurz erwähnt. Für ausführliche Informationen wird wiederum auf TTP1, TTP2 und Spezialvorlesungen verwiesen.

### 7.5.1 Die Yang-Mills-Fermion Lagrangedichte

Die Yang-Mills-Fermion Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{YM-Fermion}$  enthält die kinetischen Terme der Eichbosonen und der Fermionen sowie die Wechselwirkung zwischen Fermionen und Eichbosonen. Um ihr Zustandekommen zu verstehen, beschränken wir uns der Einfachheit halber nur auf

eine Generation und betrachten zunächst die kinetische Lagrangedichte der Elektronen und Elektron-Neutrinos. Diese ist durch

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \bar{e}i\cancel{\partial}e + \bar{\nu}_{eL}i\cancel{\partial}\nu_{eL} \\ &= \bar{e}_L i\cancel{\partial}e_L + \bar{e}_R i\cancel{\partial}e_R + \bar{\nu}_{eL} i\cancel{\partial}\nu_{eL} \\ &= \overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L} i\cancel{\partial} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L + \bar{e}_R i\cancel{\partial}e_R,\end{aligned}\quad (7.76)$$

gegeben, wobei

$$f_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)f. \quad (7.77)$$

Wir haben in Glg. (7.76) ausgenutzt, dass aus dem Goldhaber Experiment (1957) hervorgeht, dass Neutrinos in der Natur nur linkshändig vorkommen. Die Lagrangedichte ist invariant unter globalen schwachen Isospin Transformationen

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L &\rightarrow e^{-\frac{i}{2}g\vec{\alpha}\vec{\tau}} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\ e_R &\rightarrow e_R\end{aligned}\quad (7.78)$$

Die damit verbundene erhaltene Ladung ist der schwache Isospin:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L &: \text{Isodublett mit } I(\nu_{eL}) = I(e_L) = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad I_3(\nu_{eL}) = +\frac{1}{2} \\ &I_3(e_L) = -\frac{1}{2} \\ e_R &: \text{Isosingulett mit } I(e_R) = I_3(e_R) = 0\end{aligned}\quad (7.79)$$

Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}_0$  hat eine zusätzliche  $U(1)$  Eichsymmetrie. Die damit verbundene Ladung ist die schwache Hyperladung  $Y$ . Die Hyperladungsquantenzahlen sind

$$Y(\nu_{eL}) = Y(e_L) = -1 \quad (7.80)$$

$$Y(e_R) = -2 \quad (7.81)$$

Sie ergeben sich aus der Forderung, dass die Gell-Mann Nishijima Beziehung<sup>2</sup> erfüllt ist:

$$\underline{\underline{Q = I_3 + \frac{1}{2}Y}} \quad (7.82)$$

Lokale Eichinvarianz wird durch die minimale Kopplung von Vektorfeldern  $\vec{W}_\mu \equiv (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$  (für die  $SU(2)_L$ ) und  $B_\mu$  (für die  $U(1)_Y$ ) erreicht:

$$\left. \begin{aligned}SU(2)_L\text{-Dublett} &: i\cancel{\partial} \rightarrow i\cancel{\partial} - \frac{g}{2}\vec{\tau}\vec{W} + \frac{g'}{2}\mathbf{1}_2\cancel{B} \\ SU(2)_L\text{-Singulett} &: i\cancel{\partial} \rightarrow i\cancel{\partial} - \frac{g'}{2}(-2)\cancel{B}\end{aligned} \right\} \text{aus: } i\cancel{\partial} \rightarrow i\cancel{\partial} - g\vec{I}\vec{W} - \frac{g'}{2}Y\cancel{B} \quad (7.83)$$

Die so erhaltene Wechselwirkungs-Lagrangedichte (ohne Rechnung) lautet

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= -\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_{eL}\gamma_\mu e_L W^{+\mu} + h.c. - \frac{g}{2}\{\bar{\nu}_{eL}\gamma_\mu \nu_{eL} - \bar{e}_L\gamma_\mu e_L\}W^{3\mu} \\ &+ g'\left\{\frac{1}{2}\bar{\nu}_{eL}\gamma_\mu \nu_{eL} + \frac{1}{2}\bar{e}_L\gamma_\mu e_L + \bar{e}_R\gamma_\mu e_R\right\}B^\mu.\end{aligned}\quad (7.84)$$

<sup>2</sup>Ursprünglich ging diese Gleichung aus empirischen Beobachtungen hervor. Sie wird jetzt als Resultat des Quarkmodells verstanden.

Hier haben wir das geladene  $W^\pm$  Boson eingeführt, das definiert ist durch

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1 \mp iW^2). \quad (7.85)$$

In der obigen Lagrangedichte wird nun eine Mischung zwischen  $W^3$  und  $B$  so eingeführt, dass eine reine Paritäts-invariante Elektron-Photon-Wechselwirkung erzeugt wird. Das Photon koppelt dann gleichermaßen an links- und rechtshändige Fermionen. Die Drehung auf das Photon  $A_\mu$  und das neutrale  $Z$ -Boson lautet

$$\left. \begin{aligned} A_\mu &= \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^3 \\ Z_\mu &= -\sin \theta_W B_\mu + \cos \theta_W W_\mu^3 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} B_\mu &= \cos \theta_W A_\mu - \sin \theta_W Z_\mu \\ W_\mu^3 &= \sin \theta_W A_\mu + \cos \theta_W Z_\mu \end{aligned} \right\} \quad (7.86)$$

Hier bezeichnet  $\theta_W$  den *Weinbergwinkel*. Um zu erreichen, dass in der so erhaltenen neutralen Stromwechselwirkung

$$A_\mu \{ \bar{\nu}_{eL} \gamma_\mu \nu_{eL} \{ -\frac{g}{2} \sin \theta_W + \frac{g'}{2} \cos \theta_W \} + \bar{e}_L \gamma_\mu e_L \{ \frac{g}{2} \sin \theta_W + \frac{g'}{2} \cos \theta_W \} + \bar{e}_R \gamma_\mu e_R g' \cos \theta_W \} \quad (7.87)$$

die nicht-existierende Kopplung des Photons an Neutrinos, also neutrale Teilchen, nicht auftritt, muss gelten:

$$\underline{\underline{\tan \theta_W = \frac{g'}{g}}} \quad (7.88)$$

Die korrekte  $e$ -Kopplung ergibt sich durch

$$\underline{\underline{\left. \begin{aligned} g' \cos \theta_W &= e_0 \\ g \sin \theta_W &= e_0 \end{aligned} \right\} \frac{1}{e_0^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g'^2}}} \quad (7.89)$$

Mit der Notation

$$\begin{aligned} j_\mu^+ &= \bar{\nu}_{eL} \gamma_\mu e_L \\ j_\mu^3 &= \left( \begin{array}{c} \nu_e \\ e \end{array} \right)_L \gamma_\mu \frac{\tau^3}{2} \left( \begin{array}{c} \nu_e \\ e \end{array} \right)_L \\ j_\mu^{em} &= -\bar{e} \gamma_\mu e \end{aligned} \quad (7.90)$$

läßt sich die Wechselwirkungslagrangedichte schreiben als

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{g}{\sqrt{2}} j_\mu^- W^{+\mu} + h.c. - \frac{g}{\cos \theta_W} \{ j_\mu^3 - \sin^2 \theta_W j_\mu^{em} \} Z^\mu - e_0 j_\mu^{em} A^\mu \quad (7.91)$$

wobei  $g = \frac{e_0}{\sin \theta_W}$ . Die Kopplungskonstanten der Theorie sind  $[g, g']$  oder  $[e_0, \sin \theta_W]$ . Der kinetische Anteil der Eichbosonen  $\mathcal{L}_{\text{YM}}$  der Yang-Mills-Fermion Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{YM-Fermion}} = \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{kin-Fermion}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (7.92)$$

lautet ( $a = 1, 2, 3$ )

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4}W^{a\mu\nu}W_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} , \quad (7.93)$$

mit ( $a, b, c = 1, 2, 3$ )

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + gf^{abc}W_\mu^b W_\nu^c \quad (7.94)$$

und

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu . \quad (7.95)$$

Die nicht-abelsche Struktur der Glg. (7.94) führt insbesondere zu Wechselwirkungen zwischen den Eichbosonen. Es gibt, im Gegensatz zur QED mit abelscher Eichgruppe, trilineare und quartische Wechselwirkungen. Berücksichtigung der QCD erfordert den kinetischen Gluon-Eichboson-Beitrag

$$-\frac{1}{4}G^{b\mu\nu}G_{\mu\nu}^b \quad (7.96)$$

mit dem Gluon-Feldstärkentensor

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_S f^{abc}G_\mu^b G_\nu^c . \quad (7.97)$$

Hier ist  $a, b, c = 1, \dots, 8$  die Dimension der nicht-abelschen Farb- $SU(3)_C$  der Quantenchromodynamik. Ferner muss die kovariante Ableitung  $D_\mu$  um den Term

$$i\frac{g_S}{2}T^a G_\mu^a \quad (7.98)$$

erweitert werden. Bei  $g_S$  handelt es sich um die starke Kopplungskonstante, die  $T^a$  sind die Generatoren der  $SU(3)_C$ . Die Erweiterung führt dann auf Wechselwirkungen der Gluonen mit den Quarks. Dies sind die einzig möglichen Wechselwirkungen mit Fermionen, da nur die Quarks eine Farbladung tragen so wie die Gluonen. Wiederum führt die nicht-abelsche Struktur der  $SU(3)_C$  auf trilineare und quartische Wechselwirkungen unter den Gluonen.

Der kinetische Anteil der Fermionlagrangedichte  $\mathcal{L}_{\text{kin-Fermion}}$  ist der übliche, wobei über sämtliche Fermionen (Leptonen und Quarks in 3 Familien) zu summieren ist,

$$\mathcal{L}_{\text{kin-Fermion}} = \sum_{\text{fermions}_i} i\bar{\psi}_i \not{\partial} \psi_i . \quad (7.99)$$

Die Massenterme der Fermionen und ihre Erzeugung wird im Rahmen der Yukawa-Lagrangedichte diskutiert werden.

## 7.6 Die Higgs-Lagrangedichte

Der Higgsmechanismus ermöglicht es, den massiven Eichbosonen und den Fermionen Masse zu geben, ohne die Symmetrien des SM zu verletzen. Die Erzeugung der Massen für die 3 Vektorfelder, also die Absorption der 3 Goldstonebosonen, ist nicht möglich mit 3 skalaren

Feldern, da ja ein Generator nicht gebrochen werden soll (das Photon ist masselos). Die minimale Lösung ist die Einführung eines komplexen Dubletts mit 4 Freiheitsgraden,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \phi_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \\ \phi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 + i\phi_4) \end{aligned} \quad (7.100)$$

Die Lagrangedichte des Dublettfeldes  $\phi$  lautet

$$\underline{\underline{\mathcal{L}_\phi = (\partial_\mu \phi)^\dagger \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2}} \quad (7.101)$$

Sie ist offensichtlich  $SU(2) \times U(1)$  invariant. (Lokal eichinvariant nach Ersetzung der Ableitung durch die kovariante Ableitung.) Das Feld  $\phi$  transformiert sich gemäß

$$\phi \rightarrow e^{-\frac{i}{2}g\vec{\alpha}\vec{\tau}} e^{-\frac{i}{2}g'\beta} \phi. \quad (7.102)$$

Nach spontaner Symmetriebrechung ist der Vakuumerwartungswert des skalaren Feldes

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad \text{mit } v \text{ reell.} \quad (7.103)$$

Dieser bricht die  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  Symmetrie, ist aber invariant unter der  $U(1)_{em}$  Symmetrie, welche durch den elektrischen Ladungsoperator erzeugt wird. Da jedes (would-be) Goldstoneboson mit einem Generator assoziiert ist, der das Vakuum bricht, gibt es  $4 - 1 = 3$  Goldstonebosonen. Die Quantenzahlen des Feldes  $\phi$  sind

$$\left. \begin{aligned} I_3(\phi_+) &= +\frac{1}{2} & Y(\phi_+) &= +1 \\ I_3(\phi_0) &= -\frac{1}{2} & Y(\phi_0) &= +1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} Q(\phi_+) &= 1 \\ Q(\phi_0) &= 0 \end{aligned} \quad (7.104)$$

(Das Feld  $\phi$  transformiert sich wie ein  $SU(2)_L$  Dublett und muß daher die Hyperladung  $Y_\phi = 1$  haben.) Die Eichfelder werden durch die minimale Kopplung eingeführt,

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - \frac{g}{2}\vec{\tau}\vec{W}_\mu - \frac{g'}{2}B_\mu. \quad (7.105)$$

Entwickelt man um das Minimum des Higgspotentials

$$\begin{aligned} \phi_+(x) &\rightarrow 0 \\ \phi_0(x) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \chi(x)] \quad \text{mit } \chi^* = \chi \end{aligned} \quad (7.106)$$

so erhält man aus dem kinetischen Teil der Lagrangedichte des skalaren Feldes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= \left| \left[ \left( i\frac{g}{2}\vec{\tau}\vec{W} + i\frac{g'}{2}B \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right] \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g^2 & & & \\ & g^2 & & \\ & & g^2 & -gg' \\ & & -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ B \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.107)$$

mit den Eigenwerten der Massenmatrix

$$\begin{aligned} m_1^2 &= m_2^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \\ m_3^2 &= \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{4} \\ m_4^2 &= 0 \end{aligned} \quad (7.108)$$

Also sind die Massen der Eichbosonen

$$m_\gamma^2 = 0 \quad (7.109)$$

$$m_W^2 = \frac{1}{4}g^2v^2 \quad (7.110)$$

$$m_Z^2 = \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)v^2 \quad (7.111)$$

Sie erfüllen die folgenden Massenbeziehungen:

(i)  $W$  Boson Masse: Wir haben  $e_0^2 = g^2 \sin^2 \theta_W = 4\sqrt{2}G_F \sin^2 \theta_W m_W^2$ , woraus folgt

$$m_W^2 = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F \sin^2 \theta_W} \quad (7.112)$$

mit  $\alpha \approx \alpha(m_Z^2)$  (effektive Strahlungskorrektur). Mit  $\sin^2 \theta_W \approx 1/4$  ist die  $W$  Boson Masse  $m_W \approx 80$  GeV. (Laut PDG  $m_W = 80.385$  GeV.)

(ii)  $Z$  Boson Masse: Mit

$$\frac{m_W^2}{m_Z^2} = \cos^2 \theta_W \quad (7.113)$$

erhalten wir

$$\sin^2 \theta_W = 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2} \quad (7.114)$$

Sie ist laut PDG  $m_Z = 91.187$  GeV.

Schließlich erhält man mit Eq. (7.110) für den Higgs Vakuumerwartungswert

$$\frac{1}{v^2} = \frac{g^2}{4m_W^2} = \sqrt{2}G_F \quad (7.115)$$

und also

$$v = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}G_F}} \approx 246 \text{ GeV} \quad (7.116)$$

Der Vakuumerwartungswert  $v$  ist die charakteristische Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung.

Der Higgsmechanismus für geladene Leptonmassen: Um Massen für geladene Leptonen zu erzeugen, müssen diese an das Higgsfeld koppeln. Dies geschieht in eichinvarianter Weise über die Yukawakopplung der Fermionen an das Higgsfeld  $\phi$ . Die Wechselwirkungslagrangedichte für die Kopplung der Leptonen der 1. Generation lautet

$$\mathcal{L}(ee\Phi) = -f_e \overline{\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}}_L \phi e_R + h.c. \quad (7.117)$$



Sie ist invariant unter  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Nach Entwicklung des Higgsfeldes um den VEV erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(ee\Phi) &= -f_e \frac{v}{\sqrt{2}} [\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L] + \dots \\ &= -f_e \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{e} e + \dots \\ &= -m_e \bar{e} e + \dots\end{aligned}\tag{7.118}$$

Die Elektronenmasse ist gegeben durch

$$m_e = \frac{f_e v}{\sqrt{2}} \tag{7.119}$$

## 7.7 Die CKM Matrix

### 7.7.1 Vorbemerkung

Seien  $\chi_1, \chi_2$   $SU(2)$  Dubletts. Dann gibt es zwei Möglichkeiten, ein  $SU(2)$  Singulett zu bilden:

- 1)  $\chi_1^\dagger \chi_2$  und  $\chi_2^\dagger \chi_1$
- 2)  $\chi_1^T \epsilon \chi_2$  und  $\chi_2^T \epsilon \chi_1$ , wobei

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Führe eine  $SU(2)$  Transformation durch

$$\begin{aligned}\chi_1(x) &\rightarrow U(x)\chi_1(x) & \chi_1^\dagger &\rightarrow \chi_1^\dagger U^{-1} \\ \chi_2(x) &\rightarrow U(x)\chi_2(x) & \chi_2^\dagger &\rightarrow \chi_2^\dagger U^{-1},\end{aligned}\tag{7.120}$$

wobei

$$U(x) = e^{i\omega_a(x)\tau^a/2}.\tag{7.121}$$

1) ist invariant unter dieser Transformation.

2) Hier haben wir

$$(U\chi_1)^T \epsilon U\chi_2 = \chi_1^T U^T \epsilon U\chi_2 = \chi_1^T \epsilon \chi_2\tag{7.122}$$

denn mit

$$U = e^{iA} = \sum_0^\infty \frac{(iA)^n}{n!} \Rightarrow U^T = \sum_n \frac{(iA^T)^n}{n!}, \quad A = \omega_a(x) \frac{\tau^a}{2}.\tag{7.123}$$

Und da  $(\tau^a)^T \epsilon = -\epsilon \tau^a$ , erhalten wir

$$U^T \epsilon U = \epsilon U^{-1} U = \epsilon,\tag{7.124}$$

so daß 2) auch invariant ist.

## 7.7.2 Die Yukawa-Lagrangedichte

Es soll die allgemeinste, renormierbare,  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  invariante hermitesche Fermion-Fermion-Boson-Lagrangedichte konstruiert werden. Mit den  $SU(2)$  Dubletts

$$\begin{pmatrix} U_L \\ D'_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N_L \\ E_L \end{pmatrix}, \Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (7.125)$$

und den  $SU(2)$  Singulets

$$U_R, D'_R, E_R \quad (7.126)$$

können wir 2  $SU(2)$  invariante Wechselwirkungen konstruieren,

$$\Phi^\dagger \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \end{pmatrix} = (\phi^+)^* \psi_{1L} + (\phi^0)^* \psi_{2L} \quad (7.127)$$

und

$$\Phi^T \epsilon \begin{pmatrix} \psi_{1L} \\ \psi_{2L} \end{pmatrix} = \phi^+ \psi_{2L} - \phi^0 \psi_{1L}, \quad (7.128)$$

so daß wir für die Yukawa Lagrangedichte bei Erhaltung der Hyperladung erhalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk} = & -(\bar{e}_R, \bar{\mu}_R, \bar{\tau}_R) C_E \begin{pmatrix} \Phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \\ \Phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix} \\ \Phi^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} + (\bar{u}_R, \bar{c}_R, \bar{t}_R) C_U \begin{pmatrix} \Phi^T \epsilon \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\ \Phi^T \epsilon \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix} \\ \Phi^T \epsilon \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ & -(\bar{d}'_R, \bar{s}'_R, \bar{b}'_R) C_D \begin{pmatrix} \Phi^\dagger \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\ \Phi^\dagger \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix} \\ \Phi^\dagger \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} + h.c. . \end{aligned} \quad (7.129)$$

Die  $C_E, C_U, C_D$  sind beliebige komplexe Matrizen. Wir machen durch die folgenden unitären Transformationen einen Übergang in eine äquivalente Feldbasis (Felder sind keine Observablen!)

$$\begin{aligned} N_L(x) & \rightarrow V_1 N_L(x) & U_L(x) & \rightarrow V_2 U_L(x) \\ E_L(x) & \rightarrow V_1 E_L(x) & D'_L(x) & \rightarrow V_2 D'_L(x) \\ E_R(x) & \rightarrow U_1 E_R(x) & U_R(x) & \rightarrow U_2 U_R(x) \\ & & D'_R(x) & \rightarrow U_3 D'_R(x), \end{aligned} \quad (7.130)$$

wobei  $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2$  unitäre  $3 \times 3$  Matrizen sind. Da sich Lepton und Quarkdubletts auf dieselbe Weise transformieren, ändert dies nicht die Yang-Mills-, die Higgs- und die Yang-Mills Fermion Lagrangedichte. Lediglich die  $C$  Matrizen werden verändert:

$$C_E \rightarrow U_1^\dagger C_E V_1 \quad C_U \rightarrow U_2^\dagger C_U V_2 \quad C_D \rightarrow U_3^\dagger C_D V_2. \quad (7.131)$$

Indem man die  $U_1^\dagger$  und  $V_1$  Matrizen geeignet wählt, kann  $C_E$  diagonalisiert werden,

$$U_1^\dagger C_E V_1 = \begin{pmatrix} h_e & & \\ & h_\mu & \\ & & h_\tau \end{pmatrix} \quad \text{mit } h_e, h_\mu, h_\tau \geq 0. \quad (7.132)$$

Genauso,

$$U_2^\dagger C_U V_2 = \begin{pmatrix} h_u & & \\ & h_c & \\ & & h_t \end{pmatrix} \quad \text{mit } h_u, h_c, h_t \geq 0. \quad (7.133)$$

Glg. (7.133) legt die Matrix  $V_2$  fest. Indem man  $U_3$  geeignet wählt, erhält man

$$U_3^\dagger C_D V_2 = \begin{pmatrix} h_d & & \\ & h_s & \\ & & h_b \end{pmatrix} V^\dagger \quad \text{mit } h_u, h_c, h_t \geq 0. \quad (7.134)$$

wobei  $V^\dagger$  eine unitäre Matrix bezeichnet. Wir transformieren  $D'_R$  durch  $D'_R \rightarrow V^\dagger D'_R$  und erhalten

$$C_D \rightarrow V \begin{pmatrix} h_d & & \\ & h_s & \\ & & h_b \end{pmatrix} V^\dagger. \quad (7.135)$$

Wir entwickeln  $\Phi$  um den Vakuumerwartungswert

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (7.136)$$

wobei  $H(x)$  ein reelles Feld ist, und erhalten

$$\begin{aligned} & (\bar{d}'_R, \bar{s}'_R, \bar{b}'_R) V \begin{pmatrix} h_d & & \\ & h_s & \\ & & h_b \end{pmatrix} V^\dagger \begin{pmatrix} \Phi^\dagger \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} \\ \Phi^\dagger \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix} \\ \Phi^\dagger \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= (\bar{d}'_R, \bar{s}'_R, \bar{b}'_R) V \begin{pmatrix} h_d & & \\ & h_s & \\ & & h_b \end{pmatrix} V^\dagger \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H(x))d'_L \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H(x))s'_L \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H(x))b'_L \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.137)$$

Nach einer Basistransformation

$$\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} = V^\dagger \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} \quad (7.138)$$

haben wir schließlich

$$(\bar{d}_R, \bar{s}_R, \bar{b}_R) \begin{pmatrix} h_d & & \\ & h_s & \\ & & h_b \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H(x)) \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}. \quad (7.139)$$

Die Yang-Mills und die Higgs-Lagrangedichte ändern sich nicht unter der Transformation (7.138). Aber die Yang-Mills Fermion Lagrangedichte wird

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM-F} = & \bar{U}i\cancel{\partial}U + \bar{D}i\cancel{\partial}D + \bar{E}i\cancel{\partial}E + \bar{N}_L i\cancel{\partial}N_L - eJ_{em}^\mu A_\mu \\ & - \frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W} J_{NC}^\mu Z_\mu - \frac{e}{\sqrt{2}\sin\theta_W} (J^{-\mu}W_\mu^+ + h.c.) . \end{aligned} \quad (7.140)$$

mit

$$J^{-\mu} = \bar{U}_L \gamma^\mu D'_L + \bar{N}_L \gamma^\mu E_L = \bar{U}_L \gamma^\mu V D_L + \bar{N}_L \gamma^\mu E_L . \quad (7.141)$$

Die unitäre  $3 \times 3$  Matrix  $V$  wird CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) Mischungsmatrix genannt.

Die Matrix  $V$  ist unitär, *d.h.*  $V^\dagger V = VV^\dagger = 1$ . Schauen wir die Anzahl der freien Parameter an. Für eine  $n \times n$  komplexe Matrix haben wir  $2n^2$  freie Parameter. Da die Matrix unitär ist, ist die Anzahl freier Parameter um  $n^2$  Bestimmungsgleichungen reduziert. Außerdem können die Phasen durch eine Redefinition der Fermionfelder absorbiert werden, so daß die Anzahl der freien Parameter um weitere  $(2n - 1)$  Bedingungen reduziert ist:

<u>Parameter:</u>	$n \times n$ komplexe Matrix:	$2n^2$
	Unitarität:	$n^2$
	freie Phasenwahl:	$\frac{2n-1}{(n-1)^2}$ freie Parameter

In der Euler Parametrisierung bekommen wir

Drehwinkel:	$\frac{1}{2}n(n-1)$
Phasen:	$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

So finden wir für  $n = 2, 3$

$n$	Winkel	Phasen
2	1	0
3	3	1

Damit gilt also in einer

2 – Familien Theorie	~ Cabibbo:	keine $\mathcal{CP}$ Verletzung mit $L$ Strömen
3 – Familien Theorie	~ KM:	komplexe Matrix $\rightarrow \mathcal{CP}$ Verletzung

Die Bestimmung der Elemente der CKM-Matrix geschieht im Experiment über entsprechende Observablen. Dies ist ein weites Feld und nicht-trivial. Für mehr Informationen hierüber sei auf die entsprechende Literatur verwiesen.



# Kapitel 8

## Higgsboson Phänomenologie

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Phänomenologie des Higgsbosons am Large Hadron Collider (LHC) beschäftigen, also den Fragen nachgehen:

1. Wie kann das Higgsboson am LHC erzeugt werden?
2. In welchen Kanälen wird nach dem Higgsboson gesucht?
3. Wie können wir seine Eigenschaften bestimmen? Wie verifizieren wir den Higgsmechanismus experimentell?
4. Was kommt nach der Entdeckung des Higgsbosons?

Im vorigen Kapitel haben wir gelernt, dass der Higgsmechanismus die Erzeugung der Teilchenmassen ohne Verletzung der SM Eichsymmetrien  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  ermöglicht. Eine Folge des Higgsmechanismus ist, dass die Kopplungen des Higgsbosons an die massiven SM-Teilchen proportional zur Masse der Teilchen sind. Diese Kopplungen sowie die Higgs-selbstkopplungen sind in Tabelle 8.1 nochmals zusammengefasst. Die Higgs-selbstkopplungen ergeben sich aus dem Higgspotential

$$V(\Phi) = \lambda \left[ \Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right]^2. \quad (8.1)$$

Dieses kann nach Einführung des Higgsbosons in der unitären Eichung

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

geschrieben werden als

$$V(H) = \frac{1}{2} M_H^2 H^2 + \frac{M_H^2}{2v} H^3 + \frac{M_H^2}{8v^2} H^4. \quad (8.3)$$

Daraus lassen sich direkt die Masse des Higgsteilchens sowie seine trilineare und quartische Selbstkopplung ablesen. Letztere sind im SM eindeutig durch die Masse des Higgsteilchens bestimmt.

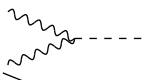
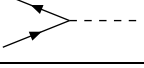
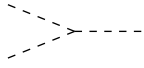

Mass of the Higgs boson	$M_H = \sqrt{2\lambda v}$	
Couplings to gauge bosons	$g_{VVH} = \frac{2M_V^2}{v}$	
Yukawa couplings	$g_{ffH} = \frac{m_f}{v}$	
Trilinear coupling [units $\lambda_0 = 33.8 \text{ GeV}$ ]	$\lambda_{HHH} = 3\frac{M_H^2}{M_Z^2}$	
Quartic coupling [units $\lambda_0^2$ ]	$\lambda_{HHHH} = 3\frac{M_H^2}{M_Z^4}$	

Tabelle 8.1: Die Kopplungen des Higgsbosons an die massiven Eichbosonen  $V \equiv W, Z$  und die Fermionen  $f$ . Die trilineare Higgsselfkopplung ist in der Einheit  $\lambda_0$ , die quartische in der Einheit  $\lambda_0^2$  angegeben.

## 8.1 Verifizierung des Higgsmechanismus

Am 4. Juli 2012 gaben die LHC Experimente ATLAS und CMS die Entdeckung eines neuen skalaren Teilchens mit der Masse  $M_H \approx 125 \text{ GeV}$  bekannt. Die Entdeckung löste unmittelbar die Untersuchung der Eigenschaften des Teilchens aus. Im März 2013 teilte das CERN in einer offiziellen Presseerklärung mit, dass es sich bei dem entdeckten Teilchen tatsächlich um das Higgsteilchen handelt. Wie kommt man zu dieser Aussage? Oder anders gesagt, wie kann der Higgsmechanismus experimentell nachgewiesen werden? Hierfür müssen folgende Schritte unternommen werden:

1. Zunächst muss das Higgsteilchen natürlich entdeckt werden.
2. Es müssen dann seine Kopplungen an die Eichbosonen und Fermionen gemessen werden. Wenn der Higgsmechanismus die Teilchenmassen erzeugt, dann müssen die Kopplungen proportional zu den Massen(-quadraten) dieser Teilchen sein.
3. Die Spin- und Paritätsquantenzahlen des Higgsbosons müssen bestimmt werden.
4. Schließlich müssen die trilinearen und quartischen Higgsselfkopplungen gemessen werden. Sind sie bekannt, so kann das Higgspotential rekonstruiert werden und somit überprüft werden, ob es tatsächlich die typische Mexikanerhutform hat, die für den nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert verantwortlich ist.

Im folgenden werden wir sehen, wie dieses Programm am LHC durchgeführt werden kann.

## 8.2 Die Higgsentdeckung

Um nach dem Higgsboson zu suchen, muss man wissen, in welchen Prozessen es erzeugt wird und in welche Endzustände es zerfällt. Zunächst wollen wir uns die Zerfallskanäle des Higgsbosons anschauen.

## 8.2.1 Die Higgsboson Zerfallskanäle

Da das Higgsboson proportional zur Masse der Teilchen koppelt, sind seine wichtigsten Zerfallskanäle die in die schweren Teilchen, die kinematisch noch erlaubt sind. Die Wahrscheinlichkeit, mit der das Higgsboson in einen Endzustand  $X$  zerfällt, wird durch das Verzweungsverhältnis (englisch: branching ratio)  $BR(X)$  angegeben. Dieses ergibt sich aus der partiellen Zerfallsbreite (oder Partialbreite)  $\Gamma$  in den Zustand  $X$ ,  $\Gamma(H \rightarrow XX)$ , geteilt durch die Gesamtbreite  $\Gamma_{\text{tot}}$  des Higgsbosons. Die Gesamtbreite bestimmt sich aus der Summe der Partialbreiten sämtlicher Zerfallskanäle des Higgsbosons. Also

$$BR(H \rightarrow XX) \equiv \frac{\Gamma(H \rightarrow XX)}{\Gamma_{\text{tot}}(H)}, \quad (8.4)$$

mit

$$\Gamma_{\text{tot}}(H) = \sum_i \Gamma(H \rightarrow ii), \quad (8.5)$$

wobei  $i$  über sämtliche mögliche Zerfallskanäle des Higgsbosons summiert. Die Partialbreite des Higgszerfalls in den Zustand  $X$  wird bestimmt, indem man den Wirkungsquerschnitt für den Zerfall des Higgsbosons in den Endzustand  $XX$  berechnet (siehe Übungsaufgaben). Für den Zerfall in den Fermionenzustand  $f\bar{f}$  haben wir das Feynmandiagramm in Fig. 8.1, das zur Zerfallsamplitude beiträgt. Für die Zerfallsbreite ergibt sich

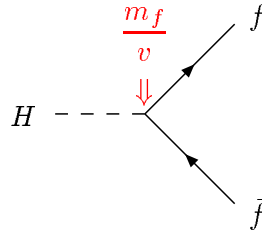


Abbildung 8.1: Das zum Zerfall  $H \rightarrow f\bar{f}$  beitragende Feynmandiagramm.

$$\Gamma(H \rightarrow f\bar{f}) = \frac{N_{cf} G_F M_H}{4\sqrt{2}\pi} m_f^2 \beta^3. \quad (8.6)$$

Bei  $N_{cf}$  handelt es sich um den Farbfaktor. Er ist  $N_{cf} = 1$  für Leptonen und  $N_{cf} = 3$  für Quarks. Mit  $\beta$  wird die Velozität bezeichnet. Sie ist gegeben durch

$$\beta = (1 - 4m_f^2/M_H^2)^{1/2}. \quad (8.7)$$

Wie aus der Energieerhaltung zu erwarten, findet der Zerfall also nur statt, wenn die Schwerpunktsenergie zum Quadrat größer als  $(2m_f)^2$  ist. Die Schwerpunktsenergie ist hier die Ruheenergie des zerfallenden Higgsbosons, also  $M_H^2$ . Die Verzweungsverhältnisse der Higgszerfälle in Fermionpaare für ein Higgsboson der Masse  $M_H = 125$  GeV sind

$$BR(H \rightarrow b\bar{b}) = 0.5811 \quad (8.8)$$

$$BR(H \rightarrow \tau^+\tau^-) = 0.0626 \quad (8.9)$$

$$BR(H \rightarrow c\bar{c}) = 0.0289 \quad (8.10)$$

$$BR(H \rightarrow s\bar{s}) = 0.2238 \cdot 10^{-3} \quad (8.11)$$

$$BR(H \rightarrow \mu^+\mu^-) = 0.2171 \cdot 10^{-3}. \quad (8.12)$$



Der Zerfall in ein top-Quarkpaar ist kinematisch nicht erlaubt ( $m_t = 173.2$  GeV). Wie zu erwarten ist das Verzweigungsverhältnis für ein  $b$ -Quarkpaar im Endzustand am größten. Diese Zerfallsbreiten wurden mit dem Fortran Programm HDECAY berechnet. Es gibt weitere Programme auf dem Markt, die die Higgs-Verzweigungsverhältnisse berechnen, z.B. FeynHiggs oder Prophecy4f. Das Programm HDECAY (wie auch andere) berücksichtigt in den Zerfällen die wichtigsten höheren Ordnungskorrekturen. So können beispielsweise die QCD Korrekturen für die Zerfälle in Quarks bis zu  $-50\%$  betragen.

Die Masse des  $W$ -Bosons beträgt  $m_W = 80.385$  GeV, die des  $Z$ -Bosons  $m_Z = 91.187$  GeV. Damit kann ein Higgsboson der Masse 125 GeV nicht in zwei on-shell  $W$ - oder  $Z$ -Bosonen zerfallen. Vielmehr ist eines davon off-shell. Die partielle Breite für den Zerfall des Higgsbosons in ein Paar von massiven Eichbosonen  $V \equiv W, Z$ , von denen eines off-shell ist, ergibt sich zu

$$\Gamma(H \rightarrow VV^*) = \delta'_V \frac{3G_F^2 M_V^4 M_H}{16\pi^3} R \left( \frac{M_V^2}{M_H^2} \right), \quad (8.13)$$

mit  $\delta'_W = 1$  und  $\delta'_Z = 7/12 - 10 \sin^2 \theta_W / 9 + 40 \sin^4 \theta_W / 27$  und

$$R(x) = 3 \frac{1 - 8x + 20x^2}{\sqrt{4x - 1}} \arccos \left( \frac{3x - 1}{2x^{3/2}} \right) - \frac{1 - x}{2x} (2 - 13x + 47x^2) - \frac{3}{2} (1 - 6x + 4x^2) \log x. \quad (8.14)$$

Der Vollständigkeit halber geben wir auch noch die Zerfallsbreite in ein Paar von zwei massiven on-shell Vektorbosonen an (die nur für Higgsmassen oberhalb der kinematischen Schwelle anzuwenden ist),

$$\Gamma(H \rightarrow VV) = \delta_V \frac{G_F M_H^3}{16\sqrt{2}\pi} \beta (1 - 4x + 12x^2), \quad (8.15)$$

mit  $x = M_V^2/M_H^2$ ,  $\beta = \sqrt{1 - 4x}$  und  $\delta_V = 2(1)$  für  $V = W(Z)$ .

Die Verzweigungsverhältnisse für ein Higgsboson der Masse 125 GeV in ein Paar von massiven Eichbosonen ergeben sich zu

$$BR(H \rightarrow W^+W^-) = 0.2152 \quad (8.16)$$

$$BR(H \rightarrow ZZ) = 0.2634 \cdot 10^{-1}. \quad (8.17)$$

Man sieht also, dass diese Zerfälle, auch wenn sie off-shell sind, durchaus wichtig sind für ein Higgsboson dieser Masse. Die hier angegebenen Verzweigungsverhältnisse enthalten in den Zerfallsbreiten in die  $W$  bzw.  $Z$ -Bosonen die elektroschwachen Korrekturen, die von der Größenordnung 4% (2%) für den Zerfall in  $W$ 's ( $Z$ 's) sind.

Der Zerfall in Gluonen findet über eine Quark-Schleife statt, da das Higgsboson nicht direkt an die masselosen Gluonen koppelt, cf. Fig. 8.2. Die dominanten Beiträge kommen von den top- und bottom-Quarkschleifen. Die Zerfallsrate kann in niedrigster Ordnung geschrieben werden als

$$\Gamma_{LO}(H \rightarrow gg) = \frac{G_F \alpha_s^2 M_H^3}{36\sqrt{2}\pi^3} \left| \sum_{Q=t,b} A_Q^H(\tau_Q) \right|^2, \quad (8.18)$$

mit dem Formfaktor

$$A_Q^H = \frac{3}{2}\tau[1 + (1 - \tau)f(\tau)] \quad (8.19)$$

$$f(\tau) = \begin{cases} \arcsin^2 \frac{1}{\sqrt{\tau}} & \tau \geq 1 \\ -\frac{1}{4} \left[ \log \frac{1 + \sqrt{1 - \tau}}{1 - \sqrt{1 - \tau}} - i\pi \right]^2 & \tau < 1 \end{cases} \quad (8.20)$$

Der Parameter  $\tau_Q = 4M_Q^2/M_H^2$  ist durch die Polmasse  $M_Q$  des schweren Schleifenquarks  $Q = t, b$  gegeben. Im Grenzfall schwerer Quarkmassen geht der Formfaktor  $A_Q^H \rightarrow 1$ . Die starke Koppungskonstante wird mit  $\alpha_s$  bezeichnet. Die QCD-Korrekturen zu dem Zerfall wurden berechnet und sind groß. Auf nächstführender Ordnung vergrößern sie die partielle Breite um 70%. Das Verzweungsverhältnis inklusive QCD Korrekturen auf nächst-nächst-nächst-höherer ( $N^3LO$ ) Ordnung ist

$$BR(H \rightarrow gg) = 0.08169 . \quad (8.21)$$

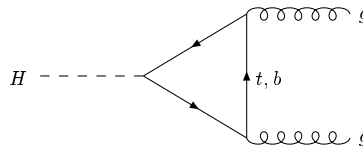


Abbildung 8.2: Der Higgszerfall in Gluonen.

Weitere Schleifen-induzierte Zerfälle sind die in 2 Photonen oder ein Photon und ein Z-Boson. Sie werden durch Schleifen mit geladenen Fermionen und W-Bosonen vermittelt, wobei letztere dominant sind, cf. Fig. 8.3. Die partielle Breite in Photonen ergibt sich auf

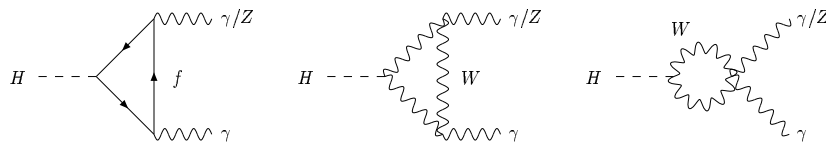


Abbildung 8.3: Der Higgszerfall in  $\gamma\gamma$  und  $Z\gamma$ .

führender Ordnung zu

$$\Gamma(H \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{G_F \alpha^2 M_H^3}{128 \sqrt{2} \pi^3} \left| \sum_f N_{cf} e_f^2 A_f^H(\tau_f) + A_W^H(\tau_W) \right|^2, \quad (8.22)$$

mit den Formfaktoren

$$A_f^H(\tau) = 2\tau[1 + (1 - \tau)f(\tau)] \quad (8.23)$$

$$A_W^H(\tau) = -[2 + 3\tau + 3\tau(2 - \tau)f(\tau)], \quad (8.24)$$

wobei die Funktion  $f(\tau)$  in Glg. (8.20) definiert ist. Die Parameter  $\tau_i = 4M_i^2/M_H^2$  ( $i = f, W$ ) sind durch die Massen der entsprechenden Schleifenteilchen gegeben.  $N_{cf}$  bezeichnet den

Farbfaktor des Fermions und  $e_f$  seine elektrische Ladung. Im Limes großer Schleifenteilchenmassen werden die Formfaktoren

$$\begin{aligned} A_f^H &\rightarrow \frac{4}{3} && \text{für } M_H^2 \ll 4M_Q^2 \\ A_W^H &\rightarrow -7 && \text{für } M_H^2 \ll 4M_W^2. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Die  $W$ -Schleife liefert den dominanten Beitrag im intermediären Higgsmassenbereich. Sie interferiert destruktiv mit den Fermionschleifen. Die QCD Korrekturen wurden berechnet und sind im intermediären Higgsmassenbereich klein.

Die partielle Breite in  $Z\gamma$  ist auf führender Ordnung durch

$$\Gamma(H \rightarrow Z\gamma) = \frac{G_F^2 M_W^2 \alpha M_H^3}{64\pi^4} \left(1 - \frac{M_Z^2}{M_H^2}\right)^3 \left| \sum_f A_f^H(\tau_f, \lambda_f) + A_W^H(\tau_W, \lambda_W) \right|^2, \quad (8.26)$$

gegeben, mit den Formfaktoren

$$\begin{aligned} A_f^H(\tau, \lambda) &= 2N_{cf} \frac{e_f(I_{3f} - 2e_f \sin^2 \theta_W)}{\cos \theta_W} [I_1(\tau, \lambda) - I_2(\tau, \lambda)] \\ A_W^H(\tau, \lambda) &= \cos \theta_W \left\{ 4(3 - \tan^2 \theta_W) I_2(\tau, \lambda) \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left(1 + \frac{2}{\tau}\right) \tan^2 \theta_W - \left(5 + \frac{2}{\tau}\right) \right] I_1(\tau, \lambda) \right\}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Die Funktionen  $I_1$  and  $I_2$  lauten

$$I_1(\tau, \lambda) = \frac{\tau\lambda}{2(\tau - \lambda)} + \frac{\tau^2\lambda^2}{2(\tau - \lambda)^2} [f(\tau) - f(\lambda)] + \frac{\tau^2\lambda}{(\tau - \lambda)^2} [g(\tau) - g(\lambda)] \quad (8.28)$$

$$I_2(\tau, \lambda) = -\frac{\tau\lambda}{2(\tau - \lambda)} [f(\tau) - f(\lambda)]. \quad (8.29)$$

Die Funktion  $g(\tau)$  kann geschrieben werden als

$$g(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\tau - 1} \arcsin \frac{1}{\sqrt{\tau}} & \tau \geq 1 \\ \frac{\sqrt{1-\tau}}{2} \left[ \log \frac{1+\sqrt{1-\tau}}{1-\sqrt{1-\tau}} - i\pi \right] & \tau < 1 \end{cases} \quad (8.30)$$

Die Parameter  $\tau_i = 4M_i^2/M_H^2$  und  $\lambda_i = 4M_i^2/M_Z^2$  ( $i = f, W$ ) sind durch die entsprechenden Massen der schweren Schleifenteilchen definiert. Die  $W$ -Schleife dominiert in der intermediären Higgsmassenregion und interferiert destruktiv mit den Fermionschleifen.

Die Verzweigungsverhältnisse in  $\gamma\gamma$  und  $Z\gamma$  für  $M_H = 125$  GeV ergeben sich zu

$$BR(H \rightarrow \gamma\gamma) = 2.265 \cdot 10^{-3} \quad (8.31)$$

$$BR(H \rightarrow Z\gamma) = 1.529 \cdot 10^{-3}. \quad (8.32)$$

Obwohl das Verzweigungsverhältnis in Photonen sehr klein ist, ist es aufgrund des sauberen Endzustands ein wichtiger Higgs-Entdeckungskanal.

Figur 8.4 zeigt die Verzweigungsverhältnisse und die totale Breite eines SM-Higgsbosons beliebiger Masse  $M_H$ . Heute wissen wir, dass das Higgsboson eine Masse von 125 GeV hat. Dies ist besonders interessant, da für diese Masse viele Zerfälle möglich sind. Die Figur zeigt auch, dass ein Higgsboson mit einer Masse kleiner als etwa 140 GeV eine sehr kleine totale

Breite, weniger als  $\sim 10$  MeV, hat. Die Bestimmung der totalen Breite wird am LHC sehr schwierig werden. Wenn überhaupt, so ist dies nur mit Modellannahmen möglich. Für ein Higgsboson, das eine Masse oberhalb der Schwelle für Zerfälle in Eichbosonen hat, steigt die Breite rapide an. Dies liegt daran, dass die partiellen Breiten für den Zerfall in Eichbosonen proportional zu  $M_H^3$  sind. Unterhalb der Eichbosonschwelle ist der Hauptzerfallskanal der in  $b\bar{b}$ , gefolgt von dem Zerfall in  $\tau^+\tau^-$ .

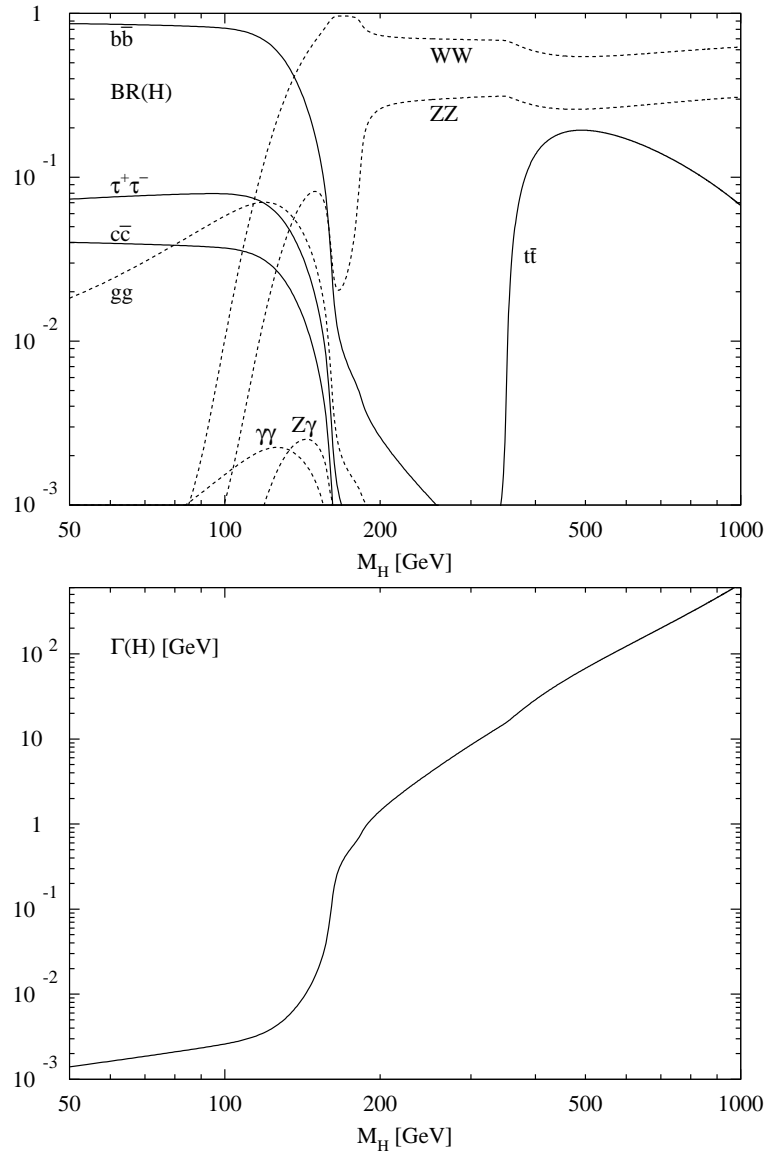


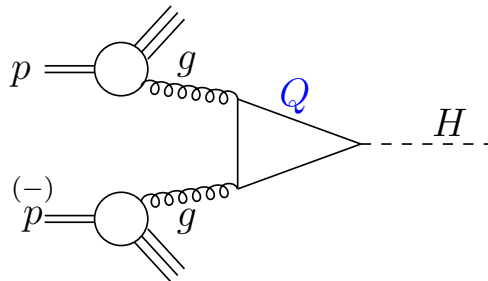
Abbildung 8.4: Die Verzweigungsverhältnisse (oben) und die totale Breite (unten) eines SM-Higgsbosons mit Masse  $M_H$  als Funktion von  $M_H$ . Die Plots wurden mithilfe des Programms HDECAY [Djouadi, Kalinowski, MMM, Spira] erzeugt.

## 8.2.2 Higgsboson Produktion am LHC

Es gibt mehrere Mechanismen am LHC, um das Higgsboson zu erzeugen. Diese werden im folgenden vorgestellt.

- Gluon Fusion: Der dominante Erzeugungsmechanismus für ein SM-Higgsboson am LHC ist die Gluon Fusion.

[Georgi, et al.;Gamberini, et al.]



$$pp \rightarrow gg \rightarrow H . \quad (8.33)$$

Im SM wird der Prozess durch top- und bottom-Quarkschleifen vermittelt,  $Q = t, b$ . Die QCD Korrekturen zu diesem Prozess sind groß. Auf nächstführender Ordnung (NLO), welche 2-Schleifen-Diagramme einschließt, betragen sie bis zu 100%. Dies kann man in Fig. 8.5 sehen, die den NLO  $K$ -Faktor als Funktion der Higgsmasse für die virtuellen und die reellen Korrekturen zeigt. Der  $K$ -Faktor ist hier definiert als das Verhältnis des NLO Wirkungsquerschnitts zum Wirkungsquerschnitt auf führender Ordnung (LO). Die Variation der Skala, an welcher der Wirkungsquerschnitts bestimmt wird, gibt ein Maß für die theoretische Unsicherheit der Vorhersage des Wirkungsquerschnitts aufgrund fehlender höherer Ordnungen. Könnte man den Wirkungsquerschnitt bis zu allen Ordnungen in der Störungstheorie bestimmen, so gäbe es keine Skalenabhängigkeit. Die Skalenabhängigkeit ist durch die Bänder in Fig. 8.6 angezeigt. Hier wurde die Skala um die typische Skala des Prozesses, die Higgsmasse, variiert. Es zeigt sich, dass die Skalenabhängigkeit von LO zu NLO zu NNLO abnimmt, wie zu erwarten war.

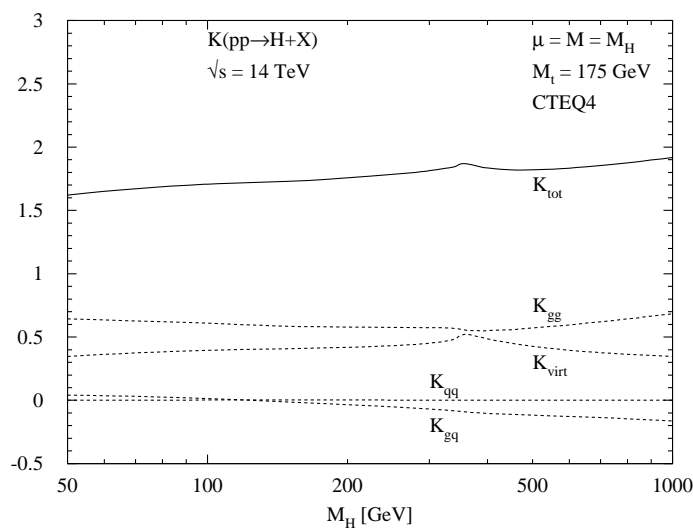
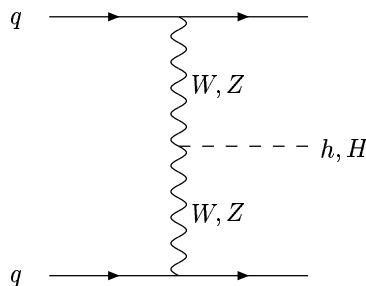


Abbildung 8.5: Der  $K$ -Faktor für den Gluonfusions-Prozess als Funktion der Higgsmasse. [Spira,Djouadi,Graudenz,Zerwas]

Aufgrund der Komplexität der Rechnung, wurden die Korrekturen auf NNLO im Limes schwerer Topmassen, also mit der Näherung  $M_H \ll m_t$ , berechnet. Der Vergleich des NLO Wirkungsquerschnitts in diesem Limes mit dem unter Einbezug der vollen Massenabhängigkeit zeigt, dass diese Näherung bis auf 20-30% genau ist. Die NNLO Korrekturen vergrößern den Wirkungsquerschnitt um weitere 20-30%. Die Resummation der weichen Gluonen fügt nochmals 10% hinzu. In den letzten Jahren gab es weitere große Fortschritte in der Bestimmung der höheren Ordnungskorrekturen zur Gluonfusion:

- ▷ complete NLO: **increase  $\sigma$  by  $\sim 80-100\%$**  Spira,Djouadi,Graudenz,Zerwas  
Dawson;Kauffman,Schaffer
- ▷ SM: limit  $M_\Phi \ll m_t$  - **approximation  $\sim 20-30\%$**  Krämer,Laenen,Spira
- ▷ NNLO @  $M_\Phi \ll m_t \Rightarrow$  **further increase by 20-30%** Harlander,Kilgore  
Anastasiou,Melnikov  
Ravindran,Smith,van Neerven
- ▷ Estimate of NNNLO effects @  $M_\Phi \ll m_t$  Moch,Vogt  
Ravindran  
  - $\rightsquigarrow$  **scale stabilisation**
  - scale dependence:  $\Delta \lesssim 10 - 15\%$
- ▷ NNLL resummation:  **$\sim 6 - 9\%$**  Catani,de Florian,Grazzini,Nason  
Moch,Vogt; Laenen,Magnea; Idilbi eal
- ▷ leading soft contribution at N<sup>3</sup>LO in limit  $m_t \rightarrow \infty$  Ravindran,Smith,van Nerven; Ahrens eal
- ▷ NNLO mass effects ( $t$  loops) Harlander,Ozeren;Pak,Rogal,Steinhauser;  
Marzani et al.  
  - for  $M_H \lesssim 300$  GeV  $\Rightarrow \mathcal{O}(0.5\%)$**
- ▷ NLO electroweak corrections  **$\sim \mathcal{O}(5\%)$  (SM)** Aglietti et al.;Degrassi,Maltoni;  
Actis et al
- ▷ mixed QCD and EW corrections Anastasiou,Boughezal,Petriello
- ▷ NLO for  $H+\text{jet} \lesssim 1\%$  Keung,Petriello; Brein
  
- ▷ steps towards N<sup>3</sup>LO QCD Bonvini,Ball,Forte,Marzani,Ridolfi;  
Baikov eal;Gehrmann eal;Li,Zhu;  
Kilgore,Höschele eal;Bühler eal;  
Chetyrkin eal;Schroder,Steinhauser;  
Tarasov eal;Larin,Vermaseren; Czakon;  
Van Ritbergen eal
- ▷ N<sup>3</sup>LO QCD  $m_t \rightarrow \infty$ : **+2.2%** Anastasiou,Duhr,Dulat,  
Herzog,Mistlberger

-  $WW/ZZ$ -Fusion: Higgsbosonen können in  $WW/ZZ$ -Fusionsprozessen produziert werden [Cahn, Dawson; Hikasa; Altarelli, Mele, Pitolli],



$$pp \rightarrow W^*W^*/Z^*Z^* \rightarrow H . \tag{8.34}$$

Die QCD Korrekturen sind berechnet worden und betragen bis zu  $\sim 10\%$  [Han, Valencia, Willenbrock]. In der Zwischenzeit wurden weitere höhere Ordnungs-QCD und EW Korrekturen berechnet. (Sie werden hier nicht weiter behandelt.)

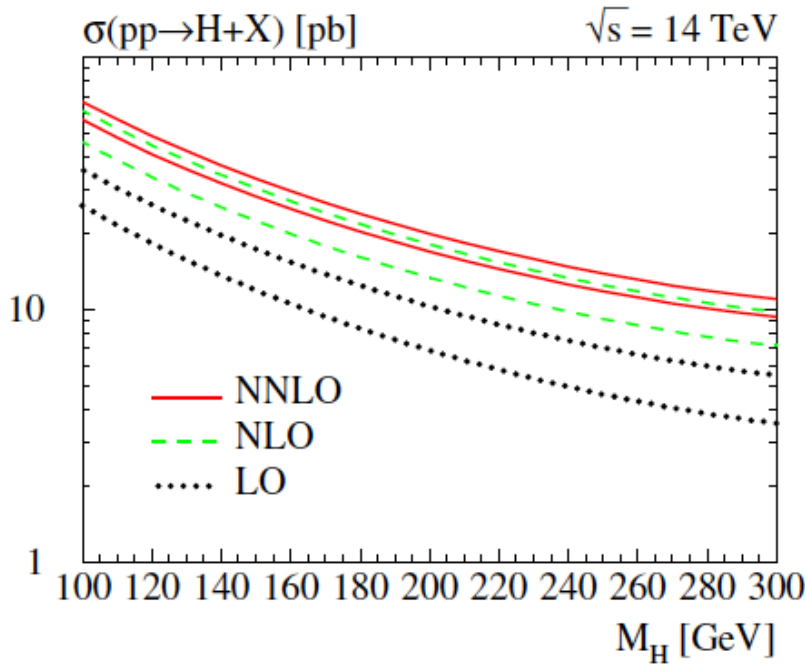
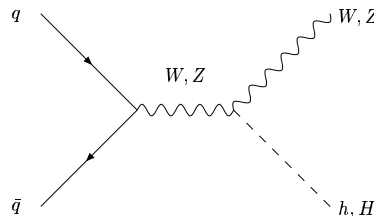


Abbildung 8.6: Der Gluonfusionswirkungsquerschnitt auf LO, NLO, NNLO inklusive Skalenvariation. [Harlander,Kilgore]

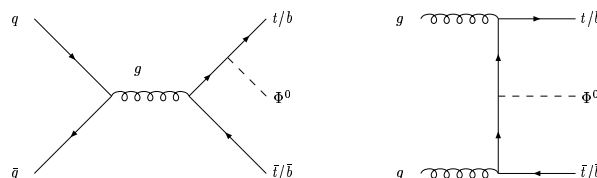
- Higgsstrahlung: Higgsboson-Produktion in Higgsstrahlung [Glashow et al.; Kunszt et al.] geht über



$$pp \rightarrow W^*/Z^* \rightarrow W/Z + H . \tag{8.35}$$

Die QCD Korrekturen betragen  $\sim 30\%$  [Han,Willenbrock]. Die NNLO QCD Korrekturen fügen weitere 5-10% hinzu [Harlander, Kilgore; Hamberg, Van Neerven, Matsuura; Brein, Djouadi, Harlander]. Der theoretische Fehler ist auf etwa 5% reduziert. Die gesamten EW Korrekturen reduzieren den Wirkungsquerschnitt um 5-10% [Ciccolini, Dittmaier, Krämer].

- Assoziierte Produktion: Higgsbosonen können auch zusammen mit top- und bottom-Quarks produziert werden [Kunszt;Gunion; Marciano, Paige]



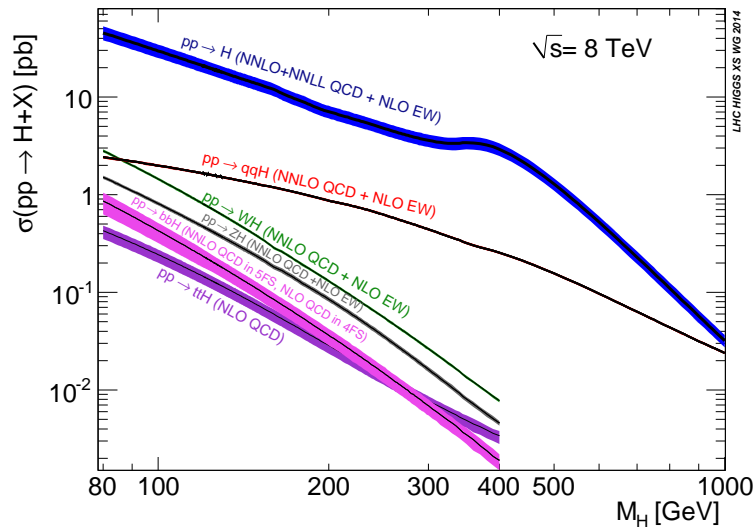


Abbildung 8.7: SM Higgsboson-Produktionswirkungsquerschnitte für  $\sqrt{s} = 8 \text{ TeV}$ .

$$pp \rightarrow t\bar{t}/b\bar{b} + H. \quad (8.36)$$

Die NLO QCD Korrekturen zu assoziierter Top-Produktion vergrößern den Wirkungsquerschnitt am LHC um 20%. [Beenakker, et al.; Dawson, et al.].

Für alle Produktions- und Untergrundprozesse wurden in den letzten Jahren in der Berechnung der höheren Ordnungs-QCD und EW Korrekturen viele Fortschritte gemacht. Sie werden in dieser Vorlesung aber nicht weiter behandelt. Für mehr Informationen wird auf die entsprechende Literatur verwiesen.

Figuren 8.7 und 8.8 zeigen die Higgsboson-Produktionswirkungsquerschnitte am LHC als Funktion der Higgsbosonmasse.

### 8.3 Higgsboson Entdeckung

Die Hauptentdeckungskanäle für das Higgsboson sind die  $\gamma\gamma$  und  $ZZ^*$  Endzustände. Der Zerfall in den  $\gamma\gamma$  Endzustand hat ein sehr kleines Verzweungsverhältnis, aber ist sehr sauber. (CMS und ATLAS haben eine exzellente Auflösung der Photonenergie. Sie schauen nach einem schmalen  $\gamma\gamma$  invarianten Massen-Peak und extrapolieren den Untergrund in die Signalregion.) Der  $ZZ^*$  Endzustand ist der andere wichtige Suchkanal. Für  $M_H = 125 \text{ GeV}$  ist er ein off-shell Zerfall. Er führt auf saubere 4-Lepton ( $4l$ ) Endzustände, die vom Zerfall der  $Z$  Bosonen kommen. Auch der  $WW$  Zerfall ist off-shell. Der Endzustand beinhaltet fehlende Energie von den Neutrinos der  $W$ -Boson Zerfälle. Der  $b\bar{b}$  Endzustand wird auch verwendet. Er hat das größte Verzweungsverhältnis, leidet aber unter einem großen QCD Untergrund. Schließlich wird auch der  $\tau\tau$  Kanal verwendet.

Die Experimente geben die besten Fit-Werte für die sogenannten reduzierten  $\mu$ -Werte im Endzustand  $X$  an. Die  $\mu$ -Werte sind die Produktionsrate mal Verzweungsverhältnis im Endzustand  $X = \gamma, Z, W, b, \tau, \dots$  normiert auf die entsprechenden Werte eines SM Higgsbo-



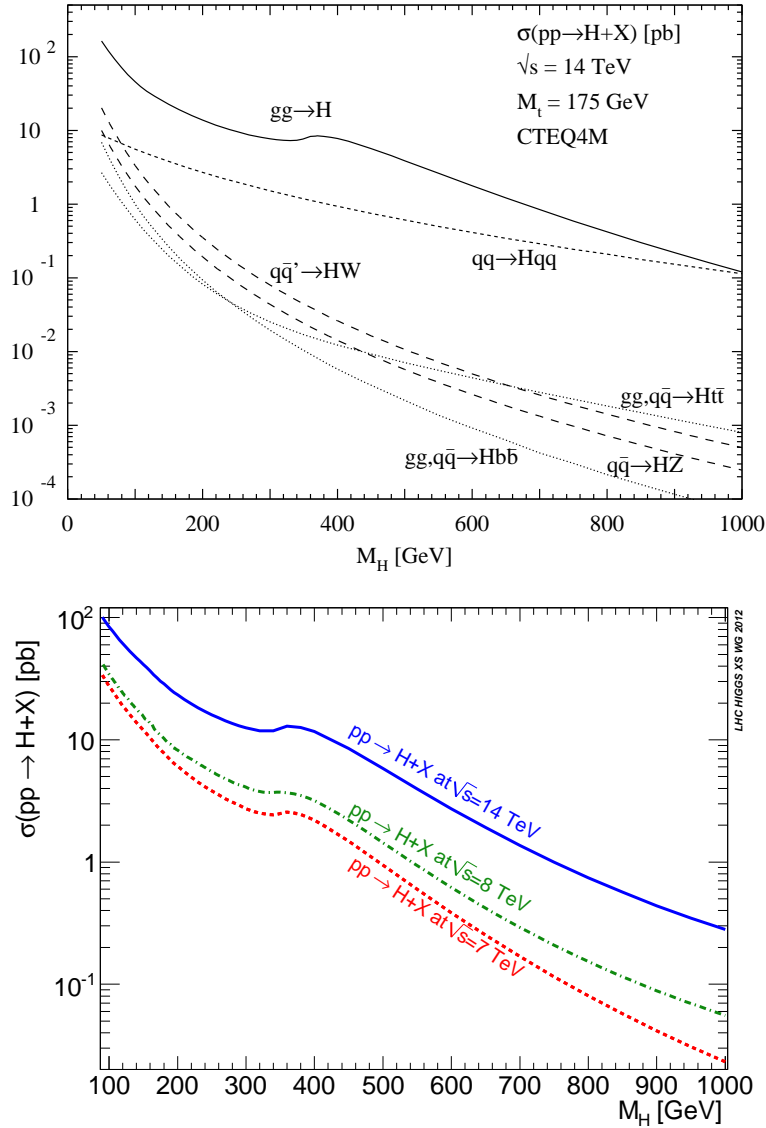


Abbildung 8.8: Oben: Higgsboson-Produktionswirkungsquerschnitte am LHC als Funktion der Higgsbosonmasse bei  $\sqrt{s} = 14$  TeV. Unten: Gesamtwirkungsquerschnitte für Higgsboson-Produktion als Funktion der Higgsmasse bei  $\sqrt{s} = 7, 8$  und  $14$  TeV.

sons,

$$\mu = \frac{\sigma_{\text{prod}} \times BR(H \rightarrow XX)}{(\sigma_{\text{prod}} \times BR(H \rightarrow XX))_{\text{SM}}} . \quad (8.37)$$

Falls das entdeckte Higgsboson ein SM Higgsboson ist, so sind alle  $\mu$ -Werte gleich 1. Figuren 8.9 und 8.11 zeigen die von den Experimenten gemessenen  $\mu$ -Werte. Die verschiedenen Endzustände haben Unsicherheiten, die Raum lassen für Interpretationen im Rahmen von Physik jenseits des SM (beyond the SM - BSM).

Die Hauptentdeckungskanäle für das 125 GeV Higgsboson bei ATLAS und CMS, d.h. die Photon- und Z-Boson-Endzustände, sind in Fig. 8.12 gezeigt.

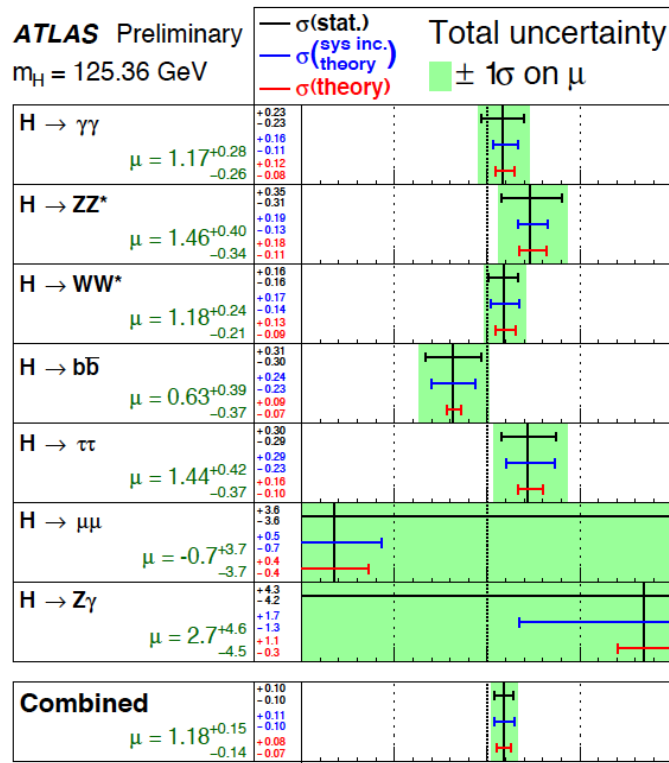


Abbildung 8.9: Die gemessenen Produktions-Signalstärken für ein Higgsboson der Masse  $m_H = 125.36 \text{ GeV}$ , normiert auf die SM-Erwartungen, für die  $f = H \rightarrow \gamma\gamma, H \rightarrow ZZ^*, H \rightarrow WW^*, H \rightarrow b\bar{b}, H \rightarrow \tau\tau, H \rightarrow \mu\mu$  und  $H \rightarrow Z\gamma$  Endzustände. Die Besten-Fit-Werte sind durch die durchgehenden vertikalen Linien gegeben. Die gesamte  $\pm 1\sigma$  Unsicherheit ist durch das gefärbte Band gezeigt, und die individuellen Beiträge der Fehler durch die Balken. [ATLAS]

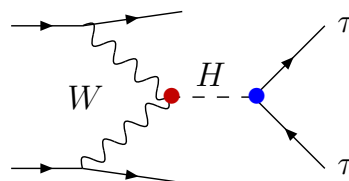


Abbildung 8.10: Feynman-Diagramm für die Produktion eines Higgsbosons in  $W$ -Bosonfusion mit anschließendem Zerfall in  $\tau\tau$ . Es ist proportional zur partiellen Breite  $\Gamma_{WW}$  und zum Verzweigungsverhältnis in  $\tau\tau$ ,  $\text{BR}(H \rightarrow \tau\tau) = \Gamma(H \rightarrow \tau\tau)/\Gamma_{\text{tot}}$ .

## 8.4 Higgsbosonkopplungen am LHC

Im Prinzip ist die Strategie für die Messung der Higgsbosonkopplungen, verschiedene Higgsproduktions- und Zerfallskanäle zu kombinieren, aus denen die Kopplungen extrahiert werden können. Zum Beispiel ist die Produktion des Higgsbosons in  $W$ -Bosonfusion mit anschließendem Zerfall in  $\tau$ -Leptonen, Fig. 8.10, proportional zur partiellen Breite in  $WW$  und

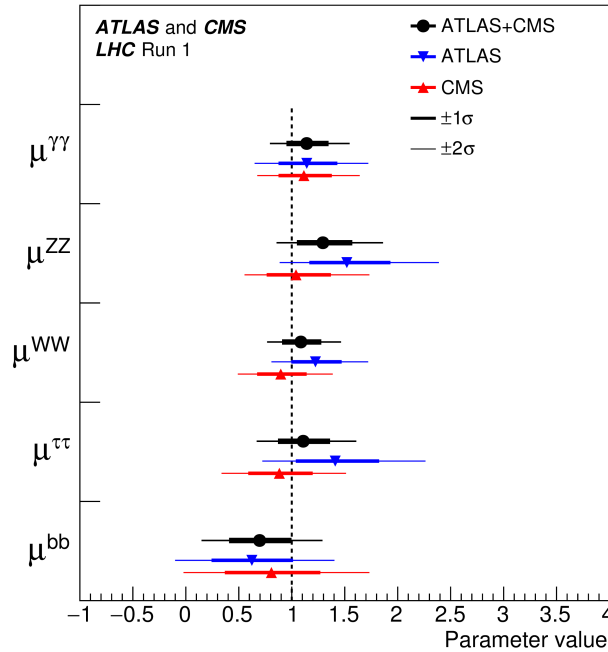


Abbildung 8.11: Beste-Fit-Werte für die Kombination der ATLAS und CMS Daten sowie für jedes einzelne Experiment separat. Die Fehlerbalken zeigen die  $1\sigma$  (dickere Linien) und die  $2\sigma$  (dünnere Linien) Intervalle.

zum Verzweungsverhältnis in  $\tau\tau$ . Um aus letzterem die Higgs- $\tau\tau$  Kopplung zu extrahieren, benötigt man die Kenntnis der totalen Higgsbreite  $\Gamma_{\text{tot}}$ . Kombinationen mit anderen Produktions-/Zerfallskanälen zusammen mit der Kenntnis der totalen Breite würden es im Prinzip erlauben, die Higgskopplungen zu bestimmen. Jedoch ist die totale Breite (die für ein SM-Higgsboson von 125 GeV sehr klein ist) am LHC ohne Modellannahmen nicht direkt messbar. Auch können nicht alle Endzustände wie z.B. der Zerfall in Gluonen,  $H \rightarrow gg$ , gemessen werden. Somit sind am LHC nur Verhältnisse von Kopplungen messbar, wenn keine Modellannahmen gemacht werden.

Die Kopplungen werden durch Fits an die  $\mu$ -Werte  $\mu = (\sigma \times BR)/(\sigma \times BR)_{\text{SM}}$ , die von den Experimenten geliefert werden, extrahiert. Von theoretischer Seite muss eine effektive Lagrangedichte bereit gestellt werden, die die Bedeutung der Kopplungen definiert. Die effektive Lagrangedichte mit den modifizierten Kopplungen kann dann verwendet werden, um (nach Ableitung der zugehörigen Feynmanregeln aus der Lagrangedichte) die Signalraten zu bestimmen, die dann an die experimentellen  $\mu$ -Werte gefittet werden. Die Frage ist, wie eine solche effektive Lagrangedichte gewonnen werden kann. Wenn wir es mit einer schwach wechselwirkenden Theorie zu tun haben, so können Effekte neuer Physik durch Operatoren höherer Dimension parametrisiert werden. Der Zugang mit der effektiven Lagrangedichte ist ein geeignetes Mittel, um eine (fast) modellunabhängige Analyse durchzuführen. Man nimmt für ihre Konstruktion ein paar wenige grundlegende Prinzipien an (z.B. gleicher Feldinhalt wie im SM, gleiche Eichsymmetrien wie im SM). Die Abweichungen vom SM werden dann durch höher-dimensionale Operatoren parametrisiert, die von den SM-Feldern aufgebaut werden. Die Operatoren werden als die Niederenergie-Überreste von schwerer Physik verstanden, die bei einer hohen Energieskala  $\Lambda$  ausintegriert wurde. Die Operatoren sind dann

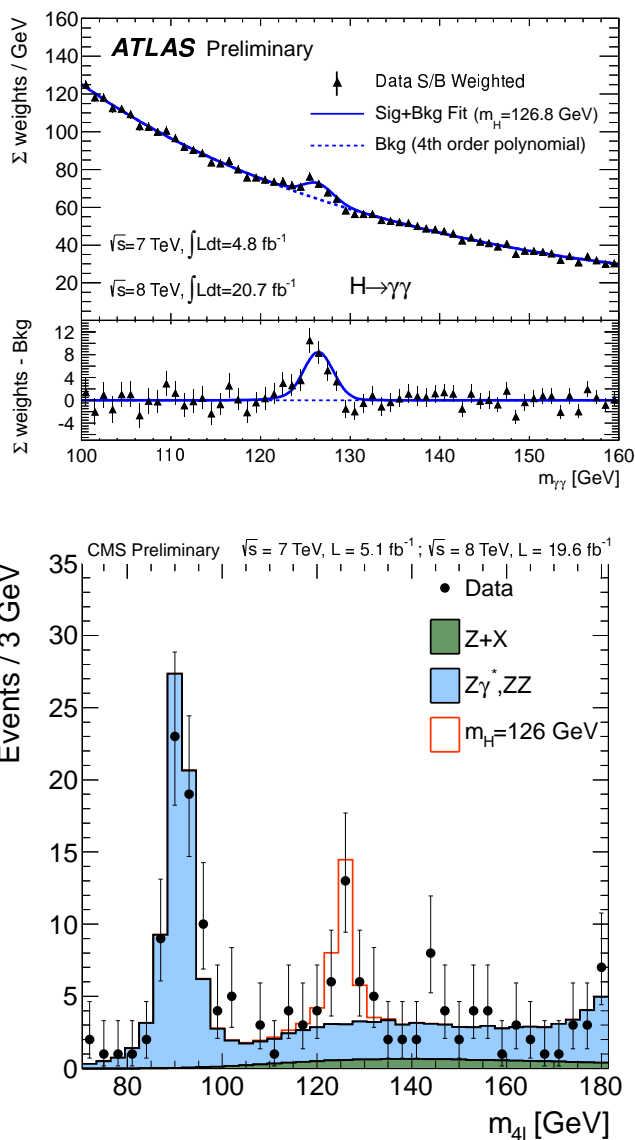


Abbildung 8.12: Die Haupt-Higgs-Entdeckungskanäle: Oben: Der Photonenzustand, hier für das ATLAS Experiment gezeigt [ATLAS-CONF-2013-12]. Unten: Der  $ZZ^*$  Endzustand, hier für das CMS Experiment gezeigt [CMS-PAS-HIG-13-002].

durch die Skala  $\Lambda$  unterdrückt:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + \frac{1}{\Lambda^2} \sum_i \alpha_i O_i . \quad (8.38)$$

Nehmen wir ein Higgs- $SU(2)$ -Dublett an,

$$H = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} , \quad (8.39)$$

so ist die nächste Dimension höherer Ordnung, die im Higgssektor mit Operatoren gebildet werden kann, 6. In der unitären Eichung mit kanonisch normierten Feldern lässt sich die effektive Lagrangedichte schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} m_h^2 h^2 - \kappa_3 \left( \frac{m_h^2}{2v} \right) h^3 - \sum_{\psi=u,d,l} m_{\psi^{(i)}} \bar{\psi}^{(i)} \psi^{(i)} \left( 1 + \kappa_\psi \frac{h}{v} + \dots \right) \\ & + m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \left( 1 + 2\kappa_W \frac{h}{v} + \dots \right) + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \left( 1 + 2\kappa_Z \frac{h}{v} + \dots \right) + \dots \\ & + \left( \frac{\bar{\kappa}_{WW} \alpha}{\pi} W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} + \frac{\bar{\kappa}_{ZZ} \alpha}{2\pi} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{\bar{\kappa}_{Z\gamma} \alpha}{\pi} Z_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} + \frac{\bar{\kappa}_\gamma \alpha}{2\pi} \gamma_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} + \frac{\bar{\kappa}_g \alpha_s}{12\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \right) \frac{h}{v} \\ & + \left( (\bar{\kappa}_{W\partial W} W_\nu^- D_\mu W^{+\mu\nu} + h.c.) + \bar{\kappa}_{Z\partial Z} Z_\nu \partial_\mu Z^{\mu\nu} + \bar{\kappa}_{Z\partial\gamma} Z_\nu \partial_\mu \gamma^{\mu\nu} \right) \frac{h}{v} + \dots \end{aligned}$$

Die SM Lagrangedichte ergibt sich für

$$\text{SM: } \quad \kappa_i = 1 \quad \text{und} \quad \bar{\kappa}_i = 0 . \quad (8.40)$$

Die Lagrangedichte ist sowohl für ein  $h$  gültig, das Dublett ist oder Singulett. Im Fall der  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  Eichsymmetrie sind nur 4 der insgesamt zehn Kopplungen, die ein Higgsboson und zwei Eichfelder enthalten ( $hVV$  Kopplungen mit  $V = W, Z, \gamma, g$ ) unabhängig von den EW Präzisionsmessungen. Von den 10 Kopplungen hängen 3 über die Forderung nach custodialer Symmetrie zusammen (z.B.  $c_W = c_Z$ ). Es wurden in der obigen effektiven Lagrangedichte keine flavour-ändernden neutralen Stromkopplungen zugelassen, da es in den Kopplungen keine Übergänge zwischen Fermionengenerationen gibt. Die effektive Lagrangedichte ist nur für Skalen unterhalb der Skala  $\Lambda$ , wo neue Physik wichtig wird, gültig. Damit können also keine neuen Effekte beschrieben werden, die leichte Teilchen beinhalten, wie etwa erweiterte Higgssektoren mit leichten Higgsteilchen, die sich in Higgs-nach-Higgs-Zerfällen oder in Schleifenbeiträgen bemerkbar machen. Deshalb muss der Zugang im Rahmen der effektiven Lagrangedichte komplementiert werden durch Untersuchungen in speziellen Modellen wie etwa dem 2-Higgs-Dublett-Modell, den minimalen oder nächstminimalen supersymmetrischen Erweiterungen etc., um sicher zu stellen, dass kein Signal übersehen wird. Figur 8.13 zeigt die besten Fitwerte für  $\kappa_F^f$  und  $\kappa_V^f$ , bestimmt von ATLAS und CMS. Sie sind mit dem SM verträglich.

Wenn das entdeckte Teilchen das Higgsboson ist, dann sind die Kopplungsstärken proportional zu den Massen(-quadraten) der Teilchen, an die das Higgsboson koppelt. Dies kann in dem Plot gesehen werden, den CMS veröffentlicht hat, Fig. 8.14.

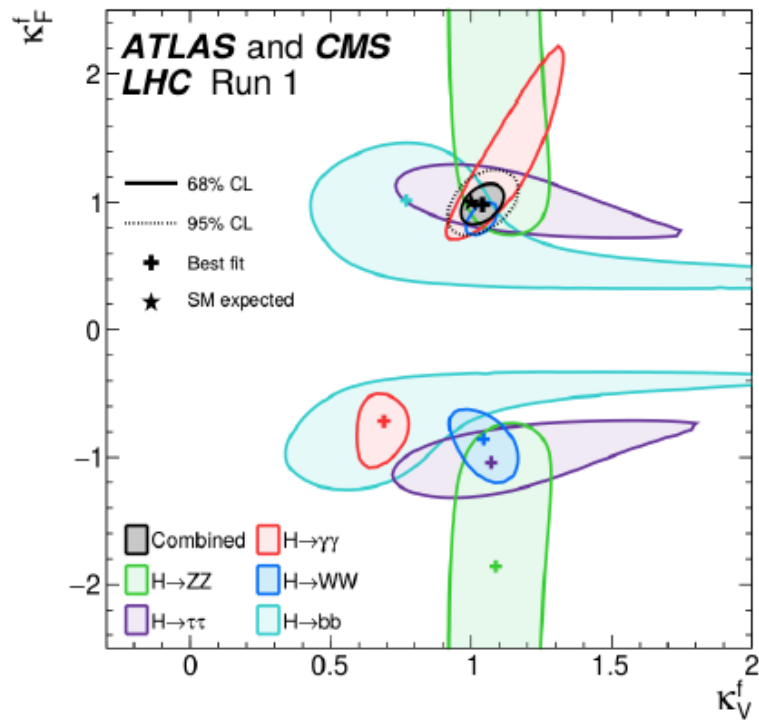


Abbildung 8.13: Zwei-Parameter Fit der Higgskopplungen in Higgsproduktion für Vektorbosonen ( $\kappa_V^f$ ) und Fermionen ( $\kappa_F^f$ ), für verschiedene Zerfallskanäle und ihre Kombination. Aus CMS, ATLAS, JHEP **08**,045 (2016).

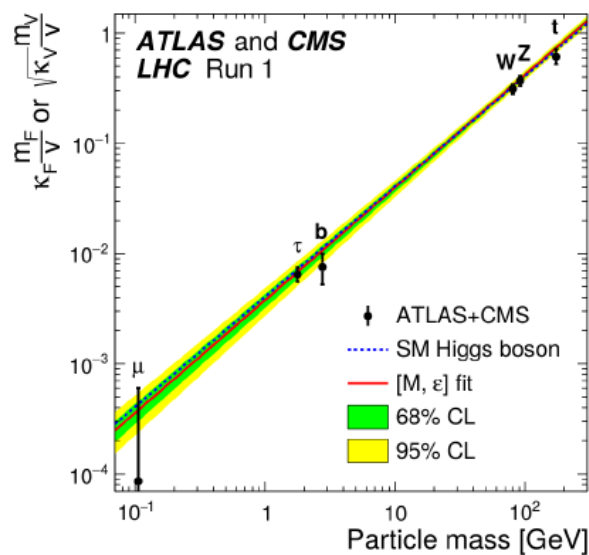


Abbildung 8.14: Kopplungsstärken als Funktion der Massen der Teilchen. Aus CMS-CR-2016-209.

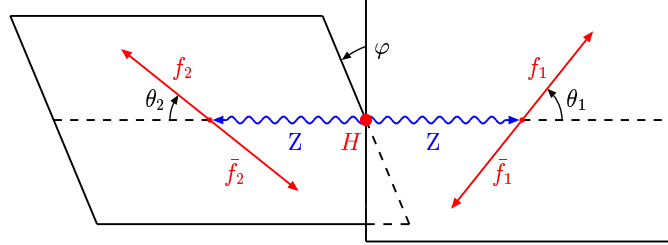


Abbildung 8.15: Der Zerfall  $H \rightarrow ZZ^{(*)} \rightarrow (f_1 \bar{f}_1)(f_2 \bar{f}_2)$ .

## 8.5 Higgsboson Quantenzahlen

Die Higgsboson Quantenzahlen können aus Schwellenverteilungen und aus Winkelverteilungen von verschiedenen Produktions- und Zerfallsprozessen bestimmt werden. Das SM Higgsboson hat Spin 0, positive Parität  $P$  und ist gerade unter Ladungskonjugation  $C$ . Aus der Beobachtung des Higgsbosons im  $\gamma\gamma$  Endzustand kann man bereits schließen, dass es aufgrund des Landau-Yang Theorems nicht Spin 1 hat und  $C = +1$ , wenn man Ladungserhaltung annimmt. Diese theoretischen Überlegungen müssen jedoch experimentell bewiesen werden.

Die theoretischen Werkzeuge, um Winkelverteilungen für ein Teilchen mit beliebigem Spin und beliebiger Parität zu bestimmen, sind Helizitätsanalysen und Operatorentwicklungen. Wir schauen uns hier als Beispiel den Higgszerfall in  $ZZ^*$  mit anschließendem Zerfall der  $Z$  Bosonen in 4 Leptonen an,

$$H \rightarrow ZZ^{(*)} \rightarrow (f_1 \bar{f}_1)(f_2 \bar{f}_2). \quad (8.41)$$

Der Zerfall ist in Fig. 8.15 dargestellt. Der Winkel  $\varphi$  ist der Azimuthalwinkel zwischen den Zerfallsebenen der  $Z$  Bosonen im  $H$  Ruhesystem. Die Winkel  $\theta_1$  und  $\theta_2$  sind die Polarwinkel der Fermionpaare in dem jeweiligen Ruhesystem des zugehörigen zerfallenden  $Z$  Bosons. Für das SM findet man für die doppelte polare Winkelverteilung

$$\frac{1}{\Gamma'} \frac{d\Gamma'}{d \cos \theta_1 d \cos \theta_2} = \frac{9}{16} \frac{1}{\gamma^4 + 2} \left[ \gamma^4 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta_1)(1 + \cos^2 \theta_2) \right], \quad (8.42)$$

und die Azimuthal-Winkelverteilung ist durch

$$\frac{1}{\Gamma'} \frac{d\Gamma'}{d\phi} = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma^4 + 2} \cos 2\phi \right] \quad (8.43)$$

gegeben. Die Verifizierung dieser Verteilungen ist ein notwendiger Schritt für den Beweis der  $0^+$  Natur des Higgsbosons.

Die Berechnung der Azimuthal-Winkelverteilung liefert für ein skalares und ein pseudo-skalares Boson ein unterschiedliches Verhalten:

$$\begin{aligned} 0^+ & : \quad d\Gamma/d\phi \sim 1 + 1/(2\gamma^4 + 4) \cos 2\phi \\ 0^- & : \quad d\Gamma/d\phi \sim 1 - 1/4 \cos 2\phi \end{aligned} \quad (8.44)$$

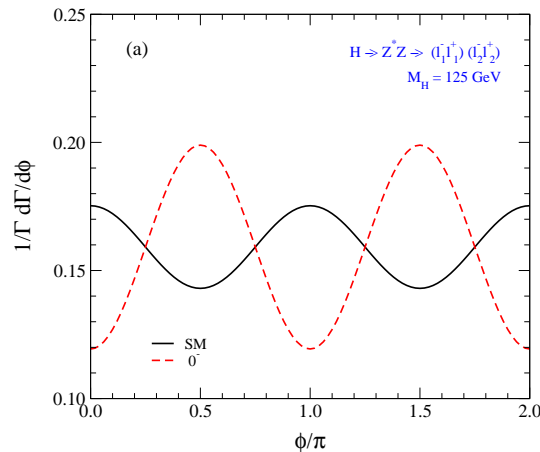


Abbildung 8.16: Die Azimuthalwinkel-Verteilung des  $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$  Zerfalls für das SM skalare Higgsboson (schwarz) und für ein pseudoskalares Higgsboson (rot). [Choi,Mühlleitner,Zerwas]

Hier ist  $\gamma^2 = (M_H^2 - M_*^2 - M_Z^2)/(2M_*M_Z)$  und  $M_*$  ist die Masse des virtuellen  $Z$  Bosons. Figur 8.16 zeigt, wie die Azimuthalwinkel-Verteilung genutzt werden kann, die Parität des Teilchens zu testen. Ein pseudoskalares Teilchen mit Spin-Parität  $0^-$  zeigt ein gegensätzliches Verhalten in der Verteilung als ein skalares Teilchen, was auf das negative Vorzeichen vor  $\cos 2\phi$  in Glg. (8.44) zurückzuführen ist. Das Schwellenverhalten andererseits kann benutzt werden, um den Spin des Teilchens zu bestimmen. Für ein Spin-0 Teilchen ergibt sich ein linearer Anstieg mit der Velozität  $\beta$ ,

$$\frac{d\Gamma[H \rightarrow Z^*Z]}{dM_*^2} \sim \beta = \sqrt{(M_H - M_Z)^2 - M_*^2}/M_H. \quad (8.45)$$

Ein Spin-2 Teilchen z.B. hat einen flacheren Anstieg,  $\sim \beta^3$ , siehe Fig. 8.17.

Die Experimente können keine modellunabhängige Spin-Paritätsmessung machen. Statt dessen werde verschiedene Spin-Paritäts-Hypothesen getestet. Verschiedene nicht-SM Spin-Paritäts-Hypothesen wurden mit mehr als 95% Vertrauensniveau (confidence level C.L.) ausgeschlossen, siehe z.B. Figuren 8.18 und 8.19.

## 8.6 Bestimmung der Higgs-Selbstwechselwirkungen

Um vollständig den Higgsmechanismus als den Mechanismus etablieren zu können, der für die Erzeugung der Teilchenmassen verantwortlich ist, ohne Eichprinzipien zu verletzen, muss das Higgspotential rekonstruiert werden. Dies kann getan werden, sobald die trilinearen und quartischen Higgs-Selbstkopplungen gemessen sind. Die trilineare Kopplung  $\lambda_{HHH}$  ist in Higgs-Paarproduktion zugänglich. Die quartische Kopplung  $\lambda_{HHHH}$  kommt in der Produktion von drei Higgsbosonen vor.

### 8.6.1 Bestimmung der Higgs-Selbstkopplungen am LHC

Die Prozesse für die Extraktion von  $\lambda_{HHH}$  [Djouadi,Kilian,Mühlleitner,Zerwas] am LHC sind Gluonfusion in ein Higgspaar, doppelte Higgsstrahlung,  $WW/ZZ$ -Fusion in ein Higgspaar



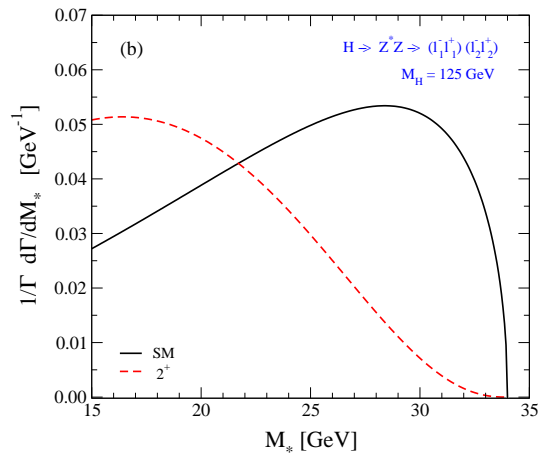


Abbildung 8.17: Die Schwellen-Verteilung für den  $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4l$  Zerfall für das SM Spin-0 Higgsboson (schwarz) aund ein Spin-2 Teilchen (rot). [Choi,Mühlleitner,Zerwas]

und Abstrahlung eines Higgspaars von Top-Quarks:

Gluonfusion:	$gg \rightarrow HH$	
doppelte Higgsstrahlung:	$q\bar{q} \rightarrow W^*/Z^*$	$\rightarrow W/Z + HH$
$WW/ZZ$ – Fusion in ein Higgspaar:	$qq \rightarrow qq + WW/ZZ$	$\rightarrow HH$
assozierte Produktion:	$pp \rightarrow t\bar{t}HH$	

(8.46)

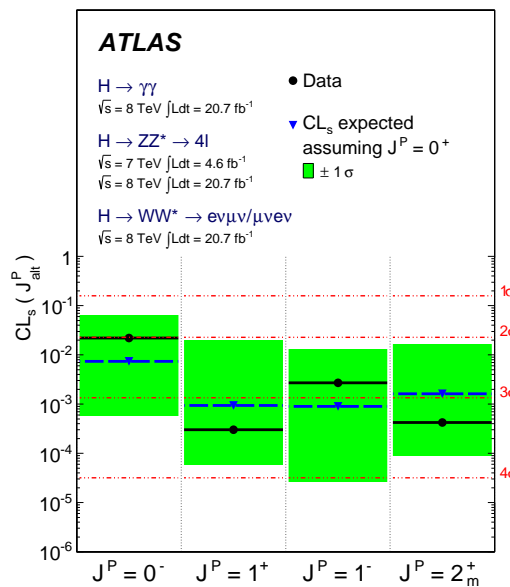


Abbildung 8.18: Spin-Paritäts-Hypothesen-Test von ATLAS. Details sind in Phys. Lett. B726 (2013) 120 gegeben.

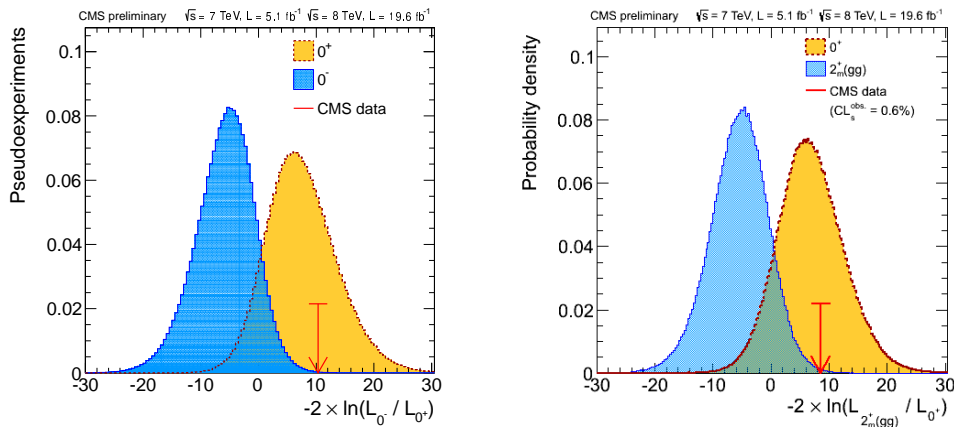


Abbildung 8.19: Spin-Paritäts-Hypothesen-Test von CMS. Links:  $0^-$  ausgeschlossen mit mehr als 95% C.L. [CMS-PAS-HIG-13-002]. Rechts:  $2_m^+(gg)$  ausgeschlossen mit 60% C.L. [CMS-PAS-HIG-13-005].

Der dominante Gluonfusionsprozess findet über Dreiecks- und Boxdiagramme statt, siehe Fig. 8.20.

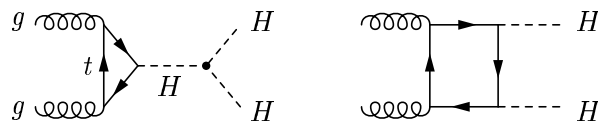


Abbildung 8.20: Die Diagramme, die zum Gluonfusionsprozess,  $gg \rightarrow HH$ , beitragen.

Wegen des kleinen Wirkungsquerschnitts, siehe Fig. 8.21, und es großen QCD Untergrunds ist die Extraktion der Higgs-Selbstkopplung am LHC extrem schwierig. Es gibt viele theoretische Anstrengungen, die Produktionsprozesse mit großer Genauigkeit inklusive der höheren Ordnungskorrekturen zu bestimmen. Es werden Strategien und Observablen für die Messung des Di-Higgs-Produktionsprozesses und die Bestimmung der trilinearen Higgs-Selbstkopplung entwickelt.

## 8.7 Zusammenfassung

Die Messung der Eigenschaften des entdeckten Teilchens haben es als das Higgsboson identifiziert. CERN hat daher im März 2013 in einer Presseerklärung offiziell bestätigt, dass es sich bei dem entdeckten Teilchen um das Higgsboson handelt, siehe Fig. 8.22. Im darauffolgenden Jahr 2013 wurde dann der Nobelpreis für Physik an Francois Englert und Peter Higgs verliehen.

Das SM der Teilchenphysik ist bisher sehr erfolgreich gewesen. Es wurde experimentell mit höchster Präzision getestet. Die Interpretation der Resultate erforderte die Einbeziehung höherer Ordnungskorrekturen. Mit der Entdeckung des Higgsteilchens wurde der letzte fehlende Baustein des SMs gefunden. Dennoch gibt es viele offene Fragen, die im Rahmen des SMs nicht beantwortet werden können. Einige seien hier genannt:

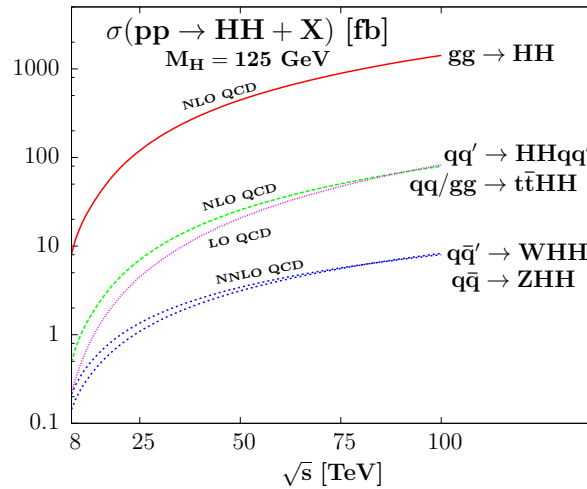


Abbildung 8.21: Di-Higgs Produktionsprozesse am LHC mit Schwerpunktsenergie 14 TeV, inklusive höherer Ordnungskorrekturen. [Baglio,Djouadi,Gröber,Mühlleitner,Quévillon,Spira].

1. Im SM wird der Higgsmechanismus *ad hoc* eingeführt. Es steckt kein dynamischer Mechanismus dahinter.
2. In der Gegenwart hoher Energieskalen erhält die Higgsbosonmasse große Quantenkorrekturen. Dies ist unter dem Namen *Hierarchie-Problem* bekannt.
3. Das SM liefert keine Erklärung für die Werte der Fermionmassen und -mischungen.
4. Das SM hat keinen Kandidaten für Dunkle Materie.
5. Im Rahmen des SMs vereinigen sich die Eichkopplungen bei hohen Energieskalen nicht.
6. Das SM beinhaltet nicht die Gravitationskraft.
7. Die CP-Verletzung im SM ist nicht groß genug, um Baryogenese zu ermöglichen.
8. ...

Aus diesen und anderen Gründen sollte das SM eher als eine effektive Niederenergie-Theorie angesehen werden, die in eine fundamentalere Theorie eingebettet ist, die sich bei höheren Skalen zeigt. Obwohl die bisherigen Higgsdaten in Richtung SM Higgsboson deuten, lassen sie Raum für Interpretationen in Theorien jenseits des SMs. Diese BSM Theorien können einige der Probleme des SMs lösen.

**CERN press office**

[Media visits](#) [Press releases](#) [For journalists](#) [For CERN people](#) [Contact us](#)

## New results indicate that particle discovered at CERN is a Higgs boson

14 Mar 2013

Geneva, 14 March 2013. At the Moriond Conference today, the ATLAS and CMS collaborations at CERN<sup>1</sup>'s Large Hadron Collider (LHC) presented preliminary new results that further elucidate the particle discovered last year. Having analysed two and a half times more data than was available for the discovery announcement in July, they find that the new particle is looking more and more like a Higgs boson, the particle linked to the mechanism that gives mass to elementary particles. It remains an open question, however, whether this is the Higgs boson of the Standard Model of particle physics, or possibly the lightest of several bosons predicted in some theories that go beyond the Standard Model. Finding the answer to this question will take time.

Abbildung 8.22: Die CERN Presseerklärung von März 2013.



# Kapitel 9

## Higgsphysik jenseits des Standardmodells

Die bisherigen experimentellen Higgsdaten sind mit dem SM vereinbar. Dennoch lassen die Unsicherheiten auf die Higgsobservablen durchaus Interpretationen im Rahmen von neuer Physik jenseits des SMs zu, die etwa von erweiterten Higgssektoren herrührt. Erweiterte Higgssektoren sind in supersymmetrischen (SUSY) Theorien nötig. Auch unabhängig von SUSY kann man sich überlegen, was die Konsequenzen eines erweiterten Higgssektors sind. Die einfachste Erweiterung des SM Higgssektors mit einem komplexen Higgsdublett ist das Hinzufügen eines reellen oder komplexen Singulets oder eines weiteren Higgsdublett, bekannt unter dem Namen 2-Higgs-Dublett-Modell (2HDM). Die minimale supersymmetrische Erweiterung (MSSM) enthält ebenfalls zwei Higgs-Dubletts und ist ein Spezialfall des allgemeinen 2HDMs. Was aber sind die Konsequenzen von neuer Physik? Je nach Modell, kann eine BSM Theorie neue Teilchen vorhersagen, wie z.B. supersymmetrische Teilchen oder neue schwere Eichbosonen oder vektorartige schwere Fermionen etc. Eine direkt beobachtbare Konsequenz bestimmter Modelle neuer Physik ist somit die Entdeckung von neuen Teilchen jenseits des SMs. Bisher wurden am LHC keine solchen neuen Teilchen entdeckt. Im Gegenteil, die unteren Massengrenzen neuer Physik wurden durch die bisherige Nichtbeobachtung immer weiter nach oben geschoben. In Anbetracht dieser experimentellen Situation rückt das Higgsboson als Instrument der Erforschung neuer Physik immer mehr in den Mittelpunkt. Wie kann sich hier neue Physik äußern? Erweiterte Higgssektoren führen zu neuen nicht-SM Higgsteilchen. Diese können leichter oder schwerer als das SM-Higgsboson sein, CP-gerade oder -ungerade oder sogar CP-verletzend. Auch elektrisch geladene Higgsbosonen sind möglich. Auch hier ist der direkte Nachweis neuer Physik durch die Entdeckung leichter oder schwerer Higgsbosonen gegeben. Solange diese nicht gefunden sind (was dem aktuellen Fall entspricht), muss nach indirekten Hinweisen im Higgssektor gesucht werden. So können durch BSM Physik die Higgskopplungen des SM-artigen Higgsbosons geändert werden. Dies ist möglich durch

- Mischung des Higgsbosons mit anderen Higgsbosonen des Higgssektors.
- Schleifenbeiträge von nicht-SM-Teilchen zu schleifeninduzierten Higgskopplungen oder zu Korrekturen der Higgskopplungen.
- Falls das Higgsboson nicht elementar sondern ein zusammengesetztes - *composite* - Teilchen ist, so ändern sich seine Kopplungen.

Die Verzweigungsverhältnisse des Higgsbosons können aber auch durch Higgs-nach-Higgs-Zerfälle in leichtere Higgsbosonen, Zerfälle in nicht-SM-Teilchen (z.B. leichte SUSY Teilchen wie Neutralinos) oder z.B. neuartige Zerfälle im Fall von CP-Verletzung und/oder von flavour-verletzenden neutralen Kopplungen geändert werden.

Sämtliche Modelle neuer Physik müssen darauf achten, die experimentellen und theoretischen Einschränkungen nicht zu verletzen. Zwei starke Einschränkungen sind durch den  $\rho$  Parameter und die engen Grenzen an die Existenz von flavour-ändernden neutralen Strömen (flavour-changing neutral currents - FCNC) gegeben.

Die Einschränkung durch den  $\rho$  Parameter: Der  $\rho$  Parameter

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} \quad (9.1)$$

ist experimentell gemessen worden und sehr nahe bei 1. Im SM ist der  $\rho$  Parameter durch die Struktur des Higgssektors selbst gegeben und auf Baumgraphenniveau automatisch  $\rho = 1$ . Wenn man ganz allgemein  $n$  skalare Multiplets  $\phi_i$  mit schwachem Isospin  $I_i$ , schwacher Hyperladung  $Y_i$  und den VEVs  $v_i$  der neutralen Komponenten einführt, so findet man für den  $\rho$  Parameter auf Baumgraphenniveau

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n [I_i(I_i + 1) - \frac{1}{4}Y_i^2] v_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}Y_i^2 v_i} . \quad (9.2)$$

Sowohl  $SU(2)$  Singulets mit  $Y = 0$  und  $SU(2)$  Dubletts mit  $Y = \pm 1$  erfüllen

$$I(I + 1) = \frac{3}{4}Y^2 \quad (9.3)$$

und damit  $\rho = 1$ . Auch Modelle mit größeren  $SU(2)$  Multipletts, skalaren Teilchen mit kleinen oder verschwindenden VEVs und Modelle mit Tripletts und globaler custodialer  $SU(2)$  Symmetrie erfüllen die Einschränkung durch den  $\rho$  Parameter. Aber sie führen auf größere und komplexere Higgssektoren.

Flavour-ändernde neutrale Ströme: Die Existenz von FCNC ist experimentell sehr stark eingeschränkt. Im SM sind FCNC auf Baumgraphenniveau automatisch abwesend, da die Massenmatrix zusammen mit den Higgs-Fermion-Kopplungsmatrizen diagonalisiert wird. Die ist in nicht-minimalen Higgsmodellen im allgemeinen nicht mehr der Fall. Eine Lösung für dieses Problem ist durch ein Theorem von Glashow und Weinberg gegeben und wird im Rahmen des 2-Higgs-Dublett-Modells (2HDMs) diskutiert.

Unitaritäts Einschränkungen: In Modellen mit elektroschwacher Symmetriebrechung (electroweak symmetry breaking - EWSB) muss gewährleistet werden, dass die Streuamplitude für longitudinale Eichbosonen  $V$  ( $V = W, Z$ ),

$$V_L V_L \rightarrow V_L V_L \quad (9.4)$$

und für Fermion  $f$  Streuung in longitudinale Eichbosonen,

$$f_+ \bar{f}_+ \rightarrow V_L V_L , \quad (9.5)$$

wobei  $+$  die positive Helizität des Fermions bezeichnet, nicht die Unitaritätsgrenzen verletzen. Dies erfordert die nicht-triviale Kanzellierung der zu dem Prozess beitragenden Feynmandiagramme. Für  $WW \rightarrow WW$  Streuung ergibt sich die Kanzellierung im SM aufgrund der Existenz eines leichten Higgsteilchens  $H$  mit Kopplungen an die  $W$ -Bosonen,

die durch  $g_{HWW} = gm_W$  gegeben sind. In Modellen mit erweiterten Higgssektoren ist es nicht notwendig, dass ein einzelnes skalares Boson für die Erfüllung der Unitaritätseinschränkungen sorgt. Es ist lediglich erforderlich, dass die Summenregeln für die skalaren Boson- $h_i$ -Kopplungen an  $VV$  und  $f\bar{f}$  erfüllt werden. Diese sind

$$\sum_i g_{h_i VV}^2 = g_{HVV}^2 \quad (9.6)$$

und

$$\sum_i g_{h_i VV} g_{h_i f\bar{f}} = g_{HVV} g_{Hf\bar{f}}. \quad (9.7)$$

Es ist zu beachten, dass diese Summenregeln nur für Modelle mit Dublett- und Singulettfeldern gelten. In Erweiterungen mit Triplets oder höheren Higgsdarstellungen sind die Summenregeln komplizierter.

Zusammen mit der Singulett-Erweiterung ist das 2HDM die einfachste mögliche Erweiterung des SMs. Abgesehen davon, dass erweiterte Higgssektoren bisher schlichtweg nicht ausgeschlossen wurden, ist eine der Hauptmotivationen, sich das 2HDM anzuschauen, Supersymmetrie. Supersymmetrie verlangt aufgrund der Struktur des Superpotentials und um eine anomaliefreie Theorie zu erhalten die Einführung von zwei Higgsdubletts. Eine weitere Motivation ist die Tatsache, dass es innerhalb des SMs unmöglich ist, eine genügend große Baryonenasymmetrie im Universum zu erzeugen. 2HDMs haben aufgrund ihres vergrößerten Parameterraums mehr Möglichkeiten und außerdem zusätzliche Quellen für CP-Verletzung. Letztere ist eine der drei Sakharov-Bedingungen zur Erzeugung der Baryonenasymmetrie.<sup>1</sup>

## 9.1 Das Higgspotential

Das 2HDM hat aufgrund der großen Parameteranzahl eine reichhaltige Vakuumstruktur. Unter Berücksichtigung der  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  Eichsymmetrie und der Forderung, dass die Theorie in  $d = 4$  Dimensionen renormierbar sein soll, gibt es insgesamt 14 mögliche Operatorprodukte, die aus den zwei Higgsdubletts  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  aufgebaut sind und die Operatordimension  $\leq 4$  haben. Das allgemeinste skalare Potential kann CP-erhaltende, CP-verletzende und Ladungszahl-verletzende Minima haben. Bei der Aufstellung des Potentials muss darauf geachtet werden, wie die jeweilige Basis definiert wird sowie zwischen Parametern unterschieden werden, die weggelassen werden können, und denen, die eine physikalische Bedeutung haben. Wenn wir CP-Erhaltung annehmen, die nicht spontan gebrochen wird, und weiterhin diskrete Symmetrien fordern<sup>2</sup>, die aus dem Potential alle quartischen Terme eliminieren, die ungerade in einem der beiden Dubletts sind, hingegen reelle quadratische Koeffizienten erlauben, von denen einer diese Symmetrien "weich" bricht, dann ist das allgemeinste skalare Potential für zwei Higgsdubletts  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  mit Hyperladung +1 gegeben durch

$$\begin{aligned} V = & m_{11}^2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 + m_{22}^2 \Phi_2^\dagger \Phi_2 - m_{12}^2 \left( \Phi_1^\dagger \Phi_2 + \Phi_2^\dagger \Phi_1 \right) + \frac{\lambda_1}{2} \left( \Phi_1^\dagger \Phi_1 \right)^2 + \frac{\lambda_2}{2} \left( \Phi_2^\dagger \Phi_2 \right)^2 \\ & + \lambda_3 \Phi_1^\dagger \Phi_1 \Phi_2^\dagger \Phi_2 + \lambda_4 \Phi_1^\dagger \Phi_2 \Phi_2^\dagger \Phi_1 + \frac{\lambda_5}{2} \left[ \left( \Phi_1^\dagger \Phi_2 \right)^2 + \left( \Phi_2^\dagger \Phi_1 \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (9.8)$$

<sup>1</sup>Die drei Bedingungen sind Baryonenzahl-verletzende Prozesse, C und CP-Verletzung und Abweichung vom thermischen Gleichgewicht.

<sup>2</sup>Die Forderung kommt aus den Einschränkungen an FCNC Kopplungen.



wobei alle Parameter reell sind.<sup>3</sup> Im Minimum des Higgspotentials haben die reellen Komponenten der Higgsdubletts die VEVs

$$\langle \Phi_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \langle \Phi_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (9.9)$$

Die zwei komplexen Higgsdubletts umfassen acht reelle Felder,

$$\Phi_a = \begin{pmatrix} \phi_a^+ \\ \frac{v_a + \rho_a + i\eta_a}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2. \quad (9.10)$$

Drei davon ergeben die longitudinalen Freiheitsgrade der massiven  $W^\pm$  und  $Z$  Bosonen. Nach EWSB verbleiben also fünf Higgsfelder. Unter der Annahme von CP-Erhaltung haben wir zwei neutrale skalare, ein neutrales pseudoskalares und zwei geladene Higgsbosonen. Entwicklung um die Minima führt auf den Massenterm für die geladenen Higgsbosonen (also die Terme, die quadratisch in den geladenen Higgsfeldern sind), der gegeben ist durch

$$\mathcal{L}_{\phi^\pm, \text{mass}} = -[m_{12}^2 - (\lambda_4 + \lambda_5) \frac{v_1 v_2}{2}] (\phi_1^-, \phi_2^-) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{v_2}{v_1} & -1 \\ -1 & \frac{v_1}{v_2} \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}'_C} \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \end{pmatrix}. \quad (9.11)$$

Hierbei haben wir bereits die Minimumsbedingungen

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \Phi_i^\dagger} \right|_{\langle \Phi_i \rangle = v_i / \sqrt{2}} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (9.12)$$

ausgenutzt, die auf

$$m_{11}^2 + \frac{\lambda_1 v_1^2}{2} + \frac{\lambda_3 v_2^2}{2} = m_{12}^2 \frac{v_2}{v_1} - (\lambda_4 + \lambda_5) \frac{v_2^2}{2}, \quad (9.13)$$

$$m_{22}^2 + \frac{\lambda_2 v_2^2}{2} + \frac{\lambda_3 v_1^2}{2} = m_{12}^2 \frac{v_1}{v_2} - (\lambda_4 + \lambda_5) \frac{v_1^2}{2} \quad (9.14)$$

führen. Die Massenmatrix wird durch die orthogonale Transformationsmatrix

$$\mathcal{U}_C = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

diagonalisiert, wobei

$$\tan \beta = \frac{v_2}{v_1}. \quad (9.16)$$

Der Parameter  $\tan \beta$  ist ein Schlüsselparameter des Modells. Um wie im SM die  $W^\pm$  und  $Z$  Bosonmassen zu reproduzieren, muss gelten

$$v_1^2 + v_2^2 = v^2, \quad (9.17)$$

mit

$$v^2 = \frac{1}{\sqrt{2} G_F} \approx 246^2 \text{ (GeV)}^2, \quad (9.18)$$

---

<sup>3</sup>Beachte, dass die Parameter manchmal anders benannt werden, z.B.  $m_{11}^2$  dann  $m_1^2$  genannt wird,  $m_{22}^2$  hingegen  $m_2^2$  und  $m_{12}^2$  auch als  $m_3^2$  vorkommt.

wobei  $G_F$  die Fermikonstante bezeichnet. Die Massenmatrix in Glg. (9.11) hat einen Eigenwert 0, der der Masse des geladenen Goldstonebosons  $G^\pm$  entspricht. Die Masse im Quadrat des geladenen Higgsbosons ergibt sich zu

$$m_{H^\pm}^2 = \left( \frac{m_{12}^2}{v_1 v_2} - \frac{\lambda_4 + \lambda_5}{2} \right) (v_1^2 + v_2^2) = M^2 - \frac{1}{2}(\lambda_4 + \lambda_5)v^2, \quad (9.19)$$

wobei wir

$$M^2 = \frac{m_{12}^2}{\sin \beta \cos \beta} \quad (9.20)$$

eingeführt haben.

Aufgrund der CP-Invarianz, die wir hier annehmen, entkoppeln die reellen und der imaginären Anteile der neutralen skalaren Felder. Der Massenterm für die pseudoskalaren Anteile ist durch die imaginären Komponenten der neutralen Higgsfelder gegeben und lautet, nachdem wiederum die Minimumsbedingungen ausgenutzt wurden,

$$\mathcal{L}_{\eta,\text{mass}} = -\frac{1}{2} \frac{m_A^2}{v_1^2 + v_2^2} (\eta_1, \eta_2) \underbrace{\begin{pmatrix} v_2^2 & -v_1 v_2 \\ -v_1 v_2 & v_1^2 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}'_P} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}. \quad (9.21)$$

Die Massenmatrix wird durch die orthogonale Transformationsmatrix  $\mathcal{U}_P$  diagonalisiert, für welche auf Baumgraphenniveau gilt

$$\mathcal{U}_P = \mathcal{U}_C. \quad (9.22)$$

Dies führt auf ein neutrales Goldstoneboson  $G^0$  und ein pseudoskalares, das  $A$  bezeichnet wird und die quadratische Masse

$$m_A^2 = \left( \frac{m_{12}^2}{v_1 v_2} - \lambda_5 \right) (v_1^2 + v_2^2) = M^2 - \lambda_5 v^2 \quad (9.23)$$

hat. Beachte, dass für  $m_{12} = 0$  und  $\lambda_5 = 0$  das Pseudoskalar masselos ist. Der Grund hierfür ist eine weitere globale  $U(1)$  Symmetrie, die in diesem Limes gilt und die spontan gebrochen wird.

Die Massenterme für die skalaren Higgsbosonen werden abgeleitet, indem alle bilinearen Terme in den reellen Anteilen der neutralen Higgsfelder aufgesammelt werden. Sie lauten nach Anwenden der Minimumsbedingungen

$$\mathcal{L}_{\rho,\text{mass}} = -\frac{1}{2} (\rho_1, \rho_2) \underbrace{\begin{pmatrix} m_{12}^2 \frac{v_2}{v_1} + \lambda_1 v_1^2 & -m_{12}^2 + \lambda_{345} v_1 v_2 \\ -m_{12}^2 + \lambda_{345} v_1 v_2 & m_{12}^2 \frac{v_1}{v_2} + \lambda_2 v_2^2 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_N} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \quad (9.24)$$

wobei wir

$$\lambda_{345} \equiv \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 \quad (9.25)$$

definiert haben. Die Massenmatrix wird durch die orthogonale Transformationsmatrix

$$\mathcal{U}_N = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (9.26)$$

diagonalisiert. Der Mischungswinkel  $\alpha$  ist durch die Matrixelemente der Massenmatrix  $\mathcal{M}_N$  gegeben:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\mathcal{M}_{12}}{\sqrt{(\mathcal{M}_{11} - \mathcal{M}_{22})^2 + 4\mathcal{M}_{12}^2}} \quad (9.27)$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\mathcal{M}_{11} - \mathcal{M}_{22}}{\sqrt{(\mathcal{M}_{11} - \mathcal{M}_{22})^2 + 4\mathcal{M}_{12}^2}}. \quad (9.28)$$

Es gilt

$$\tan 2\alpha = \frac{(M^2 - \lambda_{345}v^2) \sin 2\beta}{(M^2 - \lambda_1v^2) \cos^2 \beta - (M^2 - \lambda_2v^2) \sin^2 \beta}. \quad (9.29)$$

Die Diagonalisierung führt auf die CP-geraden Masseneigenzustände  $h$  und  $H$ ,

$$H = \rho_1 \cos \alpha + \rho_2 \sin \alpha \quad (9.30)$$

$$h = -\rho_1 \sin \alpha + \rho_2 \cos \alpha, \quad (9.31)$$

mit den Massenwerten

$$m_{H,h}^2 = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{M}_{11} + \mathcal{M}_{22} \pm \sqrt{(\mathcal{M}_{11} - \mathcal{M}_{22})^2 + 4\mathcal{M}_{12}^2} \right]. \quad (9.32)$$

Per Konvention wird der leichtere CP-gerade Zustand  $h$  genannt und der schwerere  $H$ . Beachte, dass das SM Higgsboson

$$\begin{aligned} H^{\text{SM}} &= \rho_1 \cos \beta + \rho_2 \sin \beta \\ &= H \cos(\alpha - \beta) - h \sin(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (9.33)$$

wäre. Das SM Higgsboson entspricht also  $h$  für  $\cos \alpha = \sin \beta$  und  $\sin \alpha = -\cos \beta$ . Es entspricht  $H$  für  $\cos \alpha = \cos \beta$  und  $\sin \alpha = \sin \beta$ . Dass Glg. (9.33) das SM Higgs definiert, kann man dadurch sehen, dass man die Higgsdubletts jeweils mit den Mischungsmatrizen  $\mathcal{U}_C$  und  $\mathcal{U}_P$  multipliziert,

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \Phi_1 + \sin \beta \Phi_2 \\ -\sin \beta \Phi_1 + \cos \beta \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad (9.34)$$

Dies führt auf zwei Higgsdubletts, von denen eines

$$\begin{aligned} \Phi_1^{\text{HB}} &= \cos \beta \Phi_1 + \sin \beta \Phi_2 = \begin{pmatrix} \cos \beta \phi_1^+ + \sin \beta \phi_2^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos \beta (v_1 + \rho_1 + i\eta_1) + \sin \beta (v_2 + \rho_2 + i\eta_2)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G^\pm \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [iG^0 + (\cos \beta \rho_1 + \sin \beta \rho_2) + v] \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} G^\pm \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [iG^0 + S_1 + v] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.35)$$

die masselosen Goldstonebosonen und den VEV  $v$  in der neutralen Komponente enthält, so dass  $S_1 \equiv (\cos \beta \rho_1 + \sin \beta \rho_2)$  mit dem SM Higgsboson identifiziert werden kann. Der obere Index HB steht für 'Higgs Basis'. Das andere Higgsdublett lautet

$$\begin{aligned} \Phi_2^{\text{HB}} &= -\sin \beta \Phi_1 + \cos \beta \Phi_2 = \begin{pmatrix} -\sin \beta \phi_1^+ + \cos \beta \phi_2^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [-\sin \beta (v_1 + \rho_1 + i\eta_1) + \cos \beta (v_2 + \rho_2 + i\eta_2)] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin \beta \rho_1 + \cos \beta \rho_2) + \frac{i}{\sqrt{2}} (-\sin \beta \eta_1 + \cos \beta \eta_2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} H^+ \\ \frac{S_2 + iS_3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Der Vorteil der Higgsbasis ist, dass die drei Goldstonefelder  $G^\pm$  und  $G^0$  in die Komponenten von  $\Phi_1$  isoliert werden. Die drei neutralen Masseneigenzustände des skalaren physikalischen Spektrums,  $\varphi_i^0 = (h, H, A)^T$ , sind durch eine orthogonale Transformation  $\mathcal{R}$  mit den  $S_i$  Feldern verbunden,

$$\varphi_i^0 = \mathcal{R}_{ij} S_j . \quad (9.37)$$

Im allgemeinen Fall mischt die CP-ungerade Komponente  $S_3$  mit den CP-geraden Feldern  $S_{1,2}$  und die daraus resultierenden Masseneigenzustände haben keine definite CP Quantenzahl mehr. Wenn das skalare Potential, wie oben vorausgesetzt, CP-symmetrisch ist, dann verschwindet diese Mischung. In diesem Fall ist  $A \equiv S_3$ .

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $\beta$  im ersten Quadranten angenommen werden, d.h. dass sowohl  $v_1$  also auch  $v_2$  nicht-negativ und reell sind. Außerdem kann  $\pi$  zu  $\alpha$  addiert werden, was die Vorzeichen der beiden Felder  $h$  und  $H$  dreht, ohne dass davon die Physik beeinflusst wird. Der Winkel  $\alpha$  wird also entweder im ersten oder vierten Quadranten gewählt.

Parameter des Higgspotentials:

Die Parameter des Higgspotentials sind  $m_{11}^2, m_{22}^2, m_{12}^2$  und  $\lambda_1 - \lambda_5$ . Sie können durch acht 'physikalische' Parameter ausgedrückt werden, die durch die vier Higgsmassen  $m_h, m_H, m_A, m_{H^\pm}$ , die zwei Mischungswinkel  $\alpha, \beta$ , den Vakuumerwartungswert  $v$  und die die diskrete Symmetrie weich brechende Massenskala  $M$  gegeben sind. Die quartischen Kopplungskonstanten können durch diese Parameter ausgedrückt werden.

## 9.2 Das Problem mit der Flavour-Erhaltung

Das 2HDM sieht sich dem ernsthaften Problem möglicher FCNCs auf Baumgraphenniveau ausgesetzt. Um dies zu sehen, betrachten wir die Yukawa-Lagrangedichte. Die allgemeinste Yukawa-Lagrangedichte kann als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & - \left\{ \bar{Q}'_L (\Gamma_1 \Phi_1 + \Gamma_2 \Phi_2) D'_R - \bar{Q}'_L (\Delta_1 \tilde{\Phi}_1 + \Delta_2 \tilde{\Phi}_2) U'_R \right. \\ & \left. + \bar{L}' (\Pi_1 \Phi_1 + \Pi_2 \Phi_2) E'_R + h.c. \right\} \end{aligned} \quad (9.38)$$

geschrieben werden, wobei  $Q'_L, L'_L$  die linkshändigen Quark- und Lepton-Dubletts bezeichnen und  $Q \equiv (U, D)^T$ ,  $L \equiv (\nu, E)^T$ , mit  $U \equiv (u, c, t)^T$ ,  $D \equiv (d, s, b)^T$ ,  $\nu \equiv (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)^T$  und  $E \equiv (e, \mu, \tau)^T$ . Die Indizes  $L, R$  bezeichnen links- und rechtshändige Fermionen  $f$ , die durch

$$f_{L,R} = P_{L,R} f \equiv \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5) f \quad (9.39)$$

gegeben sind, Wir haben  $\tilde{\Phi}_a = (\Phi_a^T \epsilon)^\dagger$  definiert, wobei

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (9.40)$$

Die Kopplungen  $\Gamma_a, \Delta_a$  und  $\Pi_a$  ( $a = 1, 2$ ) sind komplexe  $3 \times 3$  Matrizen im Flavourraum. In der Higgsbasis kann die Lagrangedichte als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & - \frac{\sqrt{2}}{v} \left\{ \bar{Q}'_L (M'_d \Phi_1^{\text{HB}} + Y'_d \Phi_2^{\text{HB}}) D'_R - \bar{Q}'_L (M'_u \tilde{\Phi}_1^{\text{HB}} + Y'_u \tilde{\Phi}_2^{\text{HB}}) U'_R \right. \\ & \left. + \bar{L}' (M'_l \Phi_1^{\text{HB}} + Y'_l \Phi_2^{\text{HB}}) E'_R + h.c. \right\} \end{aligned} \quad (9.41)$$

geschrieben werden, wobei  $M'_f$  ( $f = d, u, l$ ) die nicht-diagonalen Fermionmassenmatrizen sind. Die Matrizen  $Y'_f$  enthalten die Yukawakopplungen an das skalare Dublett mit verschwindendem VEV.

In der Basis der Masseneigenzustände  $D, U, E, \nu$  mit diagonalen Massenmatrizen  $M_f$  ( $M_\nu = 0$ ), sind die entsprechenden Matrizen  $Y_f$  im allgemeinen nicht-diagonal und nicht direkt durch die Fermionenmassen gegeben. Deshalb führt die Yukawa-Lagrangedichte auf FCNC Kopplungen, da es zwei verschiedene Yukawa-Matrizen gibt, die an das rechtshändige Fermionfeld koppeln. Diese können im allgemeinen nicht gleichzeitig diagonalisiert werden. Deshalb können die neutralen Higgsskalare  $\phi$  FCNC vermitteln, z.B.  $\bar{d}s\phi$ . Dies würde zu ernsthaften phänomenologischen Konflikten führen. Dies würde z.B. auf Baumgraphenniveau die Mischung  $K-\bar{K}$  ermöglichen. Nimmt man an, dass die Kopplung so groß wie die  $b$ -Quark Yukawakopplung ist, würde dies für den ausgetauschten Skalar eine Masse oberhalb von 10 TeV erfordern, um eine Unterdrückung zu erzielen, die in Einklang mit den experimentellen Resultaten ist.

Das Problem kann vermieden werden, indem man fordert, dass eine der beiden Matrizen null ist. Dies kann erreicht werden, dass man verlangt, dass nur ein skalares Dublett an ein gegebenes rechtshändiges Fermionfeld koppelt. Mit anderen Worten, wenn alle Fermionen mit der gleichen Quantenzahl (so dass sie mischen können) an dasselbe Higgssublett koppeln, dann gibt es keine FCNCs. Dies wurde im Paschos-Glashow-Weinberg Theorem konstatiert. Es sagt, dass eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Abwesenheit von FCNCs auf Baumgraphenniveau ist, dass alle Fermionen mit einer bestimmten Ladung und Helizität gemäß der gleichen irreduziblen Darstellung von  $SU(2)$  transformieren, dem gleichen Eigenwert von  $T_3$  entsprechen und dass es eine Basis gibt, in der sie ihren Beitrag zur Massenmatrix von einer einzigen Quelle erhalten. Für das SM mit linkshändigen Dubletts und rechtshändigen Singulets bedeutet das, dass alle rechtshändigen Quarks einer bestimmten Ladung an ein einziges Higgsmultipllett koppeln. Im 2HDM kann dies nur dadurch gewährleistet werden, dass diskrete oder kontinuierliche Symmetrien eingeführt werden.

Im 2HDM gibt es zwei Möglichkeiten, dies zu erreichen:

- Typ I 2HDM: Alle Quarks koppeln nur an eines der beiden Higgssubletts (per Konvention wird hierfür  $\Phi_2$  gewählt).
- Typ II 2HDM: Die  $Q = 2/3$  rechtshändigen (RH) Quarks koppeln an ein Higgssublett (per Konvention  $\Phi_2$ ) und die  $Q = -1/3$  RH Quarks koppeln an das andere ( $\Phi_1$ ).

Um das Typ I 2HDM zu erhalten wird eine einfache diskrete Symmetrie,  $\Phi_1 \rightarrow -\Phi_1$ , gefordert. Für das Typ II 2HDM wird eine Symmetrie  $\Phi_1 \rightarrow -\Phi_1, d_R^i \rightarrow -d_R^i$  verlangt. Beachte, dass SUSY Modelle zu den gleichen Yukawakopplungen wie in Typ II führen. Sie verwenden jedoch kontinuierliche Symmetrien.

In den Typ I und II 2HDMs wird per Konvention angenommen, dass die rechtshändigen Leptonen die gleiche diskrete Symmetrie wie  $d_R^i$  erfüllen, so dass die Leptonen an das gleiche Higgsboson wie die down-artigen Quarks koppeln. Das Glashow-Weinberg Theorem verlangt dies jedoch nicht. Es gibt daher zwei weitere Möglichkeiten:

- Lepton-spezifisches Modell: Die rechtshändigen Quarks koppeln alle an  $\Phi_2$  und die rechtshändigen Leptonen koppeln an  $\Phi_1$ .

- Geflipptes Modell: Die rechtshändigen up-artigen Quarks koppeln an  $\Phi_2$ , die rechtshändigen down-artigen Quarks koppeln an  $\Phi_1$ , wie in Typ II, aber die RH Leptonen koppeln an  $\Phi_2$ .

Es gibt in der Literatur verschiedene Namen für diese Modelle. So werden die Namen Modell III und IV für die geflippten und lepton-spezifischen Modelle verwendet. In anderen Veröffentlichungen werden lepton-spezifisch und geflippt jeweils Modell I und II genannt. Auch IIA und IIB kommen vor, oder X-Typ für lepton-spezifisch und Y-Typ für das geflippte.

Die Bestimmung der Yukawakopplungen führt dann (ohne Herleitung) für die verschiedenen Modelle auf die in Tabelle 9.1 gegebenen Werte in Einheiten der Standardmodell Yukawakopplung  $y_f = \sqrt{2}m_f/v$ .

	Type I	Type II	Lepton-specific	Flipped
$\xi_h^u$	$\cos \alpha / \sin \beta$	$\cos \alpha / \sin \beta$	$\cos \alpha / \sin \beta$	$\cos \alpha / \sin \beta$
$\xi_h^d$	$\cos \alpha / \sin \beta$	$-\sin \alpha / \cos \beta$	$\cos \alpha / \sin \beta$	$-\sin \alpha / \cos \beta$
$\xi_h^l$	$\cos \alpha / \sin \beta$	$-\sin \alpha / \cos \beta$	$-\sin \alpha / \cos \beta$	$\cos \alpha / \sin \beta$
$\xi_H^u$	$\sin \alpha / \sin \beta$	$\sin \alpha / \sin \beta$	$\sin \alpha / \sin \beta$	$\sin \alpha / \sin \beta$
$\xi_H^d$	$\sin \alpha / \sin \beta$	$\cos \alpha / \cos \beta$	$\sin \alpha / \sin \beta$	$\cos \alpha / \cos \beta$
$\xi_H^l$	$\sin \alpha / \sin \beta$	$\cos \alpha / \cos \beta$	$\cos \alpha / \cos \beta$	$\sin \alpha / \sin \beta$
$\xi_A^u$	$\cot \beta$	$\cot \beta$	$\cot \beta$	$\cot \beta$
$\xi_A^d$	$-\cot \beta$	$\tan \beta$	$-\cot \beta$	$\tan \beta$
$\xi_A^l$	$-\cot \beta$	$\tan \beta$	$\tan \beta$	$-\cot \beta$

Tabelle 9.1: Die  $u, d, l$  (sie stehen für alle drei Generationen) Yukawakopplungen an die neutralen Higgsbosonen  $h, H, A$  in den vier verschiedenen Modellen, in Einheiten der SM Yukawakopplung.

### 9.3 Abschließende Bemerkungen

Die Vorlesung hat einen ersten Einblick in die Methoden und Fragestellungen der Elementarteilchenphysik gegeben. Wir haben gesehen, dass die Quantenfeldtheorie ein hervorragendes Werkzeug ist, um Observablen zu berechnen, die im Experiment überprüft werden. Dabei zeigt sich, dass das Standardmodell der Teilchenphysik, das unsere Kenntnisse über die grundlegenden Strukturen der Materie und ihrer Wechselwirkungen beinhaltet, die Vorgänge in der Natur hervorragend beschreibt. In der Vorlesung wurde auf die rigorose Herleitung der Grundlagen zugunsten eines Gesamtüberblicks über das Feld verzichtet. Diese werden in Theoretischer Teilchenphysik 1 und 2 behandelt. Die Kürze der Zeit reichte auch nicht aus, um viele andere interessante Themengebiete der Teilchen- (und auch Astroteilchenphysik) und Kosmologie zu behandeln. Dies ist den Spezialvorlesungen vorbehalten.

Die Entdeckung des Higgsbosons im Jahr 2012 lieferte den letzten fehlenden Baustein des SMs. Sie bedeutete einen großen Erfolg für die Teilchenphysik. Aber auch jetzt sind noch viele Fragen offen, die uns nach neuen Teilchen suchen lässt, wie sie in Theorien jenseits des SMs vorhergesagt werden. Es fand hier ein Paradigmenwechsel statt. So wurde das Higgsbosons, vormals Ziel der experimentellen Suchen, nun selbst zu einem Werkzeug, um

nach neuer Physik zu suchen. Es bleibt nach wie vor extrem spannend. Viele Fragen sind noch zu klären, und die Zukunft bringt hoffentlich viele neue Entdeckungen und Einsichten in die spannende Welt der Elementarteilchen und unser Verständnis darüber, was die Welt im Innersten zusammenhält.