Karlsruhe Institute of Technology

Sommersemester 2018
Moderne Physik für Informatiker

PD Dr. S. Gieseke, Dr. S. Liebler

Blatt 4
Ausgabe: Di, 15.05.18
Besprechung: Di, 22.05.18

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum 12/03 - Geb. 30.23)

Hinweis zu den Klausuren:
Die Termine beider Klausuren stehen fest: Die erste Klausur findet am Mo, 30.07.18 im Zeitraum 14-17 Uhr im Gaede-Hörsaal statt. Eine zweite Klausur wird am Do, 04.10.18 im Zeitraum 14-17 Uhr im Gaede-Hörsaal angeboten. Die Anmeldung zur ersten Klausur wird im Juli und zur zweiten Klausur im September über CAMPUS online erfolgen. Die genauen Zeiträume zur Anmeldung werden später kommuniziert.

Aufgabe 1: Erhaltungsgrößen - Bewegung im kugelsymmetrischen Potential

Die Bewegung eines Teilchens in einem kugelsymmetrischen Potential V soll mittels Kugelkoordinaten $(r,\, \vartheta,\, \varphi)$ beschrieben werden. Diese sind gegeben durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} .$$

Diese Notation haben wir auch schon in Aufgabe 4 auf Blatt 2 verwendet (wenngleich mit $\varphi = \omega t$). Die Parameter bewegen sich in folgenden Bereichen: $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi[$, $\vartheta \in [0, \pi]$.

(a) Ermitteln Sie zunächst die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$ des Teilchens in Kugelkoordinaten. Führen Sie die folgende Schritte aus:

  (i) Bestimmen Sie die Richtungsvektoren $\vec{r}_{q_i}$ für die Kugelkoordinaten $q_i = (r, \vartheta, \varphi)$ mittels $\vec{r}_{q_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ und bilden Sie die normierten Einheitsvektoren $\vec{e}_{q_i} = \frac{\vec{r}_{q_i}}{|\vec{r}_{q_i}|}$.

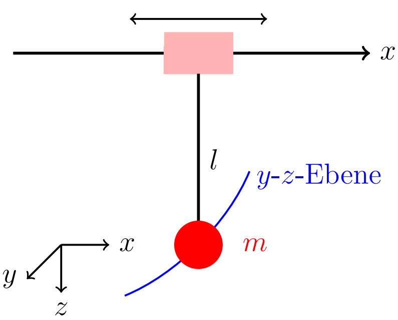
  (ii) Zeigen Sie, dass Sie $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dq_i}{dt}\frac{d\vec{r}}{dq_i}$ mit Hilfe der Einheitsvektoren schreiben können als
  $$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta + r\sin(\vartheta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi\,.$$

  (iii) Berechnen Sie nun die kinetische Energie T in Kugelkoordinaten. Sie können hierbei die Orthonormalität der Einheitsvektoren nutzen.

(b) Bilden Sie die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ für ein Teilchen mit Masse m im kugelsymmetrischen Potential $V = V(r, t)$. Welche Koordinate $q_i = (r, \vartheta, \varphi)$ ist zyklisch? Ermitteln Sie den dazugehörigen zeitlich konst. verallgemeinerten Impuls $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$.

Aufgabe 2: Erhaltungsgrößen - Bewegliches Pendel

Eine Masse m hängt von einem kleinen Zylinder herunter, welcher sich frei und ohne Reibung in der horizontalen x-Richtung bewegen kann. Die Länge des Stabes sei konstant gleich l. Das Pendel habe dabei die Möglichkeit nur in der y-z-Ebene zu schwingen.

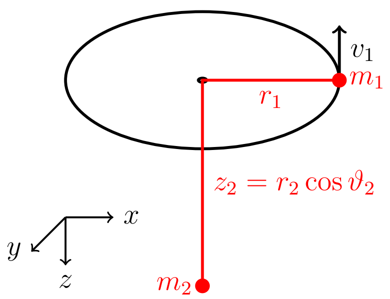


(a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\varphi, x, \dot{\varphi}, \dot{x}, t)$ und die zugehörigen Bewegungsgleichungen. *Hinweis:* Sie benötigen die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$ sowie die potentielle Energie $V = -mgz$. Als Koordinantensystem empfiehlt sich $\vec{r} = (x, y, z)^T = (x, l\sin\varphi, l\cos\varphi)^T$, also Polarkoordinaten in der y-z-Ebene. Wenden Sie die Euler-Lagrange-Gleichung nun jeweils für die Koordinatensätze $(x, \dot{x})$ und $(\varphi, \dot{\varphi})$ an. Dies führt auf zwei unabhängige Bewegungsgleichungen für die unabhängigen Koordinaten.

(b) Bestimmen Sie weiter die Erhaltungssätze, welche man mit Hilfe der zyklischen Koordinaten finden kann.

Aufgabe 3: Erhaltungsgrößen - Rotation in der Ebene

Betrachten Sie zwei Massen m_1 und m_2 im konstanten Gravitationsfeld $\vec{F} = mg\vec{e}_z$, welche durch einen dünnen Faden der Länge l aneinander gebunden sind. Die Masse m_1 befindet sich dabei auf einer Ebene ($z =$const.), die Masse m_2 hängt frei von dieser Ebene herab. Benutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung, um die Bewegungsgleichungen der beide Massen aufzustellen.



(a) Treffen Sie zunächst eine Aussage über die Erhaltungsgrößen des Problems.
   (i) Die kartesischen Koordinaten $(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2)$ sind nicht geeignet, da es komplizierte Abhängigkeiten gibt. Man führt daher
   ebene Polarkoordinaten $(x_1 = r_1\cos\varphi_1, y_1 = r_1\sin\varphi_1, z_1)$ für m_1 und
   Kugelkoordinaten $(x_2 = r_2\cos\varphi_2\sin\vartheta_2, y_2 = r_2\sin\varphi_2\sin\vartheta_2, z_2 = r_2\cos\vartheta_2)$ für m_2 ein. Wie lauten die Zwangsbedingungen in den Koordinaten $(r_1, \varphi_1, z_1; r_2, \varphi_2, \vartheta_2)$? *Hinweis:* Vernachlässigen Sie mögliche Torsionseffekte des Fadens.
   (ii) Überlegen Sie sich nun die kinetische und die potentielle Energie für m_1 in den ebenen Polarkoordinaten. Bedenken Sie dabei, dass $z_1 =$const. und als Koordinatenursprung für die z-Richtung gewählt werden kann.
   (iii) Die kinetische und die potentielle Energie von m_2 sind gegeben als $T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\vartheta}_2^2 + r_2^2\dot{\varphi}_2^2\sin^2\vartheta_2)$ bzw. $V_2 = -m_2 g r_2\cos\vartheta_2$. Nun können Sie die Lagrange-Funktion aufschreiben. Was sind die zyklischen Koordinaten und welche Erhaltungsgrößen resultieren daraus?

(b) Setzen Sie nun $\varphi_2 = \vartheta_2 = 0$, d.h. die Masse m_2 sei dahingehend eingeschränkt, dass sie sich nur noch in der z-Richtung bewegen kann. Wenden Sie auf die daraus resultierende Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ die Euler-Lagrange-Gleichung an. *Hinweis:* Mit dieser Einschränkung ist $\mathcal{L}$ nur noch von zwei freien Koordinatensätzen $(r_1, \dot{r}_1)$ und $(\varphi_1, \dot{\varphi}_1)$ abhängig. Bedenken Sie, dass es zwischen r_1 und r_2 eine Beziehung gibt.

(c) Sie haben nun zwei Euler-Lagrange-Gleichungen für r_1 und φ_1, wobei letztere Koordinate zyklisch ist. Sie können daher die beiden Gleichungen entkoppeln, indem Sie in der Gleichung für r_1 den Betrag des konstanten Drehimpulses $L_1 = m_1 r_1^2\dot{\varphi}_1$ anstelle von $\dot{\varphi}_1$ einsetzen. Überlegen Sie sich wie die Bewegung von m_1 bei gegebenener Anfangsgeschwindigkeit v_1 und daher konstantem L_1 aussieht, ohne die Bewegungsgleichung von r_1 explizit zu lösen, d.h. nur durch Betrachtung des Vorzeichens von $\ddot{r}_1$ als Funktion von r_1.