Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 10

Besprechung: Di, 04.07.2015

Aufgabe 23: Relativistische Geschwindigkeitsaddition

Herleitung: Es sei $\vec{u} = u\vec{e}_x$ die relative Geschwindigkeit zweier Beobachter (in zwei Koordinatensystemen) $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ zueinander. Analog sei $\vec{v} = v\vec{e}_x$ die relative Geschwindigkeit von $\mathcal{O}'$ und $\mathcal{O}''$ zueinander. In Aufgabe 20 haben Sie durch Benutzung der Matrixdarstellung $\Gamma(\vec{u})$ gezeigt, dass die Menge aller Galilei–Transformationen eine Gruppe bildet und dass man für Systeme mit Galilei–Invarianz als relative Geschwindigkeit zwischen $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}''$ wie erwartet $\vec{u} + \vec{v}$ findet. Die Menge aller Lorentz–Transformationen bildet auch ein Gruppe. Leiten Sie ganz analog unter Benutzung der Matrixdarstellung $\Lambda(\vec{u})$ die relativistische Geschwindigkeitsaddition der zwei Geschwindigkeiten $\vec{u}$ und $\vec{v}$ her.
Hinweis: Die Matrixdarstellung einer Lorentz–Transformation bezüglich einer Bewegung in x–Richtung, wobei $\vec{u} = u\vec{e}_x$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\beta = u/c$, sei gegeben durch

$$\Lambda(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Anwendung:* Von einer großen Rakete R_1, welche sich relativ zur Erde mit der Geschwindigkeit $v_1 = \frac{c}{2}$ entfernt, wird eine sehr viel kleinere Rakete R_2 gestartet, welche sich relativ zu R_1 auch mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{2}$ entfernt. Von R_2 aus wird eine noch viel kleinere Rakete R_3 gestartet, welche sich relativ zu R_2 wieder mit $\frac{c}{2}$ entfernt, usw. Alle Bewegungen finden hierbei in derselben Richtung statt.

   (i) Geben Sie zunächst die Geschwindigkeit v_2 der zweiten Rakete R_2 relativ zur Erde an.

   (ii) Fahren Sie in Ihren Überlegungen für $v_i, i = 2, 3\ldots$ fort, d.h. geben Sie generell die Geschwindigkeiten v_i der einzelnen Raketen R_i relativ zur Erde an. Ist es möglich mit diesem Prozeß die Lichtgeschwindigkeit zu erreichen oder gar zu überschreiten?
   Hinweis: Leiten Sie eine iterative Gleichung für v_i in Abhängigkeit von v_{i-1}, bzw. β_i in Abhängigkeit von β_{i-1}, her. Beginnen Sie Ihre Überlegung zunächst für $i = 2$.

Aufgabe 24: Längenkontraktion (relativistisches Auto)

Herr Müller baut ein Haus und gestaltet die anliegende Autogarage versehentlich viel zu kurz, um sein Auto darin parken zu können. Da er sein gesamtes Geld in den Bau investiert hat, muss er sich etwas anderes überlegen, um das Problem zu lösen. Da erinnert er sich an seine erste Vorlesung über Spezielle Relativitätstheorie. Die Länge seines Autos beträgt l_A, die Garage hat aber leider nur eine Einparktiefe von $l_A/2$. Herr Müller will sich nun das Phänomen der Längenkontraktion zunutze machen und berechnen, wie schnell das Auto theoretisch in die Garage einfahren müsste, damit sich das Garagentor bei erreichen des Garagenendes gerade noch schließen lässt.

(a) Ausgehend von allgemeinen Lorentztransformationen, bestimmen Sie die Länge eines bewegten Autos l'_A im Ruhesystem der Garage.

(b) Bestimmen Sie nun die Geschwindigkeit v mit welcher das Auto mindestens fahren muss, um in die Garage zu passen.

Aufgabe 25: Zeitdilatation: Myonzerfall

Beim Auftreffen von kosmischer Strahlung auf die Erdatmosphäre werden in einer Höhe von ca. 11km relativistische Teilchen, "Myonen" genannt, erzeugt, welche sich mit sehr hoher Geschwindigkeit weiter in Richtung Erdoberfläche bewegen. Die Myonen selbst zerfallen wiederum nach einer mittleren Lebensdauer von $\tau_\mu \approx 2 \cdot 10^{-6}$s.

(a) Berechnen Sie die Flugstrecke, welche die Myonen nach ihrer Erzeugung bis zu ihrem Zerfall im Mittel zurücklegen, auf "Newton'sche Art und Weise" und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Höhe von 11 km. Nehmen Sie hierbei vorläufig an, dass die Myonen mit $v \approx c$ fliegen. Erreichen die Myonen in diesem Fall die Erdoberfläche?

(b) Dennoch werden auf der Erde trotzdem eine merkliche Anzahl dieser in der Erdatmosphäre erzeugten Myonen beobachtet. Berechnen Sie die die Geschwindigkeit der Myonen, damit sich diese bei der angegebenen mittleren Lebensdauer auf einem 1.5 km hohen Berg nachweisen lassen. Verfahren Sie hierbei analog zur Aufgabe 24. Bedenken sie dabei, dass sich die Raumkoordinaten $\vec{x}$ des Myons im Ruhesystem des Myons ($\mathcal{K}$) im Gegensatz zum Ruhesystem der Erde ($\mathcal{K}'$) nicht ändern. Geben Sie das Ergebnis in Einheiten von c an, wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Ist die vorläufige Annahme, die Sie in Aufgabenteil a) getroffen haben, gerechtfertigt?
Hinweis: Nehmen Sie bei der Rechnung für $c = 300.000\frac{\text{km}}{\text{s}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ an.