Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD. Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 3

Besprechung: Di, 16.05.2015

Aufgabe 8: Harmonischer Oszillator

Der eindimensionale harmonische Oszillator, ohne Reibung und ohne Berücksichtigung der Gravitationskraft, ist durch folgende Bewegungsgleichung (auch als Hook'sches Federgesetz bekannt) beschrieben:

$$F(x) = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Longrightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{1}$$

wobei $x = x(t)$ die zeitabhängige Auslenkung, m die Masse und k die sog. Federkonstante bezeichnen. Die Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ seien durch $x(0) = x_0$ (Anfangsauslenkung) und $\dot{x}(0) = v_0$ (Anfangsgeschwindigkeit) gegeben. Finden Sie die Lösung $x(t > 0)$ für dieses Anfangswertproblem. Berechnen Sie dann die Energie des Oszillators und diskutieren Sie deren Abhängigkeit von x_0 und v_0. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Benutzen Sie den Ansatz $x_A(t) = c_\lambda e^{\lambda t}$: Durch Einsetzen in Gleichung (1) ergibt sich eine quadratische Gleichung und zwei Lösungen für λ, $\lambda_1(k,m)$ und $\lambda_2(k,m)$, welche zwei Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bedingen. Deren lineare Superposition $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ führt dann zur allgemeinen Lösung.

(b) Um die Parameter c_{λ_1} und c_{λ_2} zu bestimmen, setzen Sie nun die Anfangsbedingungen für $x(t = 0) = x_0$ und $\dot{x}(t = 0) = v_0$ ein.

(c) Verwenden Sie die Abkürzung $\frac{k}{m} = \omega^2$, um die Ausdrücke $x(t)$ und $v(t)$ weiter zu vereinfachen.
Hinweis: Nutzen Sie die Identitäten $\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right)$
und $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}x} + e^{\mathrm{i}x}\right)$.

(d) Formulieren Sie nun die Energie $E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen x_0 und v_0.

Aufgabe 9: Beschleunigte schiefe Ebene

Ein Massepunkt mit den Koordinaten (x, z) gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene, die in x-Richtung mit der konstanten Beschleunigung a beschleunigt wird, $s(t) = at^2/2$. Die Neigung α der schiefen Ebene ist konstant.

(a) Stellen sie die Zwangsbedingung $A(x, z, t) = 0$ auf indem Sie die x-Koordinate und die z-Koordinate des Massepunktes in Relation setzen. Nutzen Sie hierfür das rechtwinklige Dreieck, deren Hypotenuse die Strecke zwischen Massepunkt und $s(t)$ ist.

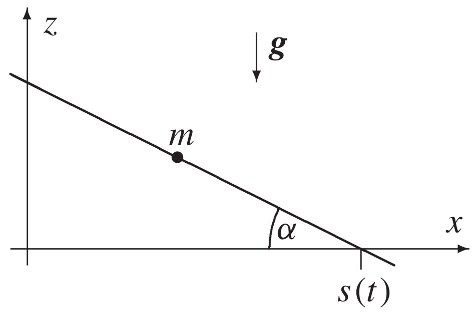
(b) Berechnen Sie nun die Zwangskraft $Z_i(x, z, t)$ komponentenweise ($i = x, z$) mittels

$$Z_i(x,z,t) = \lambda \cdot \frac{\partial A(x,z,t)}{\partial x_i}\,.$$

(c) Stellen Sie nun die Lagrangegleichungen 1.Art für den Massepunkt auf. Nehmen Sie dabei an, dass die Schwerkraft $F = -mg$ in z-Richtung auf die Masse wirkt.

  (i) Um die λ zu bestimmen, differenzieren Sie die Zwangsbedinung $A(x,z,t)$ zweimal nach der Zeit und setzen Sie diese dann in die vorher bestimmte Bewegungsgleichung ein.

(d) Lösen Sie nun die Bewegungsgleichungen. Beginnen Sie mit $x(t)$ ($\dot{x}(t=0) = v_0$, $x(t=0) = x_0$) und verwenden Sie dann die Zwangsbedingung um $z(t)$ zu bestimmer



Aufgabe 10: Bewegung im kugelsymmetrischen Potential

Die Bewegung eines Teilchens in einem kugelsymmetrischen Potential V soll mittels Kugelkoordinaten (r, Θ, φ) beschrieben werden. Diese sind gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\Theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\Theta) \\ r\cos(\Theta) \end{pmatrix}$$

(a) Ermitteln Sie zunächst die kinetische Energie $T = m\dot{\vec{x}}^2$ des Teilchens in Kugelkoordinaten. Hierzu führen Sie die folgende Schritte aus:

  (i) Bestimmen Sie die Richtungsvektoren $\vec{k_{q_i}}$ für die Kugelkoordinaten $q_i = (r, \Theta, \varphi)$ mittels $\vec{k}_{q_i} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$ und bilden Sie die zugehörigen normierten Einheitsvektoren $\vec{e}_{q_i} = \frac{\vec{k}_{q_i}}{|\vec{k}_{q_i}|}$.

  (ii) Zeigen Sie, dass sie $\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{x}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dq_i}{dt}\frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i}$ mit Hilfe der Einheitsvektoren schreiben können als

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\Theta}\vec{e_\Theta} + r\sin(\Theta)\,\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}\,.$$

  (iii) Berechnen Sie nun die kinetische Energie T in Kugelkoordinaten. Sie können hierbei die Orthonormalität der Einheitsvektoren nutzen.

(b) Bilden Sie die Langrangefunktion $\mathcal{L}$ für ein Teilchen mit Masse m im kugelsymmetrischen Potential $V = V(r,t)$.

  (i) Welche Koordinate $q_i = (r, \Theta, \varphi)$ ist zyklisch?

  (ii) Ermitteln Sie den dazugehörigen zeitlich konstanten verallgemeinerten Impuls $p_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\beta}$.