Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD. Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 9

Besprechung: Di, 27.06.2015

Aufgabe 21: Drehmoment

Gegeben ist das Drehimpules $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ eines Massepunktes m, mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ und Impuls $\vec{p}$.

(a) Berechnen Sie die Poisson Klammern der kartesischen Komponenten des Drehimpulses und des Impulses

$$\{L_i, p_j\}\,,\ \text{für } i = x, y, z \text{ und } j = x, y, z\,.$$

(b) Berechnen Sie nun Poisson Klammern der kartesischen Komponenten des Drehimpulses

$$\{L_i, L_j\}\,,\ \text{für } i = x, y, z \text{ und } j = x, y, z\,.$$

(c) Der Casimiroperator $\vec{L}^2$ ist wie folgt definiert:

$$\vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2\,.$$

Berechnen Sie die Poisson Klammern

$$\left\{\vec{L}^2, L_i\right\}\,,\ \text{für } i = x, y, z\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Produktregel $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}\, g$.

Aufgabe 22: Matrix- vs Index-Schreibweise

In der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie ist es üblich die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. über doppelt vorkommende Indizes wird summiert, und die Vierervektor Schreibweise zu verwenden. Ein kontravarianter Vierer-Vektor (Index oben) ist dabei gegeben durch

$$x^\mu = (ct, x, y, z)\ .$$

Ein kovarianter Vierer-Vektor (Index unten) kann mittels der Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$ aus dem kontravarianten Vierer-Vektor bestimmt werden

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -x, -y, -z)\ ,$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\ , \quad (g_{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu}\,.$$

Das Skalarprodukt ist damit gegeben durch

$$x_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} \, .$$

Die Lorentztransformation eines kontravarianten Vierervektor ist gegeben durch

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \, ,$$
$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\vec{\beta}^T \\ -\gamma\vec{\beta} & \mathbb{1} + (\gamma - 1)\,\frac{\vec{\beta}\vec{\beta}^T}{\vec{\beta}^2} \end{pmatrix} \, ,$$

mit $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)^T$. Ein allgemeiner Lorentztensor transformiert sich dann wie folgt

$$T^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = \Lambda_{\mu_1}{}^{\alpha_1}\Lambda_{\mu_2}{}^{\alpha_2}\ldots\Lambda_{\mu_n}{}^{\alpha_n}\Lambda^{\beta_1}{}_{\nu_1}\Lambda^{\beta_2}{}_{\nu_2}\ldots\Lambda^{\beta_k}{}_{\nu_k} T^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

Durch die Forderung, dass das Skalarprodukt unter Lorentztransformationen invariant bleiben soll, muss der metrische Tensor invariant unter Lorentztransformationen sein:

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu \, .$$

In den folgenden Teilaufgaben stellt $F^{\mu\nu}$ einen Tensor 2ter Stufe dar.

(a) Verwenden Sie zunächst die Matrixschreibweise für einen Boost in x-Richtung mit
$\vec{\beta} = (\beta, 0, 0)^T$.
  (i) Überprüfen Sie zunächst, dass die inverse Lorentztransformation gegeben ist durch

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \, . \tag{1}$$

  (ii) Zeigen Sie, dass folgende Relation gilt

$$\Lambda_\nu{}^\mu = g_{\nu\beta}\Lambda^\beta{}_\alpha g^{\mu\alpha} = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu \, .$$

  (iii) Berechnen Sie die Transformation von x^μ explizit.
  (iv) Wie transformiert sich x_μ ?
  (v) Zeigen Sie explizit, dass $x_\mu x^\mu$ invariant unter Lorentztransformationen ist.

(b) Verwenden Sie zunächst die Index-Schreibweise.
  (i) Zeigen Sie explizit, dass $x_\mu x^\mu$ invariant unter Lorentztransformationen ist.
  (ii) Zeigen Sie explizit, dass $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ invariant unter Lorentztransformationen ist.
  (iii) Zeigen Sie, mit Hilfe von $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu$ und $g_{\alpha\mu}g^{\mu\beta} = \delta^\beta_\alpha$,
  dass $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\sigma = \delta^\mu_\sigma$ gilt.