

Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD. Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 1

Besprechung: Di, 02.05.2015

Aufgabe 1: Differenzieren

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen nach x :

(a) $f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 - 5x + \ln(x) + c$

(b) $f(x) = \cos(x) + \sin(x) \tan(x)$,

(c) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)$,

(d) $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right)$.

Aufgabe 2: Reihen und Reihenentwicklung

Die Taylorreihe einer Funktion $f(x)$ am Ursprung $x = 0$ ist für die ersten drei Terme gegeben durch:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 ,$$

wobei $f'(0)$ und $f''(0)$ die erste bzw. zweite Ableitung von $f(x)$ ausgewertet an der Stelle $x = 0$ bezeichnen. Bestimmen Sie damit die Taylorreihen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \cos(x)$,

(b) $f(x) = \ln(1 - x)$.

Aufgabe 3: Integrieren

(a) Bestimmen Sie die Stammfunktion (das unbestimmte Integral) $F(x)$ zu folgenden Funktionen:

(i) $f(x) = e^{\lambda x} \sin(3x)$,

(ii) $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$.

(b) Bestimmen Sie außerdem die folgenden bestimmten Integrale:

(i) $F = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

(ii) $F(a, n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx$ für $a > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie das Gauß'sche Integral $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ für $a > 0$.

Aufgabe 4: Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit Realteil $\operatorname{Re}(z) = x$, Imaginärteil $\operatorname{Im}(z) = y$ und $i = \sqrt{-1}$ kann äquivalent in der exponentiellen Schreibweise $z = re^{i\varphi} = r(\cos(\varphi) + i \sin \varphi)$ dargestellt werden. Dabei gelten die Relationen ($r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in [0, 2\pi)$):

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\arg(z) = \varphi = \begin{cases} \varphi' & \text{für } \varphi' \geq 0 \\ \varphi' + 2\pi & \text{für } \varphi' < 0 \end{cases}, \quad \text{mit } \varphi' = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{für } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{für } y < 0 \end{cases}.$$

Die trigonometrischen Funktionen und Hyperbelfunktionen können ebenfalls mittels Exponentialfunktionen dargestellt werden:

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}),$$

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

(a) Vervollständigen Sie die Tabelle:

$z = x + iy$	$1 + 1i$	$3 - 4i$	$-3 + 2i$			$5 - \dots i$	$\dots - i$
$r = z $				2	2	13	
$\varphi = \arg(z)$				3π	$-\pi/3$		$5\pi/4$

(b) Vereinfachen Sie die folgenden Terme und schreiben Sie das Ergebnis jeweils in der Form $z = r \exp(i\varphi)$:

(i) $z = \frac{1+i}{2+3i}$,

(ii) $z = \frac{1}{\sqrt{1+i}}$.

(c) Geben Sie folgende Funktionen in der Form $f(z = x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ an:

(i) $f(z) = z^2 + \frac{3}{2}$

(ii) $f(z) = (z + z^*)^2 + (z - z^*)^3$

(iii) $f(z) = \sin(z)$

(iv) $f(z) = \tan(z)$

Hinweis: Benutzen Sie die Additionstheoreme:

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b),$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \mp \sin(a) \sin(b).$$