Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 12

Besprechung: Di, 18.07.2015

Aufgabe 28: Wellenpaket

Ein freies Teilchen werde beschrieben durch eine Materiewelle der Form

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\hbar}\, \tilde{\psi}(p)\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(px - \varepsilon(p)\, t)\right\} .$$

Dies ist äquivalent mit der in der Vorlesung hergeleiteten Gleichung durch die Relationen $p = \frac{k}{\hbar}$ und $\varepsilon(p) = \omega(k)$. Nehmen Sie nun an, dass $\varepsilon(p) = p^2/2m$ und weiter dass $\tilde{\psi}(p)$ ein Gauß'sches Wellenpaket sei, beschrieben durch

$$\tilde{\psi}(p) = \tilde{\psi}_0 e^{-b^2(p-p_0)^2/\hbar^2} .$$

(a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion gegeben ist durch

$$\psi(x,t) = \tilde{\psi}_0 \sqrt{\frac{\pi}{b^2 + it\hbar/2m}}\, \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(p_0 x - \frac{p_0^2}{2m}\, t)\right\} \exp\left\{-\frac{(x - tp_0/m)^2}{4(b^2 + it\hbar/2m)}\right\} .$$

(b) Bestimmen Sie nun die Normierungskonstante $\tilde{\psi}_0$, so dass die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ folgenderweise normiert ist:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi\,(x,t)\,|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*\,(x,t)\,\psi\,(x,t) \; .$$

(c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle X\rangle$, $\langle P\rangle$.
Hinweis: Der Erwartungswert eines Operators $\langle A\rangle$ wird im Ortsraum bestimmt durch

$$\langle A\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx = \psi^*\,(x,t)\, A\psi\,(x,t) \; .$$

(d) Berechnen Sie nun die Orts– und Impulsunschärfe ΔX bzw. ΔP. Was erhalten Sie für das Produkt $\Delta X \Delta P$?
Hinweis: Der Unschärfe eines Operators ΔA kann wie folgt berechnet werden:

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2 .$$

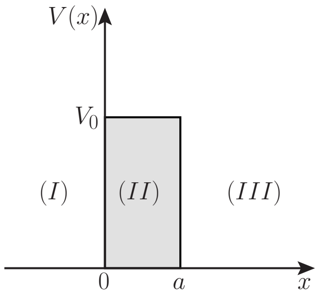
(e) Berechnen Sie nun den Erwartungswert der Energie $\langle\hat{H}\rangle$ für das obige Wellenpacket unter dem Einfluss eines Zentralpotentials $V(X) = mgX$, wobei der Hamiltonoperator durch $\hat{H} = \frac{P^2}{2m} + V(X)$ gegeben sei. Für den Erwartungswert der Energie gilt somit

$$\langle\hat{H}\rangle = \langle\frac{P^2}{2m} + mgX\rangle = \frac{1}{2m}\langle P^2\rangle + mg\langle X\rangle\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\frac{(2n)!}{(4a)^n n!}\,.$$

Aufgabe 29: Tunneleffekt



Betrachten Sie eine kastenförmige Potentialbarriere der Höhe V_0. Berechnen Sie die stationären Zustände eines Teilchens der Energie $E < V_0$, welches sich auf die Barriere zubewegt und bestimmen Sie dadurch den Transmissionskoeffizienten $t(E)$.
Hinweis: Gehen Sie dabei wie in der Vorlesung erläutert vor und benutzen Sie die folgenden Ansätze für die Wellenfunktion in den drei Bereichen (I), (II) und (III):

$$\begin{aligned} \psi_I(x) &= e^{ikx} + re^{-ikx}\,, \\ \psi_{II}(x) &= pe^{\kappa x} + qe^{-\kappa x}\,, \\ \psi_{III}(x) &= te^{ik(x-a)} \end{aligned}$$

Verwenden Sie für die Randbedingungen zwischen den drei Bereichen nun die Stetigkeit der Wellenfunktion und deren Ableitung, um daraus die Koeffizienten r, p, q, t zu bestimmen. Die Exponenten, mit den reellen Parametern k und κ, der Funktionen $\psi_I(x)$, $\psi_{II}(x)$ und $\psi_{III}(x)$ zu können Sie mit der SGL ermitteln.