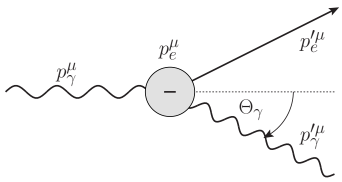
Übungsbetreuung: Stefan Liebler (stefan.liebler@kit.edu) (Raum 12/03 - Geb. 30.23)
Marcel Krause (marcel.krause@kit.edu) (Raum 12/14 - Geb. 30.23)

Hinweis zu diesem Übungsblatt:
Dieses Blatt 9 wird am Montag, 02.07.2018, von 9:45-11:15 Uhr besprochen. Die Vorlesung findet dafür am Dienstag, 03.07.2018, von 15:45-17:15 Uhr statt.

Aufgabe 1: Streuprozess - Compton-Effekt

Ein Photon streut an einem ruhenden Elektron und überträgt dabei Energie und Impuls auf das Elektron. In dieser Aufgabe soll nun die Energie E'_γ des Photons nach der Streuung in Abhängigkeit des Streuwinkels Θ_γ mittels Energie-Impuls-Vektoren p^μ bestimmt werden. Diese sind gegeben durch Energie E und Impuls $\vec{p}$ des Teilchens $p^\mu = (E/c, \vec{p})$.



Das Quadrat der Energie-Impuls-Vektoren ist invariant unter Lorentz-Transformationen und gegeben durch die invariante Ruhemasse des Teilchens m_0 gemäß

$$p^2 = p_\mu p^\mu = m_0^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2}\,.$$

(a) Nutzen Sie die Energie-Impulserhaltung ausgedrückt durch p^μ aus, um die Energie des Photons nach dem Stoß zu bestimmen. Gehen Sie wie folgt vor:
   (i) Lösen Sie die Gleichung der Energie-Impuls-Vektoren des Elektrons p_e^μ und des Photons p_γ^μ vor dem Stoß und des Elektrons $p_e'^\mu$ und des Photons $p_\gamma'^\mu$ nach dem Stoß nach $p_e'^\mu$ auf.
   (ii) Quadrieren Sie die resultierenden Energie-Impuls-Vektoren auf beiden Seiten der Gleichung und verifizieren Sie, dass die Energie des auslaufenden Photons E'_γ als Funktion der Elektronmasse m_e, des Streuwinkels Θ_γ und der Energie des einlaufenden Photons E_γ durch

$$E'_\gamma = E_\gamma \cdot \left(1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}\,(1 - \cos\Theta_\gamma)\right)^{-1}$$

   gegeben ist. *Hinweis:* Es gilt $\vec{p}_\gamma \vec{p}'_\gamma = |\vec{p}_\gamma||\vec{p}'_\gamma| \cos\Theta_\gamma$. Die Ruhemasse des Photons ist $m_\gamma = 0$, damit können Sie $|\vec{p}_\gamma|$ direkt als Funktion von E_γ ausdrücken.

(b) Die Energie eines Photons ist durch seine Wellenlänge λ gemäß $E_\gamma = 2\pi\hbar c/\lambda$ gegeben. Bestimmen Sie die Differenz der Wellenlängen $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$.

Aufgabe 2: Wellenpakete - Erwartungswerte, Unschärfe, Operatoren im Ortsraum

Wir möchten uns in dieser Aufgabe mit Wellenpaketen noch vertrauter machen und betrachten zum Einstieg eine Fouriertransformation und im Anschluss die Ausbreitung eines Gauß'schen Wellenpaketes $\Psi(x,t)$ in Raum und Zeit. Per Konstruktion erfüllt $\Psi(x,t)$ die eindimensionale

Schrödingergleichung des freien Teilchens. Für ein Ebensolches berechnen wir die Orts- und Impulsunschärfe und zeigen die Heisenberg'sche Unschärferelation.
Hinweis: Da sich die Berechnung der relevanten Integrale zieht und eher weniger erhellend ist, nutzen Sie auch gerne Ihren Computer. Sie können Teilaufgaben auch einzeln bearbeiten.

(a) Gegeben sei eine komplexwertige, auf der gesamten x-Achse definierte Funktion $f(x)$. Dieser Funktion ordnen wir mittels des Integrals

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ikx} f(x)$$

eine neue, auf $-\infty < k < \infty$ definierte Funktion $\tilde{f}(k)$ zu, die wir als Fouriertransformierte von $f(x)$ bezeichnen. Berechnen Sie (erneut) die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(x) = e^{-\alpha x^2}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

und vergleichen Sie $\tilde{f}(k)$ mit $f(x)$. *Hinweis:* Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \exp(-(x+iy)^2) = \sqrt{\pi}$.

(b) Als Beispiel für die Ausbreitung einer nicht-relativistischen Materiewelle in einer Dimension betrachten wir wie in der Vorlesung das Gauß'sche Wellenpaket

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\ g(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} \qquad \text{mit} \qquad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

und

$$g(k) = C\ \exp\left(-\frac{1}{2a^2}(k-k_0)^2\right).$$

Beachten Sie die leicht andere Form von $g(k)$ im Vergleich zur Vorlesung.

(i) Bestimmen Sie $\Psi(x,t)$. Das Ergebnis lässt sich auf die folgende Form bringen

$$\Psi(x,t) = \frac{Ca}{\sqrt{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}}} \exp\left(-\frac{a^2(x-v_g t)^2}{2(1+i\frac{a^2\hbar t}{m})}\right) \exp\left(i(k_0 x - \omega_0 t)\right)$$

mit $v_g = \hbar k_0/m$ und $\omega_0 = \hbar k_0^2/(2m)$.

(ii) Legen Sie die Konstante C so fest, dass $\Psi(x,t)$ und $g(k)$ "auf Eins normiert" sind, also gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ |\Psi(x,t)|^2 = 1 \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dk\ |g(k)|^2 = 1\,.$$

(c) Bilden Sie für die normierten Wellenfunktionen $\Psi(x,t)$ aus Teilaufgabe (b) ($C^{-1} = \sqrt{a\sqrt{\pi}}$) die sogenannten Mittelwerte (oder Erwartungswerte) von Ort und Impuls

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi(x,t)^* x \Psi(x,t) \qquad \text{und} \qquad \langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi(x,t)^* \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)\,.$$

(d) Als Maß für die Breite des Gaußschen Wellenpakets definiert man Δx durch

$$(\Delta x)^2 = \left\langle (x - \langle x \rangle)^2 \right\rangle$$

und entsprechend Δp. Berechnen Sie Δx und Δp als Funktion der Zeit. Begründen Sie das zeitliche Verhalten von $\langle p \rangle$ und Δp.

(e) Kommentieren Sie das raum-zeitliche Verhalten von $|\Psi(x,t)|^2$.