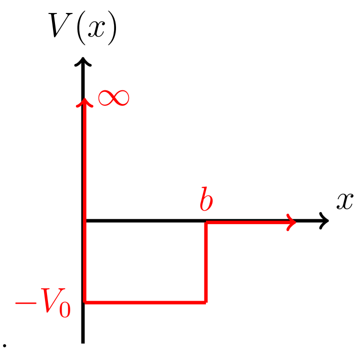
Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum 12/03 - Geb. 30.23)
Marvin Müller (marvin.mueller2@student.kit.edu) (Raum 10/02 - Geb. 30.23)

Aufgabe 1: Gebundene Zustände - Potentialtopf

Betrachten Sie ein im eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad x < 0 \\ -V_0 < 0 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{für} \quad x > b \end{cases}$$



gebundenes Teilchen der Masse m und Energie $-V_0 < E < 0$.
Benutzen Sie die folgenden Abkürzungen

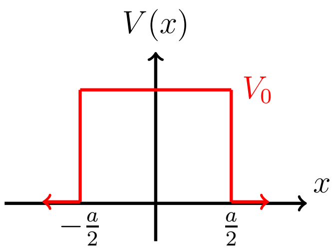
$$k_0 = \sqrt{2mV_0/\hbar^2}, \qquad \rho = \sqrt{-2mE/\hbar^2} \qquad \text{und} \quad K = \sqrt{k_0^2 - \rho^2} \quad .$$

(a) Geben Sie die allgemeine Form der Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung für die drei Bereiche $x < 0$, $0 \leq x \leq b$, $x > b$ an.

(b) Formulieren Sie die Anschlussbedingungen bei $x = 0$ und $x = b$. Zeigen Sie insbesondere, dass die Anschlussbedingungen bei $x = b$ auf die Gleichung $\tan(Kb) = -K/\rho$ führen.

(c) Untersuchen Sie die Anzahl der gebundenen Zustände für festes b in Abhängigkeit der Potentialtiefe. Zeigen Sie, dass es bei hinreichend flachem Potential keinen gebundenen Zustand gibt.
Hinweis: Offenbar muss $\tan(Kb) < 0$ gelten. Schreiben Sie die Gleichung zudem in $|\sin(Kb)| = K/k_0$ um und lösen Sie die Problematik zuerst graphisch.

Aufgabe 2: Streuung am Potentialwall - Tunneleffekt



Betrachten Sie die Streuung eines freien, von links einlaufenden Teilchens $\propto e^{ik(x-vt)}$ mit $v = \omega/k > 0$ an einem Potentialwall ($V_0 > 0$)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |x| \geq \frac{a}{2} \\ V_0 & \text{für} \quad |x| < \frac{a}{2} \end{cases}$$

Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung und bestimmen Sie die Energieeigenwerte für den Fall $0 < E < V_0$ in folgenden Schritten:

(a) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion folgende Form hat

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & \text{für} \quad x \leq -\frac{a}{2} \\ Ae^{qx} + Be^{-qx} & \text{für} \quad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ Te^{ikx} & \text{für} \quad x \geq \frac{a}{2} \end{cases} \qquad \text{mit} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

mit dem Reflexionskoeffizient R und dem Transmissionskoeffizient T.

(b) Formulieren Sie die Anschlussbedingungen, welche auf folgendes Gleichungssystem führen:

$$\begin{pmatrix} (1-i\frac{q}{k})e^{-qa/2} & (1+i\frac{q}{k})e^{qa/2} \\ (1+i\frac{q}{k})e^{qa/2} & (1-i\frac{q}{k})e^{-qa/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-ika/2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie das Gleichungssystem und ermitteln Sie A und B.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe von A und B aus den Anschlussbedingungen den Reflexions- R und Transmissionskoeffizient T. Welche Eigenschaft steht im Widerspruch zum klassischen Verhalten?

Aufgabe 3: Eigenwertgleichung - Impulsoperator und Impulseigenzustände

Betrachten Sie ein quantenmechanisches Teilchen, welches sich frei entlang einer Raumrichtung der Länge $2L$ zwischen $-L$ und L bewegen kann. Wir zeigen, dass die Einschränkung des Ortes auf ein diskretes Impulsspektrum führt, indem wir die Eigenwertgleichung des Impulsoperators näher betrachten.

(a) Unter welchen Randbedingungen an die Ortsraumwellenfunktion ist der Impulsoperator $\hat{p}$ im Ortsraum hermitesch?
Hinweis: Schreiben Sie $\langle \hat{p} \rangle = \int_{-L}^{L} dx \psi^* \frac{\hbar}{i} \partial_x \psi$ und integrieren Sie partiell.

(b) Betrachten Sie nun die Eigenwertgleichung für den Impulsoperator $\hat{p}\psi(x) = p\psi(x)$ im Ortsraum. Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der in (a) gefundenen Randbedingungen das Eigenwertspektrum und die normierten Eigenfunktionen $\psi_p(x)$.
Hinweis: Die Randbedingungen aus (a) führen auf $|\psi_p(L)|^2 = |\psi_p(-L)|^2$, wobei $\psi_p(x)$ die Wellenfunktion im Ortsraum darstellt. Sie sollten $\psi_p^n(x) = Ne^{i/\hbar p_n x}$ mit $p_n = \frac{n\pi\hbar}{L}, n \in \mathbb{Z}$ erhalten.