Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD. Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 8

Besprechung: Di, 20.06.2015

Aufgabe 19: Gekoppelter harmonischer Oszillator als Eigenwertproblem

Die Bewegungsgleichung eines gekoppelten harmonischen Oszillators, welcher ihnen in Aufgabe 12 in Form zweier gekoppelter Pendel begegnet ist, ist gegeben durch

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l}\varphi_1 + \frac{k}{m}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0\,,$$
$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\varphi_2 + \frac{k}{m}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0\,.$$

Dieser Satz zweier gekoppelter linearer Differentialgleichungen kann, durch entsprechende Normalkoordinaten entkoppelt und gelöst werden. Sollten jedoch die Normalkoordinaten nicht so einfach ersichtlich sein, kann die DGL gegebenfalls durch Lösen des Eigenwertproblems entkoppelt werden.

(a) Schreiben Sie dazu das obige System gekoppelter Gleichungen in einer Matrixdarstellung der Form

$$\ddot{\vec{\varphi}} = \mathbf{M}\vec{\varphi} \quad \text{mit} \quad \vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}\,,$$

wobei $\mathbf{M}$ eine 2×2–Matrix darstellt. Wie sieht $\mathbf{M}$ explizit aus?

(b) Führen Sie dies nun durch den Ansatz $\vec{\varphi} = \vec{v}\cos(\omega t + \beta)$, wobei $\vec{v}$ die konstanten Komponenten v_1 und v_2 besitzt, in eine Eigenwertgleichung für $\mathbf{M}$ über und bestimmen Sie die Eigenwerte ω_1 und ω_2 bzw. die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}^{(1)}$ und $\vec{v}^{(2)}$.

(c) Bestimmen Sie nun die allgemeine Lösung für $\vec{\varphi}$.
Hinweis: Bedenken Sie, dass jede Eigenschwingung mit Eigenwert ω_i allgemein mit einer unabhängige Phase β_i und Amplitude A_i beschrieben werden kann.

Aufgabe 20: Galilei–Transformation

Die allgemeine Koordinatentransformation der Galilei–Gruppe, kurz Galilei–Transformation, von $\{\vec{r}, t\}$ nach $\{\vec{r}', t'\}$ ist gegeben durch

$$\vec{r}' = \lambda_1 \mathbf{R}\cdot\vec{r} - \vec{v}t - \vec{r}_0\,,$$
$$t' = \lambda_2 t + t_0\,,$$

wobei λ_1, λ_2 Vorzeichen aus der Menge $\{-1, +1\}$ bezeichnen und $\mathbf{R}$ eine Drehmatrix im dreidimensionalen Raum. Die Galilei–Transformationen verkörpern damit das Kollektiv der Grundtransformationen Zeittranslation (konstante Verschiebung des

Ursprungs der Zeitachse), Ortstranslation (konstante Verschiebung des Ursprungs des Ortsraums und Translation auf ein sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegendes Bezugssystem), Drehung im Ortsraum, Raumspiegelung und Zeitumkehr. $P_G = \{\mathbf{R}, \vec{v}, \vec{r}_0, t_0, \lambda_1, \lambda_2\}$ bezeichnet dabei die Parametermenge (10 reelle Parameter, denn die Drehung $\mathbf{R}$ kann i.A. durch drei Winkel beschrieben werden, und 2 Vorzeichen) der Galilei–Transformation.

(a) Eine Untergruppe der Galilei–Transformation bildet die Boost-gruppe, deren Transformation gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \vec{r'} &= \vec{r} - \vec{v}t\,, \\ t' &= t\,. \end{aligned}$$

Dies stellt den Spezialfall von $P_{G'} = \{\mathbb{1}, \vec{v}, \vec{0}, 0, 1, 1\} = \{\vec{v}\}$ dar, wobei $\mathbb{1}$ die dreidimensionale Einheitsmatrix bezeichnet, und schränkt damit die Galilei–Transformationen auf 3 Parameter ein. Fassen wir $\vec{r}$ und t wie folgt in dem Vierervektor
$r^T = (ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z)$ zusammen, so können wir die eingeschränkte Galilei–Transformation auch in Vierermatrixform schreiben. Zeigen Sie in diesem Fall, dass

$$r' = \Gamma_{G'}(\vec{v}) r$$

wobei

$$\Gamma_{G'}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\vec{v}}{c} & \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_x}{c} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{v_y}{c} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v_z}{c} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad r = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Vierermatrixdarstellung (für den eingeschränkten Parameterraum aus Teil a), dass die Menge G' aller daraus resultierender Galilei–Transformationen eine Gruppe bilden. D.h.

(i) Zeigen Sie, dassdie Hintereinanderausführung zweier Transformationen $P_{G'}$ und $P'_{G'}$, dargestellt durch $\Gamma \in G'$ bzw. $\Gamma' \in G'$ wieder eine Galilei–Transformation ergibt, dass also $\Gamma'' = \Gamma' \cdot \Gamma \in G'$ gilt. Was ergibt sich dann für $\vec{v}''$ in Abhängigkeit von $\vec{v}$ und $\vec{v}'$?

(ii) Zeigen Sie, dass $\Gamma \cdot (\Gamma' \cdot \Gamma'') = (\Gamma \cdot \Gamma') \cdot \Gamma''$.

(iii) Zeigen Sie, dass ein Einselement $\mathbf{1}$ existiert (nicht zu verwechseln mit der dreidimensionalen Einheitsmatrix) so dass $\Gamma \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot \Gamma = \Gamma$.

(iv) Zeigen Sie, dass ein inverses Element Γ^{-1} existiert, so dass $\Gamma \cdot \Gamma^{-1} = \Gamma^{-1} \cdot \Gamma = \mathbf{1}$.

(c) Zeigen Sie Eigenschaft i) aus Teil b) nun für Galilei–Transformationen G'' bei denen $\mathbf{R} \neq \mathbb{1}$ gilt, also für $P_{G''} = \{\mathbf{R}, \vec{v}, \vec{0}, 0, 1, 1\} = \{\mathbf{R}, \vec{v}\}$:

(i) Wie sieht $\Gamma_{G''}(\mathbf{R}, \vec{v})$ aus?

(ii) Was ergibt sich in diesem Fall für $\vec{v}''$, was für R''?