Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD. Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 6

Besprechung: Di, 06.06.2015

Aufgabe 15: Zweikörperproblem

Die Lagrangefunktion eines Zweikörperproblems ist gegeben durch

$$\mathcal{L}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - U\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right)$$

(a) Nun werden die folgenden generalisierten Koordinaten

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2\,,\\ \vec{R} &= \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2\end{aligned}$$

mit $M = m_1 + m_2$ eingeführt.

(i) Leiten Sie die folgende Lagrangefunktion für die verallgemeinerten Koordinaten mit $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ her:

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \vec{R}, \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{R}}) = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^{2} + \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^{2} - U\left(|\vec{r}|\right)\,.$$

(ii) Bestimmen Sie die zyklischen Koordinaten und die zugehörigen Erhaltungsgrößen.

(b) Eine alternative Wahl der generalisierten Koordinaten lautet:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2\,,\\ \vec{\rho} &= \vec{r}_1 + \vec{r}_2\,.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Lagrangedichte als Funktion von $\vec{r}$ und $\vec{\rho}$ und erläutern Sie, warum diese Wahl der Koordinaten ungünstiger ist.

Aufgabe 16: Hamilton Formalismus

Für ein Punktteilchen mit der kinetischen und der potentiellen Energie T bzw. V sind die Lagrange– und die Hamiltonfunktion gegeben durch

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T(\dot{\vec{q}}) - V(\vec{q}) \quad \text{bzw.} \quad H(\vec{q}, \vec{p}) = T(\vec{p}) + V(\vec{q})$$

Durch $\vec{q}$, $\dot{\vec{q}}$ und $\vec{p}$ sind jeweils die generalisierten Koordinaten, Geschwindigkeiten bzw. Impulse des Punktteilchens definiert. Die potentielle Energie sei beliebig ungleich Null. Die kinetische Energie ist wie üblich gegeben durch $T(\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{q}}^2$. Die Hamiltonfunktion folgt aus der Lagrangefunktion durch die Transformation

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \dot{\vec{q}}\vec{p} - L = \sum_i \dot{q}_i p_i - L$$

wobei die generalisierten Impulse gegeben sind durch $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

- Die Euler–Lagrange–Gleichungen, welche Sie bereits kennen, lauten

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial q_i} = 0$$

  und stellen für $i = 1, 2, 3$ je eine Differentialgleichung zweiter Ordnung dar.

- Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p})}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad \frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p})}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

  mit $i = 1, 2, 3$ und stellen ein System von dreimal zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung dar.

(a) Gegeben sind kartesiche Koordinaten, d.h. $\vec{q} = \vec{x}$. Bestimmen Sie zunächst die generalisierten Impulse in Abhängigkeit der generalisierten Geschwindigkeiten.

(b) Dreht man diese Abhängigkeit um, so kann man die kinetische Energie in Abängigkeit der generalisierten Impulse ausdrücken. Wie sieht die kin. Energie $T(\vec{p})$, in Abhängigkeit der generalisierten Impulse $\vec{p}$, aus?

(c) Stellen Sie nun die Hamiltonfunktion auf und leiten Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen daraus ab. Überlegen Sie sich, daß diese äquivalent zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen für ein Punktteilchen der Masse m im Potential $V(\vec{x})$ sind.