

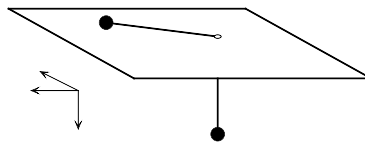
Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD. Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 4

Besprechung: Di, 23.05.2015

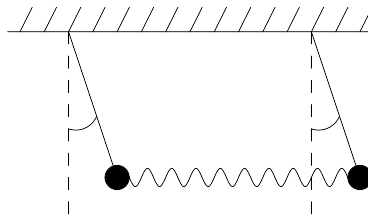
Aufgabe 11: Lagrangegleichungen und Erhaltungssätze



Betrachten Sie zwei Massen m_1 und m_2 im konstanten Gravitationsfeld $\vec{F} = mg\vec{e}_z$, welche durch einen dünnen Faden der Länge l aneinander gebunden sind. Die Masse m_1 befindet sich dabei auf einer Ebene ($z = \text{konst.}$), die Masse m_2 hängt frei von dieser Ebene herab. Benutzen Sie die Euler–Lagrange–Gleichung, um die Bewegungsgleichungen der beide Massen aufzustellen.

- (a) Treffen Sie zunächst eine Aussage über die Erhaltungsgrößen des Problems.
- (i) Die kartesischen Koordinaten $(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$ sind nicht geeignet, da es komplizierte Abhängigkeiten gibt. Man führt daher ebene Polarkoordinaten $(x_1 = r_1 \cos(\varphi_1), y_1 = r_1 \sin(\varphi_1), z_1)$ für m_1 und Kugelkoordinaten $(x_2 = r_2 \cos(\varphi_2) \sin(\Theta_2), y_2 = r_2 \sin(\varphi_2) \sin(\Theta_2), z_2 = r_2 \cos(\Theta_2))$ für m_2 ein. Wie lauten die Zwangsbedingungen in den Koordinaten $(r_1, \varphi_1, z_1; r_2, \varphi_2, \Theta_2)$?
Hinweis: Vernachlässigen Sie mögliche Torsionseffekte.
 - (ii) Überlegen Sie sich nun die kinetische und die potentielle Energie für m_1 in den ebenen Polarkoordinaten. Bedenken Sie dabei, daß $z_1 = \text{konst.}$ und als Koordinatenursprung für die z -Richtung gewählt werden kann.
 - (iii) Die kinetische und die potentielle Energie von m_2 sind gegeben als $T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\Theta}_2^2 + r_2^2\dot{\varphi}_2^2 \sin^2 \Theta_2)$ bzw. $V_2 = m_2 g r_2 \cos \Theta_2$. Nun können Sie die Lagrangefunktion aufschreiben. Was sind die zyklischen Koordinaten und welche Erhaltungsgrößen resultieren daraus?
- (b) Setzen Sie nun $\varphi_2 = \Theta_2 = 0$, d.h. die Masse m_2 sei dahingehend eingeschränkt, dass sie sich nur noch in der z -Richtung bewegen kann. Wenden Sie auf die daraus resultierende Lagrangefunktion L die Euler–Lagrange–Gleichung an.
Hinweis: Mit dieser Einschränkung ist L nur noch von zwei freien Koordinatensätzen (q_i, \dot{q}_i) , $i = 1, 2$, abhängig anstatt von vieren. Welche sind das? Bedenken Sie, dass es zwischen r_1 und r_2 eine Beziehung gibt.

Aufgabe 12: Gekoppeltes Pendel



Betrachten Sie zwei durch eine Feder gekoppelte Pendel gleicher Länge l und Masse m .

- (a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t)$ und die zugehörigen Bewegungsgleichungen, wobei sich hierbei ein Gleichungssystem zweier gekoppelter Gleichungen ergibt. Gehen Sie wie folgt vor:
- Stellen Sie zunächst eine Gleichung für $\mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t)$ auf. Überlegen Sie sich, dass die kinetische Energie eines einzelnen Pendels durch $T_i = \frac{1}{2}m_i l_i^2 \dot{\varphi}_i^2$ gegeben ist, und wir ein Koordinatensystem derart wählen können, dass die potentielle Energie eines einzelnen Pendels durch $V_i = -m_i g l_i \cos(\varphi_i)$ gegeben ist. Im Ausdruck für die gesamte potentielle Energie tritt noch ein zusätzlicher Term auf, welcher von der gegenseitigen Kopplung durch die Feder herrührt und gegeben ist durch $\frac{1}{2}k l^2 (\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2))^2$, wobei k die Kopplungskonstante der Feder bezeichnet.
 - Nutzen Sie die Taylor-Näherungen erster Ordnung von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für kleine x und setzen Sie dann die Euler-Lagrange-Gleichungen bezüglich der Koordinatensätze $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ und $(\varphi_2, \dot{\varphi}_2)$ an.
- (b) Führen Sie entsprechende Koordinaten Φ_1, Φ_2 ein, welche eine Linearkombination von φ_1 und φ_2 darstellen, um das Gleichungssystem zu entkoppeln. Diskutieren Sie die zugehörigen Schwingungszustände für die unterschiedlichen Fälle der Gleichschwingung ($\varphi_2 = \varphi_1$) und der Gegenschwingung ($\varphi_2 = -\varphi_1$).
- Hinweis:* Um auf die linear unabhängigen Koordinaten Φ_1, Φ_2 zu kommen, subtrahieren Sie die zwei Gleichungen einmal voneinander bzw. addieren Sie einmal zueinander. Dies entkoppelt die Gleichungen. Was sind die daraus resultierenden Koordinaten, in Abhängigkeit der Winkel φ_1 und φ_2 , welche nun jeweils eine der entkoppelten Gleichungen lösen?
- (c) *Bonus:* Bestimmen Sie nun die Lösung für $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ im Falle der Schwebung mit den Anfangsbedingungen $\varphi_2(t=0) = A \neq 0$, $\varphi_1(t=0) = 0$, $\dot{\varphi}_1(t=0) = 0$ und $\dot{\varphi}_2(t=0) = 0$. Benutzen Sie hierfür den Ansatz $\Phi_i = A_i \cos(\omega_i t + \beta_i)$ für die verallgemeinerten Koordinaten.