Moderne Physik für Informatiker

Vorlesung: PD. Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. M. Sekulla

Präsenzübung

Besprechung: Di, 25.04.2015

Aufgabe 1: Vereinfachen und Kürzen

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\frac{(a^2-b^2)^{-2}}{(a+b)^{-3}} \cdot \frac{(a-b)^2}{a+b}$,

(b) $\log_e\left(e^{3x}e^{5x}\right) \equiv \ln\left(e^{3x}e^{5x}\right)$,

(c) $\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\tan(\varphi)$.

Lösung der Aufgabe 1

(a) $\frac{(a^2-b^2)^{-2}}{(a+b)^{-3}} \cdot \frac{(a-b)^2}{a+b} = \frac{((a-b)(a+b))^{-2}(a-b)^2}{(a+b)^{-2}} = 1$

(b) $\ln\left(e^{3x}e^{5x}\right) = \ln\left(e^{3x+5x}\right) = 8x$

(c) $\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\tan(\varphi) = \frac{\cos(\varphi)^2}{\cos(\varphi)} + \frac{\sin(\varphi)^2}{\cos(\varphi)} = \frac{1}{\cos(\varphi)}$

Aufgabe 2: Differenzieren

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen nach x:

(a) $f(x) = a \cdot \cos(x) + \sin(bx + c)$,

(b) $f(x) = (3 + 2x - x^2)\, e^x$,

(c) $f(x) = (3 + 4x - x^2)^{1/2}$,

(d) $f(x) = x^x$.

Lösung der Aufgabe 2

(a) $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = -a \cdot \sin(x) + b\cos(bx + c)$

(b) $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = (3 + 2x - x^2)\, e^x + (2 - 2x)\, e^x = (5 - x^2)\, e^x$

(c) $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{4-2x}{2}\,(3 + 4x - x^2)^{-1/2}$

(d) $\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial e^{\ln(x^x)}}{\partial x} = \frac{\partial e^{x\ln(x)}}{\partial x} = \left(\ln(x) + \frac{x}{x}\right) e^{x\ln(x)} = (\ln(x) + 1)\, x^x$

Aufgabe 3: Kurvendiskussion

Berechnen Sie die lokalen Extrema (Minimum und Maximum) der Funktion $g(x)$:

$$g(x) = x^3 - 2x^2 + 4\,.$$

Lösung der Aufgabe 3

Zuerst werden die Ableitungen bestimmt:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 3x^2 - 4x = 3x\left(x - \frac{4}{3}\right)\,, \\ g''(x) &= \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 6x - 4\,. \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für ein lokales Extrema lautet

$$g'(x_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{4}{3}, \quad x_1 = 0\,.$$

Die hinreichenden Bedingung besagt

$$\begin{aligned} &g''(x_i)\begin{cases} < 0 \text{ falls } x_i \text{ ein lokales Maximum ist}\,. \\ > 0 \text{ falls } x_i \text{ ein lokales Minimum ist}\,. \end{cases} \\ &g''(x_0) = 4 \\ &g''(x_1) = -4 \end{aligned}$$

Daher hat die Funktion $g(x)$ ein lokales Minimum am Punkt $E_1\,(4/3, 76/27)$ und ein lokales Maximum am Punkt $E_2\,(0, 4)$.

Aufgabe 4: Integrieren

(a) Bestimmen Sie die Stammfunktion (das unbestimmte Integral) $F(x)$ zu folgender Funktion:

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 5x + 1}{x}\,.$$

(b) Bestimmen Sie außerdem die folgenden bestimmten Integrale:

(i) $F = \int_1^2 dx\,\ln(x) \int_{\ln(x)}^{\infty} dy\, e^{-y}$,

(ii) $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2} dx \quad$ für $a > 0$,

(iii) $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx \quad$ für $a > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie das Gauß'sche Integral $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ für $a > 0$.

Lösung der Aufgabe 4

(a) $F(x) = \int x^3 + 2x - 5 + \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 5x + \ln(x) + C$

(b) (i)

$$\begin{aligned} F &= \int_1^2 dx \ln(x) \int_{\ln(x)}^{\infty} dy\, e^{-y} = \int_1^2 dx \ln(x) \left[-e^{-y}\right]_{\ln(x)}^{\infty} \\ &= \int_1^2 dx\, \frac{\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

Lösung durch Substitution:

$$z = \ln(x) \Rightarrow x = e^z \,,\ \frac{dx}{dz} = e^z \,,$$
$$\Rightarrow F = \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} dz\, \frac{dx}{dz} \frac{\ln(e^z)}{e^z} = \int_0^{\ln(2)} dz\ z = \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\ln(2)} = \frac{\ln(2)^2}{2}$$

(ii) Variante 1: (Kopf durch die Wand):

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{-2a}(-2ax) e^{-ax^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{-2a} \left(\frac{d}{dx} e^{-ax^2}\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2a} e^{-ax^2}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \end{aligned}$$

Variante 2: (Kurz überlegen, antisymmetrische Funktion):

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{0} x e^{-ax^2} dx + \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx \\ &= \underbrace{\int_{\infty}^{0} x e^{-ax^2} dx}_{x \to -x} + \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx \\ &= -\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx + \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = 0 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{da} e^{-ax^2}\right) dx \\ &= -\frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = -\frac{d}{da} \underbrace{\sqrt{\frac{\pi}{a}}}_{\text{Hinweis}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Lineare Algebra

Gegeben sind zwei 2×2 Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie

(a) die Differenz $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

(b) die Spur $\operatorname{tr}[\mathbf{AB} - \mathbf{BA}]$,

(c) die Inverse $\mathbf{B}^{-1}$ von $\mathbf{B}$.

Lösung der Aufgabe 5

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \\
\mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \\
\mathbf{AB} - \mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 7 & -11 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b)

$$\operatorname{tr}[\mathbf{AB} - \mathbf{BA}] = \operatorname{tr}[\mathbf{AB} - \mathbf{AB}] = 0$$

(c) Methode 1:

$$\begin{array}{lll}
\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \left.\begin{array}{r} \\ | \cdot (-4) \end{array}\right\} + \\
\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} & \left.\begin{array}{l} | : \quad 6 \\ | : (-4) \end{array}\right\} + \\
\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/6 & -2/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} & | \cdot (-1)
\end{array}$$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 2/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Methode 2:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \operatorname{adj} \mathbf{B} &= \frac{1}{-2 \cdot 1 - 4 \cdot 1} \begin{pmatrix} \det(1) & -\det(1) \\ -\det(4) & \det(-2) \end{pmatrix}^T \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$