Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum 12/03 - Geb. 30.23)

Aufgabe 1: Lösen von Bewegungsgleichungen - Integration

Betrachten Sie den Wurf eines Balles mit der Masse m im konstanten Gravitationsfeld, d.h. eine Bewegung $\vec{r}(t)$ beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F} = -mg\vec{e}_z$$

mit den Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = (0,0,0)^T$ und $\vec{v}(0) = (v\cos\alpha, 0, v\sin\alpha)^T$, wobei α den anfänglichen Wurfwinkel zum Erdboden bezeichnet und $g \approx 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ die Erdbeschleunigung ist, die in negative z-Richtung wirkt.

(a) Bestimmen Sie die Form der Bahnkurve, indem Sie die Bewegungsgleichung unter Benutzung der Anfangsbedingungen integrieren, und berechnen Sie dadurch $\vec{r}(t)$. Gehen Sie komponentenweise vor. Welche Form haben $x(t)$ und $z(t)$? Drücken Sie zuletzt z in Abhängigkeit von x aus. Welcher Form entspricht $z(x)$?

(b) Bei welchem anfänglichen Winkel $\alpha_{\max}$ erreicht man die maximale Wurfdistanz $x_{\max}$? *Hinweis*: Hierfür muss zunächst die Zeit t_{fin} berechnet werden, wobei $z(t_{\mathrm{fin}}) = 0$, welche eingesetzt in $x(t)$ eine Gleichung für $x(\alpha)$ ergibt. Für ein bestimmtes $\alpha_{\max}$ erreicht $x(\alpha)$ ein Maximum $x_{\max}$.

Aufgabe 2: Lösen von Bewegungsgleichnungen - Exponentialansatz

Der eindimensionale harmonische Oszillator, ohne Reibung und ohne Berücksichtigung der Gravitationskraft, ist durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben

$$m\ddot{x}(t) = F(x) = -kx(t) \quad\Longrightarrow\quad m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0\,, \tag{1}$$

wobei $x(t)$ die zeitabhängige Auslenkung, m die Masse und $F(x) = -kx$ die lineare Rückstellkraft bezeichnen. Die Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$ seien durch $x(0) = x_0$ (Anfangsauslenkung) und $\dot{x}(0) = v_0$ (Anfangsgeschwindigkeit) gegeben. Wir möchten die Lösung $x(t > 0)$ für dieses Anfangswertproblem durch einen Exponentialansatz ermitteln.

(a) Benutzen Sie den Ansatz $x_A(t) = c_\lambda e^{\lambda t}$: Durch Einsetzen in Gleichung (1) ergibt sich eine quadratische Gleichung und zwei Lösungen für λ, $\lambda_1(k,m)$ und $\lambda_2(k,m)$, welche zwei Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ bedingen. Deren lineare Superposition $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ führt dann zur allgemeinen Lösung.

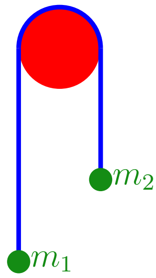
(b) Um die Parameter c_{λ_1} und c_{λ_2} zu bestimmen, setzen Sie nun die Anfangsbedingungen für $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = v_0$ ein.

(c) Verwenden Sie $\frac{k}{m} = \omega^2$, um die Ausdrücke $x(t)$ und $v(t)$ weiter zu vereinfachen. *Hinweis:* Nutzen Sie die Identitäten $\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right)$ und $\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}\right)$.

(d) Formulieren Sie nun die Energie $E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen x_0 und v_0.

Aufgabe 3: Bewegungsgleichungen durch Lagrange - Atwood'sche Fallmaschine

Im dreidimensionalen Raum im Schwerefeld der Erde mit Beschleunigung g ist im Ursprung eine frei drehbare Rolle befestigt. Über diese läuft eine Schnur mit fester Länge l, die zwei Massen m_1 an Position z_1 und m_2 an Position z_2 verbindet, die sich in nur z-Richtung frei bewegen können. Somit können Sie die x- und y-Richtung vernachlässigen.



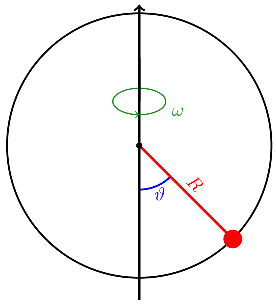
(a) Welche Zwangsbedingungen gibt es? Finden Sie passende generalisierte Koordinaten für die verbleibenden Freiheitsgrade.

(b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf, indem Sie zuvor folgende Schritte ausführen:
  (i) Beginnen Sie mit dem Potential V des Gesamtsystems (beide Massen). Das Potential einer Masse m im Schwerefeld ist gegeben durch $V = mgz$.
  (ii) Berechnen Sie nun die kinetische Gesamtenergie T des Systems.

(c) Bestimmen Sie nun die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen.

Aufgabe 4: Bewegungsgleichungen durch Lagrange - Perle auf Drahtring

Eine Perle mit Masse m kann reibungsfrei auf einem Drahtring mit Radius R rotieren. Der Ring wiederum rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um seinen Durchmesser im Schwerefeld der Erde, siehe nebenstehende Skizze.



(a) Formulieren Sie die Zwangsbedingungen und zeigen Sie, dass diese durch die Parametrisierung

$$x = R\sin\vartheta\cos\omega t, \qquad y = R\sin\vartheta\sin\omega t, \qquad z = R\cos\vartheta$$

erfüllt sind. Identifizieren Sie die generalisierte Koordinate.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen auf.
Hinweis: Es ist $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ und V gemäß vorheriger Aufgabe 3.

(c) Integrieren Sie die Bewegungsgleichung für $\vartheta \ll 1$.
Hinweis: Entwickeln Sie in ϑ bis zur ersten nicht verschwindenden Ordnung.