Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum 12/03 - Geb. 30.23)
Lukas Fritz (lukas.fritz@student.kit.edu) (Raum 12/12 - Geb. 30.23)

Aufgabe 1: Dirac-Notation

Wir möchten in dieser Aufgabe vertrauter mit der Bra-Ket oder auch Dirac-Notation von Zuständen im Hilbert-Raum werden. Beachten Sie, dass die drei Teilaufgaben linear unabhängig sind und die Rechnungen kurz sind.

(a) In einem komplexen Hilbert-Raum sei durch $\hat{T} := |u\rangle \langle u|$ mit $|u\rangle \neq 0$ ein linearer Operator definiert. Wann ist $\hat{T}$ hermitesch? Welche Eigenschaft muss $|u\rangle$ haben, damit $\hat{T}$ ein Projektionsoperator ist?
Hinweis: Der zu $\hat{T}$ adjungierte Operator $\hat{T}^\dagger$ ist definiert durch $(\langle\psi| T |\varphi\rangle)^* = \langle\varphi| T^\dagger |\psi\rangle$. Selbstadjungiertheit/Hermitizität bedeutet $\hat{T}^\dagger = \hat{T}$ (in Analogie zur linearen Algebra). $\hat{T}$ ist ein Projektionsoperator, wenn es sich um einen hermiteschen Operator mit der zusätzlichen Eigenschaft $\hat{T}^2 = \hat{T}$ handelt.

(b) Zeigen Sie: Besitzt ein linearer Operator $\hat{A}$ die Eigenschaft $\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$ und ist $|a\rangle$ mit $\langle a|a\rangle = 1$ ein Eigenvektor von $\hat{A}$ zum Eigenwert a, so ist $|a\rangle$ auch Eigenvektor von $\hat{A}^\dagger$ zum Eigenwert a^*.
Hinweis: Ein Operator, welcher mit seinem Adjungierten vertauscht, heißt Normaloperator und besitzt stets ein vollständiges System orthogonaler Eigenvektoren.

(c) In einem zweidimensionalen komplexen Hilbert-Raum mit Orthonormalbasis $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ sei ein linearer Operator $\hat{A}$ durch $\hat{A}|1\rangle = -|2\rangle$ und $\hat{A}|2\rangle = |1\rangle$ definiert. Schreiben Sie $\hat{A}$ als Linearkombination von Ket-Bra-Ausdrücken. Ist $\hat{A}$ Normaloperator? Ist $\hat{A}$ hermitesch? Ist $\hat{A}$ unitär? Existiert $\hat{A}^{-1}$?

Aufgabe 2: Eigenvektoren und Eigenwerte eines Operators

Die Vektoren $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ seien eine Orthonormalbasis eines zweidimensionalen Vektorraumes. Gegeben sei der Operator

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dargestellt in der Basis} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a|1\rangle + b|2\rangle \ .$$

(a) Ist $\hat{\sigma}_y$ hermitesch? Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren $|x_i\rangle$ bezüglich der angegebenen Basis.

(b) Prüfen Sie die Orthogonalität und Vollständigkeit der Eigenvektoren in der Darstellung der Orthonormalbasis. Drücken Sie den Projektionsoperator $\hat{P} = \sum_i |x_i\rangle \langle x_i|$ durch die Orthonormalbasis aus und wenden Sie diesen auf die Eigenvektoren $|x_i\rangle$ an.

Aufgabe 3: Der quantenmechanische Oszillator

Der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \,.$$

Man führt in Analogie zur kanonischen Transformation auf Blatt 6, Aufgabe 2 die Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right) \quad \text{und} \quad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$

ein, die gemäß der Vorlesung Energiequanten erzeugen und vernichten.

(a) Rekapitulieren Sie mit Hilfe der Vorlesung die Form des Hamilton-Operators ausgedrückt durch $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$. Wie lauten die Energieeigenwerte E_n des harmonischen Oszillators?

(b) Betrachten Sie nun die Ortsdarstellung, in der der Impulsoperator $\hat{p}$ der bekannte Differentialoperator ist. Bestimmen die Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(x)$, indem Sie ausnutzen, dass $\hat{a}\psi_0(x) = 0$ gilt.

(c) Bestimmen Sie die Wellenfunktion des ersten angeregten Zustands mit Hilfe von $\hat{a}^\dagger$.

(d) Bestimmen sie die Orts- und Impulsunschärfe des Grundzustands, definiert durch

$$\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2} \quad \text{und} \quad \Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$$

und zeigen Sie, dass die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllt ist.
Hinweis: Der Erwartungswert $\left\langle \hat{O} \right\rangle$ im Zustand $|\psi\rangle$ ist gegeben durch $\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle$.

(e) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Teilchen im Zustand $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$, wobei $|n\rangle$ der Eigenzustand zu Eigenwert n ist. Bestimmen Sie $\langle \hat{x} \rangle$ zu beliebigen Zeiten. Zeigen sie explizit, dass das Ehrenfest-Theorem ($\langle \hat{p} \rangle = m\frac{d}{dt}\langle \hat{x} \rangle$) gilt.
Hinweis: Die Zeitentwicklung eines Zustands mit der Zerlegung $|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$ ist gemäß der Vorlesung gegeben durch

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} |n\rangle \,.$$

Wir hoffen Sie haben aus der Veranstaltung etwas mitgenommen,
wünschen viel Erfolg bei den Klausuren
und ein erfolgreiches weiteres Studium!