Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum 12/03 - Geb. 30.23)

## Aufgabe 1: Variationsrechnung - Kürzester Weg auf Zylindermantel

Wie in der Vorlesung motiviert ist die Langrange-Mechanik eng verknüpft mit dem Variationsprinzip, welches erlaubt für viele mathematische Problemstellungen extremale Lösungen zu ermitteln. In der Vorlesung war dies z.B. die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Wir wiederholen diese Aufgabe auf einem Zylindermantel, um gleichzeitig verschiedene Koordinatensysteme kennenzulernen.

(a) Nutzen Sie Zylinderkoordinaten in der Form $\vec{r} = (x, y, z)^T = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)^T$ und drücken Sie ein Wegelement $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ durch Zylinderkoordinaten aus. Zeigen Sie so, dass der Weg zwischen den Punkten $A$ und $B$ gegeben ist durch

$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{R^2\varphi'(z)^2 + 1} dz\,.$$

*Hinweis:* Sie brauchen Elemente der in der Übung schonmal angesprochenen Jacobi-Matrix. Der Radius $R$ sei konstant. Somit ist $dR = 0$.

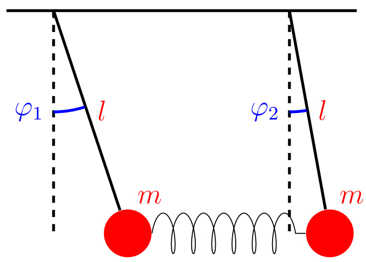
(b) Finden Sie den minimalen Weg $S$. Nutzen Sie für den Integranden die Euler-Lagrange-Gleichungen und zeigen Sie, dass dies auf eine Gerade auf dem (ausgerollten) Zylindermantel führt.

## Aufgabe 2: Langrange-Gleichungen 2. Art - Gekoppeltes Pendel

Wir verbleiben noch bei den Lagrange-Gleichungen 2. Art. Betrachten Sie zwei durch eine Feder gekoppelte Pendel gleicher Länge $l$ und Masse $m$, siehe nachfolgende Skizze.

(a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t)$ und die zugehörigen Bewegungsgleichungen, wobei sich hierbei ein Gleichungssystem zweier gekoppelter Gleichungen ergibt. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Stellen Sie zunächst eine Gleichung für $\mathcal{L}(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, t)$ auf. Überlegen Sie sich, dass die kinetische Energie eines einzelnen Pendels durch $T_i = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}_i^2$ gegeben ist, und wir ein Koordinatensystem derart wählen können, dass die potentielle Energie eines einzelnen Pendels durch $V_i = -mgl\cos(\varphi_i)$ gegeben ist. Im Ausdruck für die gesamte potentielle Energie tritt noch ein zusätzlicher Term auf, welcher von der gegenseitigen Kopplung durch die Feder herrührt und gegeben ist durch $\frac{1}{2}kl^2(\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2))^2$, wobei $k$ die Kopplungskonstane der Feder bezeichnet.

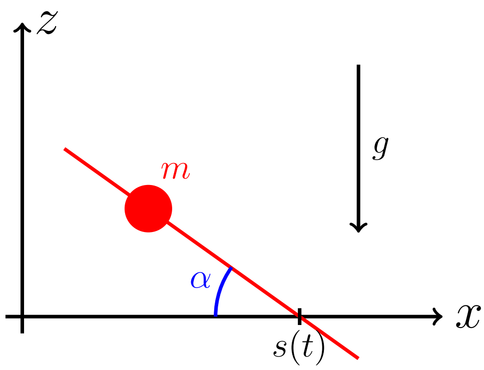



(ii) Nutzen Sie die Taylor-Näherungen zweiter Ordnung von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für kleine $x$ und setzen Sie dann die Euler-Lagrange-Gleichungen bezüglich der Koordinatensätze $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ und $(\varphi_2, \dot{\varphi}_2)$ an.

(b) Führen Sie entsprechende Koordinaten $\Phi_1, \Phi_2$ ein, welche eine Linearkombination von $\varphi_1$ und $\varphi_2$ darstellen, um das Gleichungssystem zu entkoppeln. Diskutieren Sie die zugehörigen Schwingungszustände für die unterschiedlichen Fälle der Gleichschwingung ($\varphi_2 = \varphi_1$) und der Gegenschwingung ($\varphi_2 = -\varphi_1$). *Hinweis:* Um auf die linear unabhängigen Koordinaten $\Phi_1, \Phi_2$ zu kommen, subtrahieren Sie die zwei Gleichungen einmal voneinander bzw. addieren Sie einmal zueinander. Dies entkoppelt die Gleichungen. Was sind die daraus resultierenen Koordinaten, in Abhängigkeit der Winkel $\varphi_1$ und $\varphi_2$, welche nun jeweils eine der entkoppelten Gleichungen lösen?

**Aufgabe 3: Lagrange-Gleichungen 1. Art - Beschleunigte schiefe Ebene**

Bisher haben wir uns mit Lagrange-Gleichungen 2. Art beschäftigt, bei denen Zwangsbedingungen vollständig in einen verminderten Satz von generalisierten Koordinaten absorbiert werden konnten. Hier nun beschäftigen wir uns mit Zwangskräften, die wir explizit über die Lagrange-Gleichungen 1. Art berücksichtigen wollen. Ein Massepunkt mit den Koordinaten $(x, z)$ gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene, die in $x$-Richtung mit der konstanten Beschleunigung $a$ beschleunigt wird, $s(t) = at^2/2$. Die Neigung $\alpha$ der schiefen Ebene ist konstant.




(a) Stellen sie die Zwangsbedingung $A(x, z, t) = 0$ auf, indem Sie die $x$-Koordinate und die $z$-Koordinate des Massepunktes in Relation setzen. Nutzen Sie hierfür das rechtwinklige Dreieck, deren Hypotenuse die Strecke zwischen Massepunkt und $s(t)$ ist.
*Hinweis:* Sie sollten $A(x, z, t) = (x(t) - \frac{1}{2}at^2) \sin\alpha + z(t) \cos\alpha$ erhalten.

(b) Berechnen Sie nun die Zwangskräfte $Z_x(x, z, t)$ und $Z_z(x, z, t)$ mittels

$$Z_x(x, z, t) = \lambda \cdot \frac{\partial A(x, z, t)}{\partial x}, \qquad Z_z(x, z, t) = \lambda \cdot \frac{\partial A(x, z, t)}{\partial z}\,.$$

(c) Stellen Sie nun die Lagrange-Gleichungen 1.Art für den Massepunkt auf, komponentenweise in $x$- und $z$-Richtung. Nehmen Sie dabei an, dass die Schwerkraft $F = -mg$ in $z$-Richtung auf die Masse wirkt. Letztere können Sie ebenfalls explizit als Kraft in den Gleichungen ergänzen. Um $\lambda$ zu bestimmen, differenzieren Sie die Zwangsbedinung $A(x, z, t)$ zweimal nach der Zeit, erhalten Sie so eine Beziehung zwischen $\ddot{x}(t)$ und $\ddot{z}(t)$ und setzen Sie diese dann in die vorher bestimmte Bewegungsgleichung ein.

(d) Lösen Sie nun die Bewegungsgleichungen. Integrieren Sie zuerst die $x(t)$-Komponente unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ und verwenden Sie dann die Zwangsbedingung um $z(t)$ zu bestimmen.

(e) Aufgrund der Form der Zwangsbedingung erlaubt diese auch beispielsweise $z(t)$ zu eliminieren und $x(t)$ als generalisierte Koordinaten zu benutzen. Verwenden Sie die Lagrange-Gleichungen 2. Art für $x(t)$ und bestätigen Sie damit die Bewegunsgleichung für $x(t)$ aus Teilaufgabe (c).