Karlsruher Institut für Technologie

SoSe 2017

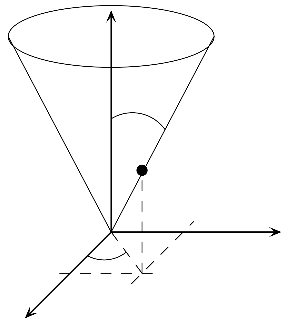
Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD. Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 7

Besprechung: Di, 13.06.2015

Aufgabe 17: Hamilton vs Lagrange



Ein Punktteilchen der Masse m gleitet reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels. Die Gravitationskraft wirke in die negative z–Richtung und der Winkel α zwischen der z-Achse und der Kegeloberfläche sei konstant.

(a) Die unabhängigen Koordinaten seien z und φ. Wie lautet die Zwangsbedingung? Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und benutzen Sie die Euler–Lagrange–Gleichungen um die folgenden Bewegungsgleichungen herzuleiten:

$$\begin{aligned} 2\dot{z}\dot{\varphi} + z\ddot{\varphi} &= 0 \\ \ddot{z}(1 + \tan^2\alpha) - z\dot{\varphi}^2\tan^2\alpha + g &= 0 \end{aligned}$$

(b) Setzen Sie die Rechnung nun im Hamilton–Formalismus fort. Schreiben Sie die Hamiltonfunktion auf und leiten Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen her. Zeigen Sie dann, daß diese zu den bereits in Aufgabenteil a) hergeleiteten Bewegungsgleichungen äquivalent sind.

(c) Lösen Sie die in Aufgabenteil a) angegebenen Bewegungsgleichungen für den Fall $z = konst$ und bestimmen Sie den Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$.

Aufgabe 18: Symmetrien und Erhaltungsgrößen am Beispiel des harmonischen Oszillators

(a) Eine Transformation $T : (x, \dot{x}, t) \to (x', \dot{x}', t; \alpha)$, wobei α einen reellen Parameter der Transformation bezeichnet, ist eine Symmetrietransformation, wenn sie die Lagrangefunktion invariant lässt, bis auf einen Term der eine totale zeitliche Ableitung darstellt:

$$\mathcal{L}'(x', \dot{x}', t; \alpha) = \mathcal{L}(x', \dot{x}', t) + \frac{d}{dt}F(x', t; \alpha)$$

(i) Zeigen Sie, dass die Transformation

$$T : (x, \dot{x}, t) \to \big(x' - \alpha\cos(\omega t), \dot{x}' + \alpha\omega\sin(\omega t), t; \alpha\big),$$

mit $\omega^2 = k/m$, eine Symmetrietransformation des harmonischen Oszillators ist. Dabei kann die Eichfunktion $F(x', t; \alpha)$ auf die Form

$$F(x', t; \alpha) = \alpha m\omega x' \sin(\omega t) + \alpha^2 f(t)$$

gebracht werden.
Hinweis 1: Die Lagrangefunktion des harmonischen Oszillators in $(x, \dot{x}, t)$ lautet $\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2$.
Hinweis 2: $\frac{d}{dt}\sin(2\omega t) = 2\omega\cos(2\omega t) = 2\omega\big(\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)\big)$.

(ii) $\mathcal{L}$ heißt in diesem Fall symmetrisch unter der Transformation T, und nach dem Noether–Theorem (womit wir uns hier nicht weiter beschäftigen wollen) stellt die folgende Größe J dann eine Erhaltungsgröße dar:

$$J = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\frac{\partial x(x', t; \alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

Wie sieht die Erhaltungsgröße J für den obigen Fall aus?

(b) In der Vorlesung wurde die Poisson–Klammer zweier Observablen F und G vorgestellt, welche für einen beliebigen Satz von s generalisierten Koordinaten bzw. Impulsen folgendermaßen definiert ist:

$$\{F, G\} = [F, G] = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)$$

Weiter wurde gezeigt, dass sich die totale zeitliche Ableitung einer Observablen f mittels der Poisson–Klammer in einfacher Form schreiben lässt als

$$\frac{d}{dt}f = [f, H] + \frac{\partial}{\partial t}f$$

wobei H die Hamiltonfunktion des Systems unter Betrachtung darstellt. Für die generalisierten Koordinaten und Impulse selbst führt dies auf

$$\dot{q}_j = [q_j, H] \quad \text{und} \quad \dot{p}_j = [p_j, H]$$

und i.A. gilt, dass eine Größe A erhalten ist, wenn gilt:

$$[A, H] = 0 \quad \text{falls} \quad \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

oder allgemeiner, wenn gilt:

$$[A, H] + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

(i) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators mittels der Poisson–Klammern der generalisierten Koordinaten und Impulse mit dessen Hamiltonoperator auf.

(ii) Zeigen Sie, dass die Größe $A = -m\big(\dot{x}\cos(\omega t) + \omega x\sin(\omega t)\big)$ eine Erhaltungsgröße ist. Schreiben Sie dazu A zunächst in Abhängigkeit von p und x um, anstelle von $\dot{x}$ und x.