

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum 12/03 - Geb. 30.23)

Aufgabe 1: Differentiation

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ nach x :

(a) $f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 - 5x + \ln(x) + c$

(b) $f(x) = \cos(x) + \sin(x) \tan(x)$,

(c) $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\right)$.

Aufgabe 2: Integration

(a) Bestimmen Sie die Stammfunktionen $F_i(x)$, d.h. das unbestimmte Integral, zu folgenden Funktionen

$$f_1(x) = e^{\lambda x} \sin(3x), \quad f_2(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)} .$$

Hinweis: Führen Sie bei $f_2(x)$ eine Partialbruchzerlegung durch.

(b) Bestimmen Sie außerdem die folgenden bestimmten Integrale

$$F = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad F(a, n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx \quad \text{für } a > 0 .$$

Hinweis: Verwenden Sie das Gauß'sche Integral $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ für $a > 0$.

Aufgabe 3: Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit Realteil $\operatorname{Re}(z) = x$, Imaginärteil $\operatorname{Im}(z) = y$ und $i := \sqrt{-1}$ kann äquivalent in der exponentiellen Schreibweise $z = re^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ dargestellt werden. Dabei gelten mit $r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in [0, 2\pi[$ die Relationen $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und

$$\arg(z) = \varphi = \begin{cases} \varphi' & \text{für } \varphi' \geq 0 \\ \varphi' + 2\pi & \text{für } \varphi' < 0 \end{cases}, \quad \text{mit } \varphi' = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{für } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{für } y < 0 \end{cases} .$$

(a) Geben Sie die nachfolgenden komplexen Zahlen in der kartesischen Form $z = x + iy$ und in der Polarform $z = re^{i\varphi}$ an und zeichnen Sie diese in der komplexen Zahlenebene ein:

$$z_1 = 2e^{i2\pi/3} - 1, \quad z_2 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i}, \quad z_3 = (3 + 3\sqrt{3}i)^3$$

Hinweis: Die zwei-dimensionale komplexe Zahlenebene zeigt in x -Richtung den Real- und in y -Richtung den Imaginärteil.

- (b) Veranschaulichen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die folgenden Gleichungen und Ungleichungen in der komplexen Zahlenebene:

$$z_1 z_1^* = 1, \quad |z_2 - 1| \leq 3, \quad z_3 + z_3^* \geq -1$$

Hinweis: Der Betrag im Komplexen ist $|z| = \sqrt{z z^*}$. Im Fallen von Ungleichungen ergeben sich Flächen in der komplexen Zahlenebene.

- (c) Für welche komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ ist der folgende Ausdruck rein reell?

$$A = \left(\frac{3+z}{3-z} \right)^2$$

Hinweis: Es ist die Gleichung $\text{Im}(A) = 0$ zu lösen. Dazu sollte der Nenner durch Erweitern mit dem komplex Konjugierten reell gemacht werden und dann die Polarform für z benutzt werden.

- (d) Drücken Sie mit Hilfe von $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ Sinus und Cosinus über die komplexe Exponentialfunktion aus und beweisen Sie damit $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.

Aufgabe 4: Bahnkurven

Bewegungen eines Körpers/Teilchens im Raum als Funktion der Zeit t lassen sich durch Bahnkurven $\vec{r}(t)$ darstellen. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung lassen sich als Ableitungen nach der Zeit ermitteln. Wir betrachten zwei einfache Beispiele.

- (a) Eine Bahnkurve werde beschrieben durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = (a \cos(\omega t), a \sin(\omega t), ct)^T \quad \text{mit } a, c > 0.$$

- (i) Skizzieren Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ als Funktion des eindimensionalen Parameters t .
(ii) Wie groß ist der Abstand $h = z_2 - z_1$ zweier in z -Richtung direkt übereinanderliegender Punkte $(a, 0, z_1)$ und $(a, 0, z_2)$, wobei $z_2 > z_1$?
(b) Es sei nun der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ eines Teilchens auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gegeben durch

$$\vec{r}(t) = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t), 0)^T.$$

- (i) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$.
(ii) Skizzieren Sie die Kreisbahn des Teilchens und diskutieren Sie, in welche Richtung $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ relativ zum Bahnverlauf zeigen.
(iii) Nehmen Sie nun an, das Teilchen sei ein Satellit der Masse m_s und umkreise die Erde, mit Masse M_E , in einer Entfernung r_s . Berechnen Sie dessen Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$, wobei für die Gravitationskraft gilt $\vec{F}(\vec{r}) = -G m_s M_E \vec{r} / r^3$ und G die Newton'sche Gravitationskonstante bezeichnet. *Hinweis:* Lex secunda.