Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD. Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 1

Besprechung: Di, 02.05.2015

Aufgabe 1: Differenzieren

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen nach x:

(a) $f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 - 5x + \ln(x) + c$

(b) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)\tan(x)$,

(c) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2}\right)$,

(d) $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$.

Aufgabe 2: Reihen und Reihenentwicklung

Die Taylorreihe einer Funktion $f(x)$ am Ursprung $x = 0$ ist für die ersten drei Terme gegeben durch:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 \,,$$

wobei $f'(0)$ und $f''(0)$ die erste bzw. zweite Ableitung von $f(x)$ ausgewertet an der Stelle $x = 0$ bezeichnen. Bestimmen Sie damit die Taylorreihen der folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = \cos(x)$,

(b) $f(x) = \ln(1 - x)$.

Aufgabe 3: Integrieren

(a) Bestimmen Sie die Stammfunktion (das unbestimmte Integral) $F(x)$ zu folgenden Funktionen:

(i) $f(x) = e^{\lambda x}\sin(3x)dx$,

(ii) $f(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$.

(b) Bestimmen Sie außerdem die folgenden bestimmten Integrale:

(i) $F = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

(ii) $F(a,n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx \quad$ für $a > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie das Gauß'sche Integral $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ für $a > 0$.

Aufgabe 4: Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit Realteil $\mathrm{Re}(z) = x$, Imaginärteil $\mathrm{Im}(z) = y$ und $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ kann äquivalent in der exponentiellen Schreibweise $z = re^{\mathrm{i}\varphi} = r(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin\varphi)$ dargestellt werden. Dabei gelten die Relationen ($r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in [0, 2\pi)$):

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

$$\arg(z) = \varphi = \begin{cases} \varphi' \text{ für } \varphi' \geq 0 \\ \varphi' + 2\pi \text{ für } \varphi' < 0 \end{cases}, \qquad \text{mit } \varphi' = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \text{ für } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) \text{ für } y < 0 \end{cases}.$$

Die trigonometrischen Funktionen und Hyperbelfunktionen können ebenfalls mittels Exponentialfunktionen dargestellt werden:

$$\sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}\right), \qquad \sinh(z) = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right),$$
$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}\right), \qquad \cosh(z) = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right).$$

(a) Vervollständigen Sie die Tabelle:

$z = x + \mathrm{i}y$	$1 + 1\mathrm{i}$	$3 - 4\mathrm{i}$	$-3 + 2\mathrm{i}$			$5 - \ldots\mathrm{i}$	$\cdots - \mathrm{i}$
$r = \|z\|$				2	2	13	
$\varphi = \arg(z)$				3π	$-\pi/3$		$5\pi/4$

(b) Vereinfachen Sie die folgenden Terme und schreiben Sie das Ergebnis jeweils in der Form $z = r\exp(\mathrm{i}\varphi)$:

(i) $z = \frac{1+\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$,
(ii) $z = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{i}}}$.

(c) Geben Sie folgende Funktionen in der Form $f(z = x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ an:
(i) $f(z) = z^2 + \frac{3}{2}$
(ii) $f(z) = (z + z^*)^2 + (z - z^*)^3$
(iii) $f(z) = \sin(z)$
(iv) $f(z) = \tan(z)$

Hinweis: Benutzen Sie die Additionstheoreme:

$$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)\,,$$
$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)\,.$$