Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum 12/03 - Geb. 30.23)

Aufgabe 1: Differentiation

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto f(x)$ nach x:

(a) $f(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 - 5x + \ln(x) + c$

(b) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)\tan(x)$,

(c) $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$.

Aufgabe 2: Integration

(a) Bestimmen Sie die Stammfunktionen $F_i(x)$, d.h. das unbestimmte Integral, zu folgenden Funktionen

$$f_1(x) = e^{\lambda x}\sin(3x)\,, \qquad f_2(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,.$$

Hinweis: Führen Sie bei $f_2(x)$ eine Partialbruchzerlegung durch.

(b) Bestimmen Sie außerdem die folgenden bestimmten Integrale

$$F = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,, \qquad F(a,n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx \quad \text{für } a > 0\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Gauß'sche Integral $F(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ für $a > 0$.

Aufgabe 3: Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit Realteil $\mathrm{Re}(z) = x$, Imaginärteil $\mathrm{Im}(z) = y$ und $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$ kann äquivalent in der exponentiellen Schreibweise $z = re^{\mathrm{i}\varphi} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ dargestellt werden. Dabei gelten mit $r \in \mathbb{R}^+, \varphi \in [0, 2\pi[$ die Relationen $|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}$ und

$$\arg(z) = \varphi = \begin{cases} \varphi' & \text{für } \varphi' \geq 0 \\ \varphi' + 2\pi & \text{für } \varphi' < 0 \end{cases}, \qquad \text{mit } \varphi' = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{für } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) & \text{für } y < 0 \end{cases}.$$

(a) Geben Sie die nachfolgenden komplexen Zahlen in der kartesichen Form $z = x + \mathrm{i}y$ und in der Polarform $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$ an und zeichen Sie diese in der komplexen Zahlenebene ein:

$$z_1 = 2e^{\mathrm{i}2\pi/3} - 1, \qquad z_2 = \frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1+i}, \qquad z_3 = (3 + 3\sqrt{3}\mathrm{i})^3$$

Hinweis: Die zwei-dimensionale komplexe Zahlenebene zeigt in x-Richtung den Real- und in y-Richtung den Imaginärteil.

(b) Veranschaulichen Sie für $z \in \mathbb{C}$ die folgenden Gleichungen und Ungleichungen in der komplexen Zahlenebene:

$$z_1 z_1^* = 1, \qquad |z_2 - 1| \leq 3, \qquad z_3 + z_3^* \geq -1$$

Hinweis: Der Betrag im Komplexen ist $|z| = \sqrt{zz^*}$. Im Fallen von Ungleichungen ergeben sich Flächen in der komplexen Zahlenebene.

(c) Für welche komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ ist der folgende Ausdruck rein reell?

$$A = \left(\frac{3+z}{3-z}\right)^2$$

Hinweis: Es ist die Gleichung $\mathrm{Im}(A) = 0$ zu lösen. Dazu sollte der Nenner durch Erweitern mit dem komplex Konjugierten reell gemacht werden und dann die Polarform für z benutzt werden.

(d) Drücken Sie mit Hilfe von $e^{\pm \mathrm{i}x} = \cos x \pm \mathrm{i} \sin x$ Sinus und Cosinus über die komplexe Exponentialfunktion aus und beweisen Sie damit $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.

Aufgabe 4: Bahnkurven

Bewegungen eines Körpers/Teilchens im Raum als Funktion der Zeit t lassen sich durch Bahnkurven $\vec{r}(t)$ darstellen. Die Geschwindigkeit und Beschleunigung lassen sich als Ableitungen nach der Zeit ermitteln. Wir betrachten zwei einfache Beispiele.

(a) Eine Bahnkurve werde beschrieben durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \big(a\cos(\omega t), a\sin(\omega t), ct\big)^T \quad \text{mit } a, c > 0\,.$$

(i) Skizzieren Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ als Funktion des eindimensionalen Parameters t.

(ii) Wie groß ist der Abstand $h = z_2 - z_1$ zweier in z–Richtung direkt übereinanderliegender Punkte $(a, 0, z_1)$ und $(a, 0, z_2)$, wobei $z_2 > z_1$?

(b) Es sei nun der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ eines Teilchens auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \big(r\cos(\omega t), r\sin(\omega t), 0\big)^T\,.$$

(i) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ und den Beschleunigunsvektor $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$.

(ii) Skizzieren Sie die Kreisbahn des Teilchens und diskutieren Sie, in welche Richtung $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ relativ zum Bahnverlauf zeigen.

(iii) Nehmen Sie nun an, das Teilchen sei ein Satellit der Masse m_s und umkreise die Erde, mit Masse M_E, in einer Entfernung r_s. Berechnen Sie dessen Geschwindigkeit $v = |\vec{v}|$, wobei für die Gravitationskraft gilt $\vec{F}(\vec{r}) = -Gm_sM_E\vec{r}/r^3$ und G die Newton'sche Gravitationskonstante bezeichnet. *Hinweis:* Lex secunda.