

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum 12/03 - Geb. 30.23)

Lukas Fritz (lukas.fritz@student.kit.edu) (Raum 12/12 - Geb. 30.23)

### Aufgabe 1: Dirac-Notation

Wir möchten in dieser Aufgabe vertrauter mit der Bra-Ket oder auch Dirac-Notation von Zuständen im Hilbert-Raum werden. Beachten Sie, dass die drei Teilaufgaben linear unabhängig sind und die Rechnungen kurz sind.

- (a) In einem komplexen Hilbert-Raum sei durch  $\hat{T} := |u\rangle\langle u|$  mit  $|u\rangle \neq 0$  ein linearer Operator definiert. Wann ist  $\hat{T}$  hermitesch? Welche Eigenschaft muss  $|u\rangle$  haben, damit  $\hat{T}$  ein Projektionsoperator ist?

*Hinweis:* Der zu  $\hat{T}$  adjungierte Operator  $\hat{T}^\dagger$  ist definiert durch  $(\langle\psi|T|\varphi\rangle)^* = \langle\varphi|T^\dagger|\psi\rangle$ . Selbstdjungiertheit/Hermitizität bedeutet  $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$  (in Analogie zur linearen Algebra).  $\hat{T}$  ist ein Projektionsoperator, wenn es sich um einen hermiteschen Operator mit der zusätzlichen Eigenschaft  $\hat{T}^2 = \hat{T}$  handelt.

- (b) Zeigen Sie: Besitzt ein linearer Operator  $\hat{A}$  die Eigenschaft  $\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$  und ist  $|a\rangle$  mit  $\langle a|a\rangle = 1$  ein Eigenvektor von  $\hat{A}$  zum Eigenwert  $a$ , so ist  $|a\rangle$  auch Eigenvektor von  $\hat{A}^\dagger$  zum Eigenwert  $a^*$ .

*Hinweis:* Ein Operator, welcher mit seinem Adjungierten vertauscht, heißt Normaloperator und besitzt stets ein vollständiges System orthogonaler Eigenvektoren.

- (c) In einem zweidimensionalen komplexen Hilbert-Raum mit Orthonormalbasis  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  sei ein linearer Operator  $\hat{A}$  durch  $\hat{A}|1\rangle = -|2\rangle$  und  $\hat{A}|2\rangle = |1\rangle$  definiert. Schreiben Sie  $\hat{A}$  als Linearkombination von Ket-Bra-Ausdrücken. Ist  $\hat{A}$  Normaloperator? Ist  $\hat{A}$  hermitesch? Ist  $\hat{A}$  unitär? Existiert  $\hat{A}^{-1}$ ?

### Aufgabe 2: Eigenvektoren und Eigenwerte eines Operators

Die Vektoren  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$  seien eine Orthonormalbasis eines zweidimensionalen Vektorraumes. Gegeben sei der Operator

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dargestellt in der Basis} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a|1\rangle + b|2\rangle.$$

- (a) Ist  $\hat{\sigma}_y$  hermitesch? Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren  $|x_i\rangle$  bezüglich der angegebenen Basis.
- (b) Prüfen Sie die Orthogonalität und Vollständigkeit der Eigenvektoren in der Darstellung der Orthonormalbasis. Drücken Sie den Projektionsoperator  $\hat{P} = \sum_i |x_i\rangle\langle x_i|$  durch die Orthonormalbasis aus und wenden Sie diesen auf die Eigenvektoren  $|x_i\rangle$  an.

### Aufgabe 3: Der quantenmechanische Oszillator

Der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2.$$

Man führt in Analogie zur kanonischen Transformation auf Blatt 6, Aufgabe 2 die Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right) \quad \text{und} \quad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right)$$

ein, die gemäß der Vorlesung Energiequanten erzeugen und vernichten.

- Rekapitulieren Sie mit Hilfe der Vorlesung die Form des Hamilton-Operators ausgedrückt durch  $\hat{a}$  und  $\hat{a}^\dagger$ . Wie lauten die Energieeigenwerte  $E_n$  des harmonischen Oszillators?
- Betrachten Sie nun die Ortsdarstellung, in der der Impulsoperator  $\hat{p}$  der bekannte Differentialoperator ist. Bestimmen die Grundzustandswellenfunktion  $\psi_0(x)$ , indem Sie ausnutzen, dass  $\hat{a}\psi_0(x) = 0$  gilt.
- Bestimmen Sie die Wellenfunktion des ersten angeregten Zustands mit Hilfe von  $\hat{a}^\dagger$ .
- Bestimmen sie die Orts- und Impulsunschärfe des Grundzustands, definiert durch

$$\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2} \quad \text{und} \quad \Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$$

und zeigen Sie, dass die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt ist.

*Hinweis:* Der Erwartungswert  $\langle \hat{O} \rangle$  im Zustand  $|\psi\rangle$  ist gegeben durch  $\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle$ .

- Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich das Teilchen im Zustand  $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ , wobei  $|n\rangle$  der Eigenzustand zu Eigenwert  $n$  ist. Bestimmen Sie  $\langle \hat{x} \rangle$  zu beliebigen Zeiten. Zeigen sie explizit, dass das Ehrenfest-Theorem ( $\langle \hat{p} \rangle = m \frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle$ ) gilt.

*Hinweis:* Die Zeitentwicklung eines Zustands mit der Zerlegung  $|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$  ist gemäß der Vorlesung gegeben durch

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |n\rangle.$$