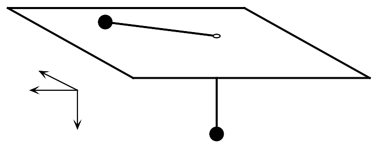
Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD. Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 4

Besprechung: Di, 23.05.2015

Aufgabe 11: Lagrangegleichungen und Erhaltungssätze



Betrachten Sie zwei Massen m_1 und m_2 im konstanten Gravitationsfeld $\vec{F} = mg\vec{e}_z$, welche durch einen dünnen Faden der Länge l aneinander gebunden sind. Die Masse m_1 befindet sich dabei auf einer Ebene ($z = konst.$), die Masse m_2 hängt frei von dieser Ebene herab. Benutzen Sie die Euler–Lagrange–Gleichung, um die Bewegungsgleichungen der beide Massen aufzustellen.

(a) Treffen Sie zunächst eine Aussage über die Erhaltungsgrößen des Problems.

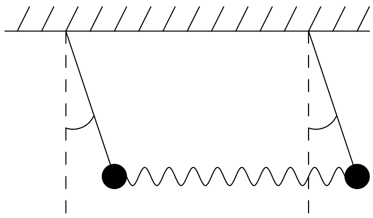
(i) Die kartesischen Koordinaten $(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$ sind nicht geeignet, da es komplizierte Abhängigkeiten gibt. Man führt daher ebene Polarkoordinaten $(x_1 = r_1\cos(\varphi_1), y_1 = r_1\sin(\varphi_1), z_1)$ für m_1 und Kugelkoordinaten
$(x_2 = r_2\cos(\varphi_2)\sin(\Theta_2), y_2 = r_2\sin(\varphi_2)\sin(\Theta_2), z_2 = r_2\cos(\Theta_2))$ für m_2 ein. Wie lauten die Zwangsbedingungen in den Koordinaten $(r_1, \varphi_1, z_1; r_2, \varphi_2, \Theta_2)$?
Hinweis: Vernachlässigen Sie mögliche Torsionseffekte.

(ii) Überlegen Sie sich nun die kinetische und die potentielle Energie für m_1 in den ebenen Polarkoordinaten. Bedenken Sie dabei, daß $z_1 = konst.$ und als Koordinatenursprung für die z–Richtung gewählt werden kann.

(iii) Die kinetische und die potentielle Energie von m_2 sind gegeben als $T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\Theta}_2^2 + r_2^2\dot{\varphi}_2^2\sin^2\Theta_2)$ bzw. $V_2 = -m_2 g r_2\cos\Theta_2$. Nun können Sie die Lagrangefunktion aufschreiben. Was sind die zyklischen Koordinaten und welche Erhaltungsgrößen resultieren daraus?

(b) Setzen Sie nun $\varphi_2 = \Theta_2 = 0$, d.h. die Masse m_2 sei dahingehend eingeschränkt, dass sie sich nur noch in der z–Richtung bewegen kann. Wenden Sie auf die daraus resultierende Lagrangefunktion L die Euler–Lagrange–Gleichung an.
Hinweis: Mit dieser Einschränkung ist L nur noch von zwei freien Koordinatensätzen $(q_i, \dot{q}_i)$, $i = 1, 2$, abhängig anstatt von vieren. Welche sind das? Bedenken Sie, dass es zwischen r_1 und r_2 eine Beziehung gibt.

Aufgabe 12: Gekoppeltes Pendel



Betrachten Sie zwei durch eine Feder gekoppelte Pendel gleicher Länge l und Masse m.

(a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t)$ und die zugehörigen Bewegungsgleichungen, wobei sich hierbei ein Gleichungssystem zweier gekoppelter Gleichungen ergibt. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Stellen Sie zunächst eine Gleichung für $\mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t)$ auf. Überlegen Sie sich, dass die kinetische Energie eines einzelnen Pendels durch $T_i = \frac{1}{2} m_i l_i^2 \dot{\varphi}_i^2$ gegeben ist, und wir ein Koordinatensystem derart wählen können, dass die potentielle Energie eines einzelnen Pendels durch $V_i = -m_i g l_i \cos(\varphi_i)$ gegeben ist. Im Ausdruck für die gesamte potentielle Energie tritt noch ein zusätzlicher Term auf, welcher von der gegenseitigen Kopplung durch die Feder herrührt und gegeben ist durch $\frac{1}{2} k l^2 (\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2))^2$, wobei k die Kopplungskonstane der Feder bezeichnet.

(ii) Nutzen Sie die Taylor–Näherungen zweiter Ordnung von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für kleine x und setzen Sie dann die Euler–Lagrange–Gleichungen bezüglich der Koordinatensätze $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ und $(\varphi_2, \dot{\varphi}_2)$ an.

(b) Führen Sie entsprechende Koordinaten Φ_1, Φ_2 ein, welche eine Linearkombination von φ_1 und φ_2 darstellen, um das Gleichungssystem zu entkoppeln. Diskutieren Sie die zugehörigen Schwingungszustände für die unterschiedlichen Fälle der Gleichschwingung ($\varphi_2 = \varphi_1$) und der Gegenschwingung ($\varphi_2 = -\varphi_1$).
Hinweis: Um auf die linear unabhängigen Koordinaten Φ_1, Φ_2 zu kommen, subtrahieren Sie die zwei Gleichungen einmal voneinander bzw. addieren Sie einmal zueinander. Dies entkoppelt die Gleichungen. Was sind die daraus resultierenen Koordinaten, in Abhängigkeit der Winkel φ_1 und φ_2, welche nun jeweils eine der entkoppelten Gleichungen lösen?

(c) *Bonus:* Bestimmen Sie nun die Lösung für $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ im Falle der Schwebung mit den Anfangsbedingungen $\varphi_2(t=0) = A \neq 0$, $\varphi_1(t=0) = 0$, $\dot{\varphi}_1(t=0) = 0$ und $\dot{\varphi}_2(t=0) = 0$. Benutzen Sie hierfür den Ansatz $\Phi_i = A_i \cos(\omega_i t + \beta_i)$ für die verallgemeinerten Koordinaten.