Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 11

Besprechung: Di, 11.07.2015

Aufgabe 26: Zeitdilatation (Zwillingsparadoxon)

Zwei Beobachter B und B' befinden sich gemeinsam ruhend im selben Inertialsystem Σ. Zur Zeit $t = 0$ beginnt B' sich allerdings mit einer Geschwindigkeit $v \approx c$ in positiver x–Richtung zu bewegen. Nach einer zurückgelegten Strecke von 15 Lichtjahren (aus Sicht von B) kehrt B' um und bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit zurück, um B wieder zu treffen. Ein Lichtjahr beträgt ca. $9.46 \cdot 10^{12}$ km. Der Einfachheit halber soll außerdem $c = 3 \cdot 10^5 \, \frac{\text{km}}{\text{s}}$ und $1 \, \text{Jahr} = 365 \, \text{Tage}$ gelten.

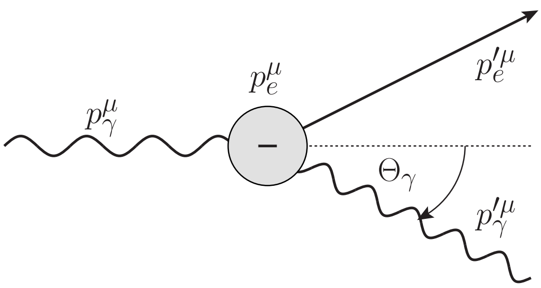
(a) Wieviele Jahre sind für B vergangen zwischen dem Moment als B' anfing sich wegzubewegen und dem Moment, in dem sie wieder aufeinandertreffen? Wieviele Jahre sind für B' vergangen?

(b) Wiederholen Sie die Rechnung für $v = c/2$.

(c) Betrachten Sie nun das Problem in einem um Inerstialsystem Σ', dass im Vergleich zu Σ um $-v'$ geboosted ist. Dieses System stimmt mit dem Ruhesystem von B' vor der Umkehr überein. Bestimmen Sie die Zeitdifferenz für B zwischen Abflug und Ankunft als Funktion von v und vergleichen Sie, ob Sie die Ergebnisse von a) und b) bestätigen können.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass der Umkehrprozess spontan abläuft, d.h. vernachlässigen Sie sämtliche durch die Umkehrung verursachten Beschleunigungseffekte.

Aufgabe 27: Stoßprozess



Ein Photon streut an einem ruhenden Elektron und überträgt dabei Energie und Impuls auf das Elektron. In dieser Aufgabe soll nun die Energie E'_γ des Photons nach der Streuung in Abhängigkeit des Streuwinkels Θ_γ mittels Energie-Impuls-Vektoren p^μ bestimmt werden. Diese sind gegeben durch Energie E und Impuls $\vec{p}$

des Teilchens

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \,.$$

Das Quadrat der Energie-Impuls-Vektoren ist invariant unter Lorentztransformationen und definiert durch die Ruhemasse des Teilchens m_0,

$$p^2 = p_\mu p^\mu = m_0^2 c^4 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \,.$$

(a) Wie transformiert sich ein in Ruhe befindliches Teilchen ($\vec{p} = \vec{0}$) mit Ruhemasse m_0 unter einem Lorentzboost mit $\vec{\beta} = (\beta, 0, 0)$?
  (i) Betrachten Sie die Energie des Teilchens im resultierendem IS. Vergleichen Sie dies mit Einsteins Mass-Energie-Äquivalenz $E = mc^2$.

(b) Nun nutzen Sie die Energie-Impulserhaltung aus, um die Energie des Photons nach dem Stoßzu bestimmen. Gehen Sie wie folgt vor:
  (i) Lösen Sie die Gleichung der Energie-Impuls-Vektoren des Elektrons p^μ_γ und des Photons p^μ_e vor dem Stoß und des Elektrons p'^μ_γ und des Photons p'^μ_e nach dem Stoß nach p'^μ_e auf.
  (ii) Quadrieren Sie die resultierenden Energie-Impuls-Vektoren auf beiden Seiten der Gleichung und verifizieren Sie, dass die Energie des auslaufenden Photons E'_γ als Funktion der Elektronmasse m_e, des Streuwinkels Θ_γ und der Energie des einlaufenden Photons E_γ durch

$$E'_\gamma = E_\gamma \cdot \left(1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}\left(1 - \cos\Theta_\gamma\right)\right)^{-1}$$

  gegeben ist.
  Hinweis: Die Ruhemasse des Photons ist $m_\gamma = 0$, damit können Sie $|\vec{p}_\gamma|$ direkt als Funktion von E_γ ausdrücken.

(c) Die Energie eines Photonons ist durch seine Wellenlänge λ gegeben,

$$E_\gamma = \frac{2\pi\hbar}{\lambda},$$

mit Planckschen Wirkungsquantum $\hbar$. Bestimmen Sie die Differenz der Wellenlängen $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$.