Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum 12/03 - Geb. 30.23)

Hinweis zu diesem Übungsblatt:
Dieses Blatt 8 wird erst am Dienstag, 26.06.2018, besprochen. Die Übung am 19.06.2018 entfällt.
Hinweis zur Klausuranmeldung:
Die Anmeldung zur ersten Klausur öffnet sowohl auf CAMPUS wie auf QISPOS am Mittwoch, 27.06.2018, und ist bis zum Donnerstag, 26.07.2018, um 23:00 Uhr möglich.

Aufgabe 1: Zeitdilatation - Experimenteller Nachweis

Im Jahre 1941 zeigten Hall und Rossi, dass der Zerfall von Myonen aus der kosmischen Höhenstrahlung $\mu^\pm \to e^\pm \nu_1 \bar{\nu}_2$ aufgrund ihrer hohen Geschwindigkeit nur adäquat mit Berücksichtigung der Zeitdilatation zu beschreiben war. Im Jahr 1963 wiederholten Frisch und Smith das Experiment mit höherer Genauigkeit. Geht man davon aus, dass die Anzahl der Myonen aus der Höhenstrahlung auf der Erde gleichverteilt ist, lässt sich durch Messung in zwei verschiedenen Höhen unter Benutzung eines Geschwindigkeitsfilters eine höhenabhängige Anzahlbestimmung durchführen. Für Myonen mit Geschwindigkeit $0.995c$ ergibt sich zwischen dem ersten Messpunkt auf dem Mount Washington und dem zweiten Messpunkt in Cambrigde eine Flugzeit von 6.4 μs bei einem Höhenunterschied von 1907 m. Berechnen Sie die relative Anzahl der Myonen, die in Cambrigde zu messen sind mit und ohne Zeitdilatation bei einer mittleren Lebensdauer von $\tau = 2.20$ μs eines ruhenden(!) Myons, d.h. $N(t)/N(0) = e^{-t/\tau}$. Welches Ergebnis ist kompatibel mit dem Messwert 0.731?

Aufgabe 2: Zeitdilatation - Zwillingsparadoxon

Auf der Südhalbkugel der Erde lebt ein Zwillingspaar. Einer der Zwillinge fliege mit einer Rakete zu einem entfernten Planeten, kehre um und fliege wieder zur Erde zurück, während der andere Zwilling seelenruhig die Zeit am Strand von Bali absitzt. Zur näheren Untersuchung des Paradoxons sei der Raketenflug in sechs Phasen unterteilt, genauer Phase 1, der Beschleunigung mit Beschleunigung a von der Erde weg über eine Dauer T_a, Phase 2, der Flug mit konstanter Geschwindigkeit V über eine Dauer T_c, Phase 3, dem Landeanflug mit Beschleunigung $-a$ über eine Dauer T_a. Die Phasen $4-6$ decken äquivalent den Rückflug ab. Alle angegebenen Zeiten seien von der wasserdichten Uhr des sonnengebräunten Erdzwillings im System Σ abgelesen, welcher beim Abflug seine Uhr mit der des Raketenzwillings im System Σ' abgeglichen hat.

(a) Berechnen Sie für die einzelnen Phasen die Zeitdilatation

$$\Delta t' = \int \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} dt \quad .$$

Hinweis: Verwenden Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ aus Sicht des Systems Σ in Phase 1:

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + (at)^2/c^2}}$$

Nutzen Sie den arcsinh für das Resultat der ersten Phase 1. Die Phasen $3-6$ folgen aus Symmetrieüberlegungen der Phasen 1 und 2.

(b) Setzen Sie die Gesamtzeit $\Delta t'$ zusammen und zeigen Sie, dass $\Delta t' \leq \Delta t = 4T_a + 2T_c$ gilt. Betrachten Sie den Grenzwert $V \ll c$ und $V = 0.9c$.
Hinweis: Zeigen und nutzen Sie die nachfolgende Beziehung:

$$T_a = \frac{V}{a\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

(c) Das vermeintliche Paradoxon besteht nun in folgender Aussage: Der Raketenzwilling kann behaupten, dass der sonnengebräunte und entspannte Erdzwilling eigentlich jünger sein müsste als er selbst, da das Raketensystem Σ' in Ruhe war und sich die Erde entfernt und wieder genähert hat. Wo liegt der Denkfehler, der das Paradoxon auflöst? Betrachten Sie hierzu auch den Limes $T_a \to 0$.

Aufgabe 3: Minkowski-Raum - Matrix- und Index-Schreibweise

In der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie ist es üblich die Einstein'sche Summenkonvention, d.h. über doppelt vorkommende Indizes wird summiert, und die Vierer-Vektor Schreibweise zu verwenden. Ein kontravarianter Vierer-Vektor (Index oben) ist dabei gegeben durch $x^\mu = (ct, x, y, z)$. Ein kovarianter Vierer-Vektor (Index unten) kann mittels der Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$ aus dem kontravarianten Vierer-Vektor bestimmt werden durch

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -x, -y, -z) \ , \qquad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Das Skalarprodukt ist damit gegeben durch $x_\mu x^\mu = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu}$. Die Lorentz-Transformation eines kontravarianten Vierer-Vektor ist gegeben durch

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \ , \qquad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \vec{\beta}^T \\ -\gamma\vec{\beta} & \mathbb{1} + (\gamma - 1)\,\frac{\vec{\beta}\vec{\beta}^T}{\vec{\beta}^2} \end{pmatrix} \ , \qquad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)^T \ .$$

Betrachten Sie einen Boost in x-Richtung, d.h. $\vec{\beta} = (\beta, 0, 0)^T$. Verwenden Sie in den ersten vier Teilaufgaben explizit die vierdimensionalen Matrix- und Vektor-Darstellungen!

(a) Überprüfen Sie zunächst, dass die inverse Lorentz-Transformation gegeben ist durch

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(b) Zeigen Sie, dass die Relation $\Lambda_\nu{}^\mu = g_{\nu\beta} \Lambda^\beta{}_\alpha g^{\mu\alpha} = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu$ gilt, indem Sie die Matrixmultiplikation $g_{\nu\beta} \Lambda^\beta{}_\alpha g^{\mu\alpha}$ ausführen.

(c) Berechnen Sie nun den Vierer-Vektor x'^μ und sodann auch $x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu$.

(d) Zeigen Sie nun explizit, dass $x_\mu x^\mu$ invariant unter Lorentz-Transformationen ist, also $x'_\mu x'^\mu = x_\mu x^\mu$ gilt.

(e) Zeigen Sie zuletzt in der Index-Schreibweise, dass das Skalarprodukt invariant bleibt.
Hinweis: Nutzen Sie, dass $g_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta g_{\alpha\beta}$ gilt, also $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ ist. Die rechte Seite der Gleichung entspricht dem Transformationsverhalten eines Tensors 2. Stufe.