Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum 12/03 - Geb. 30.23)

Aufgabe 1: Erhaltungsgrößen - Zweikörperproblem

Die Lagrange-Funktion eines Zweikörperproblems ist gegeben durch

$$\mathcal{L}(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1; \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - V\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right) .$$

Hierbei ist das Potential V nur eine Funktion des Abstandes der beiden Körper.

(a) Nun werden die folgenden generalisierten Koordinaten

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 , \qquad \vec{R} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 \qquad \text{mit} \qquad M = m_1 + m_2$$

eingeführt. Diese beinhalten die Relativ- $\vec{r}$ und die Schwerpunktskoordinate $\vec{R}$.

(i) Leiten Sie die folgende Lagrange-Funktion für die generalisierten Koordinaten mit der reduzierten Masse $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ ab:

$$\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \vec{R}, \dot{\vec{R}}) = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 - V\left(|\vec{r}|\right) .$$

(ii) Bestimmen Sie die zyklischen Koordinaten und die zugehörigen Erhaltungsgrößen. Drücken Sie dazu zusätzlich $\vec{r}$ durch Kugelkoordinaten aus. *Hinweis:* Nutzen Sie Aufgabe 1 von Blatt 4.

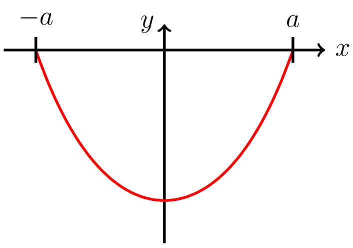
(b) Eine alternative Wahl der generalisierten Koordinaten lautet $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ und $\vec{\rho} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$. Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion als Funktion von $\vec{r}$ und $\vec{\rho}$ und erläutern Sie, warum diese Wahl der Koordinaten ungünstiger ist.

Aufgabe 2: Variationsrechnung mit Zwangsbedingung - Kettenlinie

Ein Seil der Länge L und einer Masse m sei an zwei Punkten $(-a, 0)$ und $(a, 0)$ befestigt. Bestimmen Sie nun, welchen Verlauf das Seil $y(x)$ unter Einfluss der Schwerkraft beschreibt. Dies bedeutet, dass Sie die Funktion $y(x)$ bestimmen müssen, unter welcher die potentielle Energie

$$V(y(x)) = \int ds \rho g y(x)$$

des Seils minimal ist. Hierbei bezeichnet ρ die Massendichte pro Längeneinheit, $\rho = \frac{m}{L}$, und g die Erdbeschleunigung.



$y(x) = c\cosh(x/c) - \lambda$

(a) Leiten Sie zunächst erneut die schon bekannte Relation für das Linienelement $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}dx$ ab, wenn die Kurve durch die eindimensionale Parametrisierung $y(x)$ beschrieben wird.

(b) Begründen Sie nun, warum die nachfolgende Zwangsbedingung $h(y(x))$ die konstante Länge L des Seiles beschreibt:

$$h(y(x)) = \int_{-a}^{a} dx \left(\sqrt{1 + y'(x)^2} - \frac{L}{2a}\right) = 0 .$$

(c) Nun können Sie $y(x)$ mit einer Variationsrechnung mit Zwangsbedingung in folgenden Schritten bestimmen:

(i) Wir definieren das Funktional $S(y(x), \lambda)$ durch Addition der Zwangsbedingung mit Lagrange'schem Multiplikator λ:

$$S(y(x), \lambda) = V(y(x)) + \lambda \rho g h(y(x)) \,.$$

(ii) Führen Sie im Integranden von S die Substitution $f(x) = y(x) + \lambda$ aus und bestätigen Sie dessen Form $I(f, f', x) = \rho g(\sqrt{1 + f'(x)^2} f(x) - \lambda \frac{L}{2a})$. Wenden Sie für den Integranden die Euler-Lagrange-Gleichung an und zeigen Sie, dass dies für $f(x)$ auf folgende Differentialgleichung führt

$$f'(x)^2 - f(x) f''(x) + 1 = 0 \,. \tag{1}$$

Welche Rolle spielen somit ρ und g für die Form der Kettenlinie?

(iii) Leider handelt es sich um eine Differentialgleichung, die nur mit einigen Umwegen zu lösen ist. Wir ersparen uns dies. Zeigen Sie, dass

$$f(x) = c \cosh\left(\tfrac{x}{c}\right)$$

eine Lösung der Differentialgleichung (1) ist. *Hinweis:* Es benötigt die hyperbolischen Funktionen $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ und $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

(iv) Bestimmen Sie nun $y(x)$. Erläutern Sie, wie die noch unbekannten Parameter c und λ bestimmt werden können. *Hinweis:* Formulieren Sie nur die Bedingungen.

Aufgabe 3: Eigenwertproblem - Gekoppeltes Pendel

Wir betrachten wieder den gekoppelten harmonischen Oszillator, welcher uns schon auf Blatt 3, Aufgabe 2 in Form zweier gekoppelter Pendel begegnet ist. Die Bewegungsgleichungen für den gekoppelten harmonischen Oszillator lauten

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l}\varphi_1 + \frac{k}{m}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \qquad \ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\varphi_2 + \frac{k}{m}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \,.$$

Dieser Satz zweier gekoppelter linearer Differentialgleichungen kann, wie wir gesehen haben, durch die Einfuhr entsprechender sog. Normalkoordinaten Φ_1 und Φ_2 entkoppelt und gelöst werden. Wir wollen nun erarbeiten, wie dies im Rahmen von Eigenwertproblemen etwas übersichtlicher gelöst werden kann. Gekoppelte Differentialgleichungen sind auch typisch für die Hamilton-Mechanik, wenngleich Sie dort erster Ordnung sind.

(a) Schreiben Sie dazu das obige System gekoppelter Gleichungen in einer Matrixdarstellung der Form

$$\ddot{\vec{\varphi}} = \mathbf{M}\vec{\varphi} \quad \text{mit} \quad \vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{M}$ einer (2×2)–Matrix. Wie sieht $\mathbf{M}$ explizit aus?

(b) Führen Sie dies nun durch den Ansatz $\vec{\varphi} = \vec{v} e^{i\omega t}$, wobei $\vec{v}$ die konstanten Komponenten v_1 und v_2 besitzt, in eine Eigenwertgleichung für $\mathbf{M}$ über und bestimmen Sie die Eigenwerte ω_1 und ω_2 bzw. die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}^{(1)}$ und $\vec{v}^{(2)}$.

(c) Die resultierenden zwei Eigenvektoren $\vec{v}^{(1)}$ und $\vec{v}^{(2)}$ führen dann zu zwei Arten von Eigenschwingungen, nämlich $\vec{\varphi}^{(1)} = \vec{v}^{(1)} \exp(\pm i\omega_1 t)$ bzw. $\vec{\varphi}^{(2)} = \vec{v}^{(2)} \exp(\pm i\omega_2 t)$. Wie sieht dann, und unter Berücksichtigung dass wir jeweils eine Plus- und eine Minuslösung vorliegen haben, die allgemeine Lösung für $\vec{\varphi}$ aus?