

Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum 12/03 - Geb. 30.23)

### Aufgabe 1: Symmetrien und Erhaltungsgrößen - Harmonischer Oszillator

Wir möchten uns in dieser Aufgabe etwas vertrauter machen mit Symmetrien und Erhaltungsgrößen am Beispiel des harmonischen Oszillators. Wir arbeiten im Hamilton-Formalismus im Zustandsraum, zusammengesetzt aus dem Phasenraum  $\vec{\pi} = (q, p)^T$  und der Zeitkoordinate  $t$ . Die zugehörige Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators ist  $H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ . In der Vorlesung wurde die Poisson-Klammer vorgestellt, die wir auch auf Blatt 6 schon einmal verwendet haben. Für einen Satz von  $s$  (hier  $s = 1$ ) generalisierten Koordinaten ist diese definiert durch

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right). \quad (1)$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich die totale zeitliche Ableitung einer Observablen  $f$  mittels der Poisson-Klammer in einfacher Form schreiben lässt als

$$\frac{d}{dt}f = \{f, H\} + \frac{\partial}{\partial t}f,$$

wobei  $H$  die Hamilton-Funktion des Systems unter Betrachtung darstellt. Für die generalisierten Koordinaten und Impulse selbst führt dies auf  $\dot{q}_j = \{q_j, H\}$  und  $\dot{p}_j = \{p_j, H\}$  und i.A. gilt, dass eine Größe  $A$  erhalten ist, wenn gilt:

$$\{A, H\} = 0 \quad \text{falls} \quad \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad \text{bzw. allgemeiner} \quad \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0.$$

- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators mittels der Poisson-Klammern der generalisierten Koordinaten und Impulse und der Hamilton-Funktion (Hamilton-Operator) auf.
- Zeigen Sie, dass die Größe  $A = -m(\dot{q} \cos(\omega t) + \omega q \sin(\omega t))$  eine Erhaltungsgröße ist. Schreiben Sie dazu  $A$  zunächst in Abhängigkeit von  $p$  und  $q$  um, anstelle von  $\dot{q}$  und  $q$ .
- Was gilt für  $A = H$ ?

### Aufgabe 2: Poisson-Klammer - Drehmoment

Gegeben ist der Drehimpuls  $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}$  eines Teilchens mit Masse  $m$  mit den unabhängigen(!) Koordinaten des Ortsvektors  $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)^T$  und des Impulses  $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$ . Somit ist beispielsweise die  $x$ -Komponente von  $\vec{L}$  gegeben durch  $L_x = q_y p_z - q_z p_y$ .

- Berechnen Sie die Poisson-Klammern der ersten Komponente des Drehimpulses und der Komponenten des Impulses  $\{L_x, p_i\}$  für  $i \in \{x, y, z\}$ . *Hinweis:* Nutzen Sie Gleichung (1) mit  $i \in \{x, y, z\}$ , aber wegen der Unabhängigkeit der Koordinaten verbleibt ein Term!
- Berechnen Sie nun die Poisson-Klammern  $\{L_x, L_i\}$  für  $i \in \{x, y, z\}$ .
- Der Casimiroperator  $\vec{L}^2$  ist definiert durch  $\vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ . Berechnen Sie die Poisson-Klammer  $\{\vec{L}^2, L_x\}$ . *Hinweis:* Verwenden Sie  $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$ .

### Aufgabe 3: Galilei-Transformation

Die allgemeine Koordinatentransformation der Galilei-Gruppe, kurz Galilei-Transformation, von  $\{\vec{r}, t\}$  nach  $\{\vec{r}', t'\}$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \lambda_1 \mathbf{R} \cdot \vec{r} - \vec{v}t - \vec{r}_0, \\ t' &= \lambda_2 t + t_0,\end{aligned}$$

wobei  $\lambda_1, \lambda_2$  Vorzeichen aus der Menge  $\{-1, +1\}$  bezeichnen und  $\mathbf{R}$  eine Drehmatrix im dreidimensionalen Raum. Die Galilei-Transformationen verkörpern damit das Kollektiv der Grundtransformationen Zeittranslation (konstante Verschiebung des Ursprungs der Zeitachse), Ortstranslation (konstante Verschiebung des Ursprungs des Ortsraums und Translation auf ein sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegendes Bezugssystem), Drehung im Ortsraum, Raumspiegelung und Zeitumkehr.  $P_G = \{\mathbf{R}, \vec{v}, \vec{r}_0, t_0, \lambda_1, \lambda_2\}$  bezeichnet dabei die Parametermenge (10 reelle Parameter, denn die Drehung  $\mathbf{R}$  kann i.A. durch drei Winkel beschrieben werden, und 2 Vorzeichen) der Galilei-Transformation.

- (a) Eine Untergruppe der Galilei-Transformation bildet die Boost-Gruppe, deren Transformation gegeben ist durch

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} - \vec{v}t, \\ t' &= t.\end{aligned}$$

Dies stellt den Spezialfall von  $P_{G'} = \{\mathbf{1}, \vec{v}, \vec{0}, 0, 1, 1\} = \{\vec{v}\}$  dar, wobei  $\mathbf{1}$  die dreidimensionale Einheitsmatrix bezeichnet, und schränkt damit die Galilei-Transformationen auf 3 Parameter ein. Fassen wir  $\vec{r}$  und  $t$  im Vierervektor  $r^T = (ct, \vec{r}^T) = (ct, x, y, z)$  zusammen, so können wir die eingeschränkte Galilei-Transformation auch in Vierermatrixform schreiben. Zeigen Sie in diesem Fall, dass

$$r' = \Gamma_{G'}(\vec{v})r$$

gilt, wobei

$$\Gamma_{G'}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_x}{c} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{v_y}{c} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v_z}{c} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- (b) Zeigen Sie mit Hilfe der Vierermatrixdarstellung für den eingeschränkten Parameterraum aus Teil (a), dass die Menge  $G'$  aller daraus resultierender Galilei-Transformationen eine Gruppe bilden. Gehen Sie wie folgt vor:
- Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung zweier Transformationen  $P_{G'}$  und  $P'_{G'}$ , dargestellt durch  $\Gamma \in G'$  bzw.  $\Gamma' \in G'$  wieder eine Galilei-Transformation ergibt, dass also  $\Gamma'' = \Gamma' \cdot \Gamma \in G'$  gilt. Was ergibt sich dann für  $\vec{v}''$  in Abhängigkeit von  $\vec{v}$  und  $\vec{v}'$ ?
  - Zeigen Sie, dass  $\Gamma \cdot (\Gamma' \cdot \Gamma'') = (\Gamma \cdot \Gamma') \cdot \Gamma''$ .
  - Zeigen Sie, dass ein Einselement  $\mathbf{1}$  existiert (nicht zu verwechseln mit der dreidimensionalen Einheitsmatrix) so dass  $\Gamma \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot \Gamma = \Gamma$ .
  - Zeigen Sie, dass ein inverses Element  $\Gamma^{-1}$  existiert, so dass  $\Gamma \cdot \Gamma^{-1} = \Gamma^{-1} \cdot \Gamma = \mathbf{1}$ .
- (c) Zeigen Sie Eigenschaft (i) aus Teil (b) nun für Galilei-Transformationen  $G''$  bei denen  $\mathbf{R} \neq \mathbf{1}$  gilt, also für  $P_{G''} = \{\mathbf{R}, \vec{v}, \vec{0}, 0, 1, 1\} = \{\mathbf{R}, \vec{v}\}$ :
- Wie sieht  $\Gamma_{G''}(\mathbf{R}, \vec{v})$  aus?
  - Was ergibt sich in diesem Fall für  $\vec{v}''$ , was für  $R''$ ?