

Aufgabe 2

(d) Somit ist die Lösung

$$\vec{\pi} = A \begin{pmatrix} 1/i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} + B \begin{pmatrix} -1/i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 t}$$

Wir passen dies an das Anfangswertproblem an:

$$\bar{q} = 1/i (A e^{i\omega_0 t} - B e^{-i\omega_0 t})$$

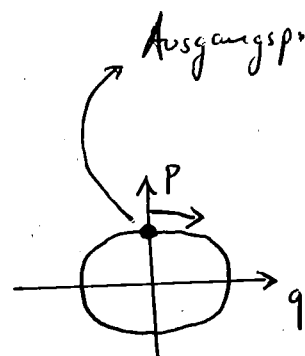
$$\bar{q}(0) = 1/i (A - B) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow A = B$$

$$\bar{p} = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}$$

$$\bar{p}(0) = A + B = 2A \stackrel{!}{=} \bar{p}_0 \rightarrow A = \frac{\bar{p}_0}{2}$$

$$\text{Damit ist: } \begin{aligned} \bar{q} &= \bar{p}_0 \sin(\omega_0 t) \\ \bar{p} &= \bar{p}_0 \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

(e) Im Phasenraum $\vec{\pi} = (\bar{q}, \bar{p})$ handelt es sich um einen Kreis mit Radius $\bar{p}_0$. In (q, p) ist dieser um $\sqrt{m\ell^2\omega_0^2}$ gedehnt und gestaucht (oder vice versa). $\rightarrow$ Ellipsenbahn



(f) Wir vollführen die angegebene Transformation der Variablen auf $\tilde{q}$ und $\tilde{p}$.
Insbesondere ist: $q^2 = \frac{(1+i)^2 (\tilde{q} - \tilde{p})^2}{4 m \omega_0 \ell^2} = \frac{(2i)(\tilde{q} - \tilde{p})^2}{4 m \omega_0 \ell^2}$, $p^2 = \frac{(-2i)(\tilde{q} + \tilde{p})^2}{4 m \omega_0 \ell^2}$

$$\begin{aligned} \text{Damit folgt: } \tilde{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) &= \frac{1}{8} \omega_0 [(-2i)(\tilde{q}^2 + 2\tilde{q}\tilde{p} + \tilde{p}^2) + (2i)(\tilde{q}^2 - 2\tilde{q}\tilde{p} + \tilde{p}^2)] \\ &= \frac{1}{8} \omega_0 (-8i \tilde{q}\tilde{p}) = -i\omega_0 \tilde{q}\tilde{p} \end{aligned}$$

Die Bewegungsgl. sind: $\frac{d\tilde{H}}{d\tilde{p}} = -i\omega_0 \tilde{q} = \dot{\tilde{q}}$, $-\frac{d\tilde{H}}{d\tilde{q}} = +i\omega_0 \tilde{p} = \dot{\tilde{p}} \rightarrow$ entkoppelt!

Die Eigenvektoren aus (c) dienen der Motivation.

Die Transformation ist kanonisch, denn:

$$\begin{aligned} \{\tilde{q}, \tilde{p}\}_{q,p} &= \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial p} - \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial q} = \frac{1}{2}(1+i)(-i\sqrt{m\omega_0\ell^2}) \frac{1}{2}(1+i) \frac{1}{\sqrt{m\omega_0\ell^2}} \\ &\quad - \frac{1}{2}(1+i) \frac{1}{\sqrt{m\omega_0\ell^2}} \frac{1}{2}(1+i)(i\sqrt{m\omega_0\ell^2}) \\ &= \frac{1}{4}(1+i)^2 (-i-i) = \frac{1}{4}(2i)(-2i) = 1 \end{aligned}$$

Außerdem ist offensichtlich $\{\tilde{q}, \tilde{q}\}_{q,p} = \{\tilde{p}, \tilde{p}\}_{q,p} = 0$.

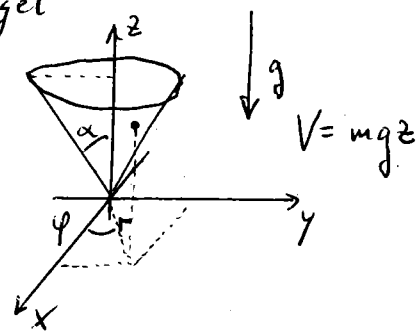
Die Bewegungsgleichungen beschreiben daher identische Physik.

Aufgabe 3 Hamilton versus Lagrange - Teilchen im Kegel

(a) Zylinderkoordinaten ergeben:

$$L = \frac{1}{2} m (\underbrace{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}_{\text{Polarkoordinaten}} + \dot{z}^2) - mgz$$

Nun gilt die Zwangsbedingung: $\tan \alpha = \frac{r}{z}$
 $\rightarrow r = z \tan \alpha$



Dann folgt:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{z}^2 (\tan^2 \alpha + 1) + z^2 \tan^2 \alpha \dot{\varphi}^2) - mgz \quad (*)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben damit:

bzgl. φ : $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} (m z^2 \tan^2 \alpha \dot{\varphi}) - 0 = 0$

$$\rightarrow 2m z \dot{z} \tan^2 \alpha \dot{\varphi} + m z^2 \tan^2 \alpha \ddot{\varphi} = 0$$

$$\rightarrow 2 \dot{z} \dot{\varphi} + z \ddot{\varphi} = 0$$

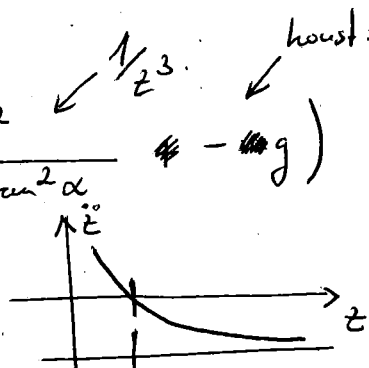
bzgl. z : $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt} (m \dot{z} (\tan^2 \alpha + 1)) - m z \tan^2 \alpha \dot{\varphi}^2 + mg = 0$

$$\rightarrow \ddot{z} (\tan^2 \alpha + 1) - z \dot{\varphi}^2 \tan^2 \alpha + g = 0$$

(b) Zykliche Koordinate φ : $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m z^2 \tan^2 \alpha \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m z^2 \tan^2 \alpha}$

Einsetzen in die Gl. für z ergibt:

$$\ddot{z} = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1} \left(\frac{p_\varphi^2}{m^2 z^3 \tan^2 \alpha} - g \right)$$



Schwingung in z -Richtung!
 vgl. Blatt 4+5! $\leftrightarrow$ Eff. Potential

(c) Wiederholung im Hamilton-Formalismus:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m z^2 \tan^2 \alpha \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m z^2 \tan^2 \alpha}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} (\tan^2 \alpha + 1) \rightarrow \dot{z} = \frac{p_z}{m (\tan^2 \alpha + 1)}$$

Es folgt: $H = \dot{\varphi} p_\varphi + \dot{z} p_z - L$

$$(*) \frac{1}{2m} \left[\frac{p_\varphi^2}{z^2 \tan^2 \alpha} + \frac{p_z^2}{\tan^2 \alpha + 1} \right] + mgz$$

Aufgabe 3

(c) Fortsetzung = (1) $\frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{1}{m z^2 \tan^2 \alpha} p_\varphi = \dot{\varphi}$

(2) $\frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{1}{m (\tan^2 \alpha + 1)} p_z = \dot{z}$

(3) $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 = -\dot{p}_\varphi$

(4) $\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{p_\varphi^2}{m z^3 \tan^2 \alpha} + m g = -\dot{p}_z \quad (\text{vgl. Teilaufg. b!})$

Aus (1) und (3) folgt: (1) $p_\varphi = \dot{\varphi} m z^2 \tan^2 \alpha$

(1) + (3): $\dot{p}_\varphi = \ddot{\varphi} m z^2 \tan^2 \alpha + 2 \dot{\varphi} m \dot{z} z \tan^2 \alpha = 0$
 $\rightarrow \text{vgl. (a) Gl. für } \varphi$

Aus (2) und (4) folgt: (2) $p_z = \dot{z} m (\tan^2 \alpha + 1)$

(2) $\dot{p}_z = \ddot{z} m (\tan^2 \alpha + 1)$

(1) und (2) in (4):

$-\frac{\dot{\varphi}^2 m^2 z^4 \tan^4 \alpha}{m z^3 \tan^2 \alpha} + m g = -\ddot{z} m (\tan^2 \alpha + 1)$

$\longrightarrow \ddot{z} (\tan^2 \alpha + 1) - \dot{\varphi}^2 z \tan^2 \alpha + g = 0 \rightarrow \text{vgl. (a) Gl. für } z$