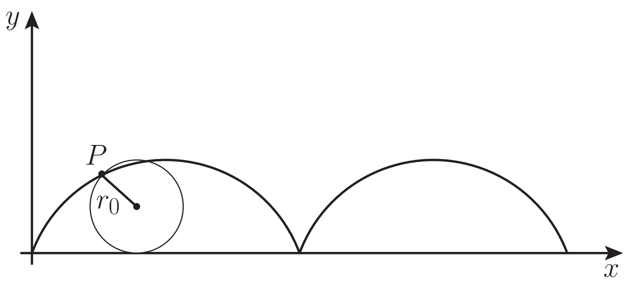
Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD. Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 5

Besprechung: Di, 30.05.2015

Aufgabe 13: Zykloide

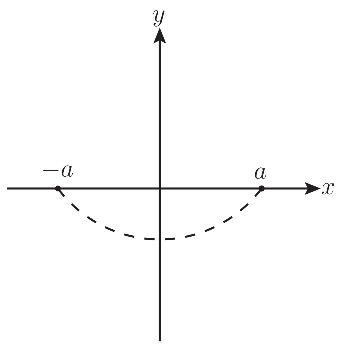


Ein Kreis mit Radius r_0 rollt in der xy-Ebene auf der x-Achse. Zu einem gewissen Zeitpunkt $t = 0$ koinzidiere der Nullpunkt $(x, y) = (0, 0)$ mit einem Punkt P auf dem Kreis, der durch den Bahnvektor $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ beschrieben wird.

(a) Geben Sie die Parametrisierung $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ der Kurve des Kreispunktes P an.

(b) Wie lautet die Parametrisierung $\vec{r}(t)$, wenn man die Kurve an der x-Achse spiegelt?

Aufgabe 14: Kettenlinie



Ein Seil der Länge L und einer Masse m sei an zwei Punkten $(-a, 0)$ und $(a, 0)$ befestigt. Bestimmen Sie nun, welchen Verlauf das Seil $y(x)$ unter Einfluss der Schwerkraft beschreibt. Dies bedeutet, dass Sie die Funktion $y(x)$ bestimmen müssen, unter welcher die potentielle Energie

$$V(y(x)) = \int ds \frac{m}{L} g y(x)$$

des Seils minimal ist.
Hinweis: Da die Parameter m,g und L positiv und konstant ist, können Sie folgende Vereinfachung nutzen:

$$\hat{V}(y(x)) = \frac{L}{gm} V(y(x))$$

(a) Leiten Sie zunächst folgende Relation für das Linienelement ds her:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx\,.$$

(b) Begründen Sie nun, warum die Nebenbedingung $h(y(x))$ die konstante Länge L des Seiles beschreibt:

$$h(y(x)) = \int_{-a}^{a} dx \sqrt{1 + y'^2(x)} - \frac{L}{2a} = 0\,.$$

(c) Nun können Sie $y(x)$ mit einer Variationsrechnung mit Nebenbedingung in folgenden Schritten bestimmen:

(i) Bestimmen Sie nun das Funktional $S(y(x), \lambda)$ mit Langrange'schen Multiplikators λ:

$$S(y(x), \lambda) = \hat{V}(y(x)) + \lambda h(y(x))\,.$$

Dieses Funktional enthält ergibt die Nebenbedingung, für den Fall, dass die Funktion von λ extremal ist.

(ii) Mit Hilfe der Substitution $f(x) = y(x) + \lambda$, zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange Gleichung von $S(y(x), \lambda)$ für $f(x)$ auf folgende Form gebracht werden kann:

$$f'^2(x) - f(x)f''(x) + 1 = 0\,. \tag{1}$$

(iii) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung (1) äquivalent ist zu

$$f''(x) = C \cdot f(x)\,.$$

Hinweis: Differenzieren Sie die Differentialgleichung (1) nochmal nach x und vergleichen Sie diese mit $\left(\frac{f''(x)}{f(x)}\right)'$ unter der Annahme $f(x) \neq 0$.

(iv) Bestimmen Sie nun $f(x)$ mit dem Ansatz $f(x) = C_{\lambda_f} e^{\lambda_f x}$ und vereinfachen Sie die Funktion.
Hinweis: Nutzen Sie mögliche Symmetrien aus.

(v) Erläutern Sie, wie die noch unbekannten Parameter bestimmt werden können. (Es ist keine Rechnung nötig).