

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum 12/03 - Geb. 30.23)

### Aufgabe 1: Hamilton-Formalismus - Einführung

Für ein Punktteilchen mit der kinetischen und der potentiellen Energie  $T$  bzw.  $V$  sind die Lagrange- und die Hamilton-Funktion gegeben durch  $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T(\dot{\vec{q}}) - V(\vec{q})$  bzw.  $H(\vec{q}, \vec{p}) = T(\vec{p}) + V(\vec{q})$ . Durch  $\vec{q}$ ,  $\dot{\vec{q}}$  und  $\vec{p}$  sind jeweils die generalisierten Koordinaten, Geschwindigkeiten bzw. Impulse des Punktteilchens definiert. Die potentielle Energie sei beliebig ungleich Null. Die kinetische Energie ist wie üblich gegeben durch  $T(\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{q}}^2$ . Die Hamilton-Funktion folgt aus der Lagrange-Funktion durch die Legendre-Transformation

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \dot{\vec{q}}\vec{p} - \tilde{L}(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_i \dot{q}_i p_i - \tilde{L}(\vec{q}, \vec{p}),$$

wobei die generalisierten Impulse gegeben sind durch  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  und mit diesen die Ersetzung  $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) \rightarrow \tilde{L}(\vec{q}, \vec{p})$  durchgeführt wurde. Die drei Euler-Lagrange-Gleichungen für  $(q_i, \dot{q}_i)$ , welche DGLs 2. Ordnung sind, werden ersetzt durch die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p})}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad \frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p})}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

mit  $i \in \{1, 2, 3\}$  und stellen ein System von sechs gekoppelten DGLs 1. Ordnung dar.

- Gegeben sind kartesische Koordinaten, d.h.  $\vec{q} = \vec{x}$ . Bestimmen Sie zunächst die generalisierten Impulse in Abhängigkeit der generalisierten Geschwindigkeiten. Drehen Sie diese Abhängigkeit um und drücken Sie so die kinetische Energie in Abhängigkeit der generalisierten Impulse aus.
- Stellen Sie nun die Hamilton-Funktion auf und leiten Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen daraus ab. Überlegen Sie sich, daß diese äquivalent zu den Newton'schen Bewegungsgleichungen für ein Punktteilchen der Masse  $m$  im Potential  $V(\vec{x})$  sind.

### Aufgabe 2: Hamilton-Formalismus - Fadenpendel

In der Vorlesung wurde für das Fadenpendel nachfolgende Hamilton-Funktion abgeleitet:

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos q.$$

- Entwickeln Sie diese für kleine  $q$  bis zur zweiten Ordnung. Argumentieren Sie, wieso der konstante Term der Hamilton-Funktion außer Acht gelassen werden kann und zeigen Sie die Relation

$$H(q, p) = \frac{1}{2ml^2}p^2 + \frac{mgl}{2}q^2.$$

- Bevor wir die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen bestimmen, normieren wir  $q$  und  $p$  identisch, um die spätere Matrix einfacher zu diagonalisieren. Setzen Sie  $p = \bar{p}\sqrt{m\omega_0 l^2}$  und  $q = \bar{q}/\sqrt{m\omega_0 l^2}$  und zeigen Sie  $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p}) = \frac{1}{2}\omega_0(\bar{p}^2 + \bar{q}^2)$ . Hierbei ist  $\omega_0^2 = g/l$ . Ermitteln Sie aus  $\bar{H}(\bar{q}, \bar{p})$  die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen. Formulieren Sie die beiden Gleichungen als Matrixgleichung mit  $\vec{\pi} = (\bar{q}, \bar{p})^T$  in der Form

$$\frac{d}{dt}\vec{\pi} = \mathbf{M}\vec{\pi}.$$

- (c) Machen Sie den Ansatz  $\vec{\pi} = \vec{v}e^{\lambda t}$  mit konstantem  $\vec{v}$  und lösen Sie die erhaltene Eigenwertgleichung. Bestimmen Sie so die Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  und die zugehörigen Eigenvektoren  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$ . *Hinweis:* Beachten Sie die Ähnlichkeit zu Blatt 5, Aufgabe 3.
- (d) Setzen Sie nun  $\vec{\pi} = A\vec{v}_1e^{\lambda_1 t} + B\vec{v}_2e^{\lambda_2 t}$  und bestimmen Sie  $A$  und  $B$  passend zum Anfangswertproblem  $\vec{q}(0) = 0$  und  $\vec{p}(0) = \vec{p}_0$ .
- (e) Skizzieren Sie die Bewegung im Phasenraum, also der zweidimensionalen Ebene aufgespannt von  $q$  und  $p$ . Welches geometrische Gebilde erhalten Sie?  
*Hinweis:* Beachten Sie die erfolgte Normierung von  $q$  und  $p$  in  $\vec{\pi} = (\vec{q}, \vec{p})^T$ .
- (f) Machen Sie zuletzt eine kanonische Transformation auf die Koordinaten  $\tilde{q}$  und  $\tilde{p}$  durch

$$\tilde{q} = \frac{(1+i)(p - il^2 m \omega_0 q)}{2\sqrt{m\omega_0 l^2}}, \quad \tilde{p} = \frac{(1+i)(p + il^2 m \omega_0 q)}{2\sqrt{m\omega_0 l^2}}$$

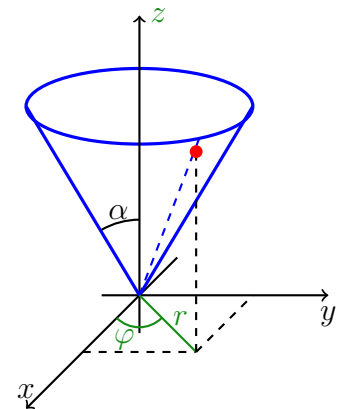
bzw.

$$q = \frac{(1+i)(\tilde{q} - \tilde{p})}{2\sqrt{m\omega_0 l^2}}, \quad p = \frac{(1-i)\sqrt{m\omega_0 l^2}(\tilde{q} + \tilde{p})}{2}$$

und bestimmen Sie die transformierte Hamilton-Funktion  $\tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p})$  (die keine weiteren Zeitabhängigkeiten erhält). Zeigen Sie, dass die Transformation die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen entkoppelt. Zeigen Sie außerdem, dass die fundamentalen Poisson-Klammern unverändert bleiben:  $\{\tilde{q}, \tilde{p}\}_{q,p} = 1$ ,  $\{\tilde{q}, \tilde{q}\}_{q,p} = 0$ ,  $\{\tilde{p}, \tilde{p}\}_{q,p} = 0$ .

### Aufgabe 3: Hamilton- versus Lagrange-Formalismus - Teilchen im Kegel

Ein Punktteilchen der Masse  $m$  gleitet reibungsfrei auf der Innenseite eines Kreiskegels. Die Gravitationskraft wirke in die negative  $z$ -Richtung und der Winkel  $\alpha$  zwischen der  $z$ -Achse und der Kegeloberfläche sei konstant.



- (a) Benutzen Sie zur Beschreibung des Problems Zylinderkoordinaten, also  $(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)^T$ . Wie lautet die Zwangsbedingung? Die unabhängigen Koordinaten seien  $z$  und  $\varphi$ . Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf und benutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen um die folgenden Bewegungsgleichungen herzuleiten:

$$2\dot{z}\dot{\varphi} + z\ddot{\varphi} = 0$$

$$\ddot{z}(1 + \tan^2 \alpha) - z\dot{\varphi}^2 \tan^2 \alpha + g = 0$$

- (b) Wie bereits auf Blatt 4, Aufgabe 3 können Sie eine zyklische Koordinate identifizieren. Ersetzen Sie erneut in der Bewegungsgleichung mit  $\dot{z}$  den Term  $\dot{\varphi}$  durch den erhaltenen (Dreh)impuls  $p_\varphi$  und diskutieren Sie die Bewegung in  $z$ -Richtung.
- (c) Wiederholen Sie die Rechnung nun im Hamilton-Formalismus. Schreiben Sie die Hamilton-Funktion auf und leiten Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen her. Zeigen Sie dann, daß diese zu den bereits in Aufgabenteil (a) hergeleiteten Bewegungsgleichungen äquivalent sind. Zudem können Sie eine der beiden Hamilton'schen Bewegungsgleichungen als die DGL aus Teilaufgabe (b) identifizieren.