

Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD. Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 2

Besprechung: Di, 09.05.2015

Aufgabe 5: Bahn-/Raumkurven

- (a) Eine Raumkurve werde durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = (a \cos(\omega t), b \sin(\omega t)),$$

mit $a, b > 0$ beschrieben. Skizzieren Sie die Kurve $\vec{r}(t)$.

- (b) Eine Raumkurve werde nun durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = (a \cos(\omega t), a \sin(\omega t), ct),$$

mit $a, c > 0$ beschrieben.

- (i) Skizzieren Sie die Kurve.
(ii) Wie groß ist der Abstand $h = z_2 - z_1$ zweier in z -Richtung direkt übereinanderliegender Punkte $(a, 0, z_1)$ und $(a, 0, z_2)$, wobei $z_2 > z_1$?
(c) Es sei nun der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ eines Teilchens auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω durch

$$\vec{r}(t) = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t), 0)$$

gegeben.

- (i) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$.
(ii) Skizzieren Sie die Kreisbahn des Teilchens und diskutieren Sie, in welche Richtung $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ relativ zum Bahnverlauf zeigen.
(iii) Nehmen Sie nun an, das Teilchen sei ein Satellit der Masse m_s und umkreise die Erde, mit Masse M_E , in einer Entfernung r_s . Berechnen Sie dessen Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$, wobei für die Gravitationskraft gilt $\vec{F} = -Gm_sM_E\vec{r}/r^3$ und G die Newton'sche Gravitationskonstante bezeichnet.

Anmerkung: ω bezeichnet die sog. Kreisfrequenz (oder auch Winkelgeschwindigkeit), t bezeichnet die Zeit. Die Periodendauer T einer Kreisbewegung, wenn eine Umdrehung vollendet ist, ist gegeben durch $T = 2\pi/\omega$.

Aufgabe 6: Bewegungsgleichungen (Wurf eines Balles)

Betrachten Sie den Wurf eines Balles mit der Masse m im konstanten Gravitationsfeld, d.h. eine Bewegung beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{F} = -mg \vec{e}_z$$

mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(t=0) = (0, 0, 0)$ und $\vec{v}(t=0) = (v \cos \alpha, 0, v \sin \alpha)$, wobei α den anfänglichen Wurfwinkel bezeichnet und $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$ die Erdbeschleunigung.

- (a) Bestimmen Sie die Form der Bahnkurve, indem Sie die Bewegungsgleichung unter Benutzung der Anfangsbedingungen integrieren, und berechnen Sie dadurch $\vec{r}(t)$ (am besten Komponentenweise).
 - (i) Welche Form haben $x(t)$ und $z(t)$?
 - (ii) Drücken Sie dann z in Abhängigkeit von x aus. Welcher Form entspricht $z(x)$?
- (b) Bei welchem anfänglichen Winkel α_{\max} erreicht man die maximale Wurfdistanz x_{\max} ?

Hinweis: Hierfür muss zunächst die Zeit t_{fin} berechnet werden, wobei $z(t_{\text{fin}}) = 0$, welche eingesetzt in $x(t)$ eine Gleichung für $x(\alpha)$ ergibt. Für ein bestimmtes α_{\max} erreicht $x(\alpha)$ ein Maximum x_{\max} .

Aufgabe 7: Atwood'sche Fallmaschine

Im dreidimensionalen Raum im Schwerfeld (g) ist am Ursprung eine frei drehbare Rolle befestigt. Über diese läuft eine Schnur mit fester Länge l , die zwei Massen m_1 (z_1) und m_2 (z_2) verbindet, die sich in nur z -Richtung frei bewegen können. Somit können Sie die x - und y -Richtung vernachlässigen.

- (a)
 - (i) Welche Zwangsbedingungen gibt es? Finden Sie passende generalisierte Koordinaten für die verbleibenden Freiheitsgrade.
- (b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf, indem Sie zuvor folgende Schritte ausführen:
 - (i) Beginnen Sie mit dem Potential V des Gesamtsystems (beide Massen). Das Potential einer Masse m im Schwerfeld ist gegeben durch

$$V = -mgz.$$

- (ii) Berechnen Sie nun die kinetische Gesamtenergie T des Systems.
- (c) Bestimmen Sie nun die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen.

