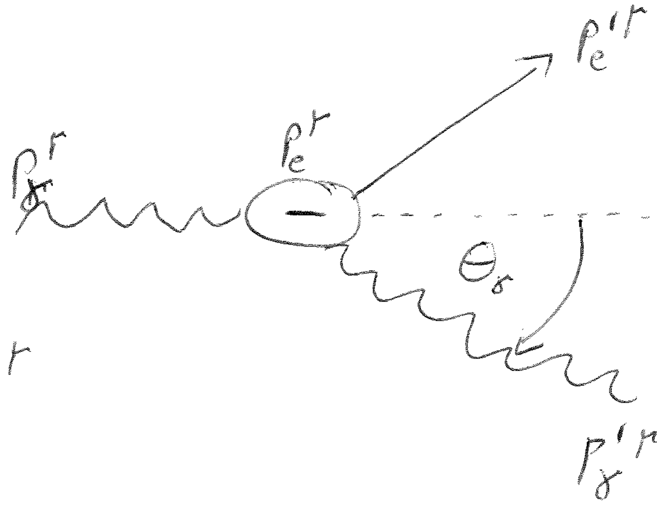
$\boxed{\text{MPFI - Blatt 9}}$

$\boxed{A1}$



(a) (i) Energie-Impuls-Erhaltung:

$$p_e^\mu + p_\gamma^\mu \overset{!}{=} p_e'^\mu + p_\gamma'^\mu$$

(vorher) (nachher)

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{p_e'^\mu = p_e + p_\gamma^\mu - p_\gamma'^\mu}} \qquad (1)$$

(ii) Quadriere die Gl. und nutze

$$p_i^2 = p_{i\mu} p_i^\mu = m_{0,i}^2 c^2 = \frac{E_i^2}{c^2} - \vec{p}_i^{\,2} . \qquad (2)$$

$$\overset{(1)^2}{\Rightarrow} \quad p_e'^2 = (p_e + p_\gamma^\mu - p_\gamma'^\mu)^2 = p_e^2 + \underbrace{p_\gamma^2}_{=0} + \underbrace{p_\gamma'^2}_{=0} + 2p_e \cdot (p_\gamma^\mu - p_\gamma'^\mu) - 2p_\gamma \cdot p_\gamma'$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \quad \cancel{m_e^2 c^2} = \cancel{m_e^2 c^2} \cancel{+ \frac{E_\gamma^2}{c^2} + \frac{E_\gamma'^2}{c^2}} + 2p_e \cdot (p_\gamma^\mu - p_\gamma'^\mu) - 2p_\gamma \cdot p_\gamma' .$$

Für die letzten beiden Terme benötigen wir die explizite Darstellung der Vierervektoren; dazu nutzen wir, da $m_\gamma = 0$:

$$p_\gamma^2 = m_\gamma^2 c^2 = 0 = \frac{E_\gamma^2}{c^2} - \vec{p}_\gamma^{\,2} \Rightarrow \boxed{|\vec{p}_\gamma| = \frac{E_\gamma}{c}}$$

$$p_e^2 = m_e^2 c^2 = \frac{E_e^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{E_e = m_e c^2} \qquad E_\gamma' \text{ analog} \Rightarrow \boxed{|\vec{p}_\gamma'| = \frac{E_\gamma'}{c}}$$

Vierervektoren: $p_i^\mu = \begin{pmatrix} E_i/c \\ \vec{p}_i \end{pmatrix}$, $p_{i,\mu} = \begin{pmatrix} E_i/c \\ -\vec{p} \end{pmatrix}$ (Metrik $g^{\mu\nu} = (1,-1,-1,-1)$)

(kontravariant) ! (kovariant)

$$p_{e,\mu} = \begin{pmatrix} m_e c \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad p_\gamma^\mu = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ \vec{p}_\gamma \end{pmatrix}, \quad p'_{\gamma,\mu} = \begin{pmatrix} E_\gamma'/c \\ -\vec{p}_\gamma' \end{pmatrix}$$

in Ruhe

Damit hat man

$$p_\gamma \cdot p_\gamma' = p_\gamma^\mu \, p'_{\gamma,\mu} = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ \vec{p}_\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_\gamma'/c \\ -\vec{p}_\gamma' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{E_\gamma E_\gamma'}{c^2} - \vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_\gamma{}' = \frac{E_\gamma E_\gamma'}{c^2} - |\vec{p}_\gamma||\vec{p}_\gamma{}'| \cos\theta_\gamma$$

$$= \frac{E_\gamma E_\gamma'}{c^2}(1 - \cos\theta_\gamma)$$

$$p_e \cdot (p_\gamma^\mu - p_\gamma'^\mu) = p_{e,\mu}(p_\gamma^\mu - p_\gamma'^\mu)$$

$$= \begin{pmatrix} m_e c \\ \vec{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_\gamma/c - E_\gamma'/c \\ \vec{p}_\gamma - \vec{p}_\gamma{}' \end{pmatrix} = m_e (E_\gamma - E_\gamma')$$

$$\Rightarrow 0 = 2 p_e \cdot (p_\gamma^\mu - p_\gamma'^\mu) - 2 p_\gamma \cdot p_\gamma'$$

$$= 2 m_e (E_\gamma - E_\gamma') - \frac{2 E_\gamma E_\gamma'}{c^2}(1 - \cos\theta_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow 0 = E_\gamma - E_\gamma' - \frac{E_\gamma E_\gamma'}{m_e c^2}(1 - \cos\theta_\gamma)$$

$$\Leftrightarrow E_\gamma' \left[1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\theta_\gamma) \right] = E_\gamma$$

$$\Leftrightarrow E_\gamma' = E_\gamma \left[1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\theta_\gamma) \right]^{-1} \qquad \blacksquare$$

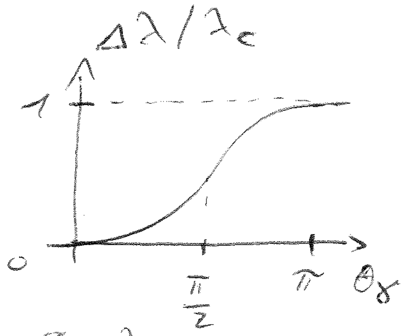
(b) Wir nutzen $E_\gamma = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} \equiv \frac{hc}{\lambda}$ $\quad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{hc}{E_\gamma}, \quad \lambda' = \frac{hc}{E_\gamma'}$$

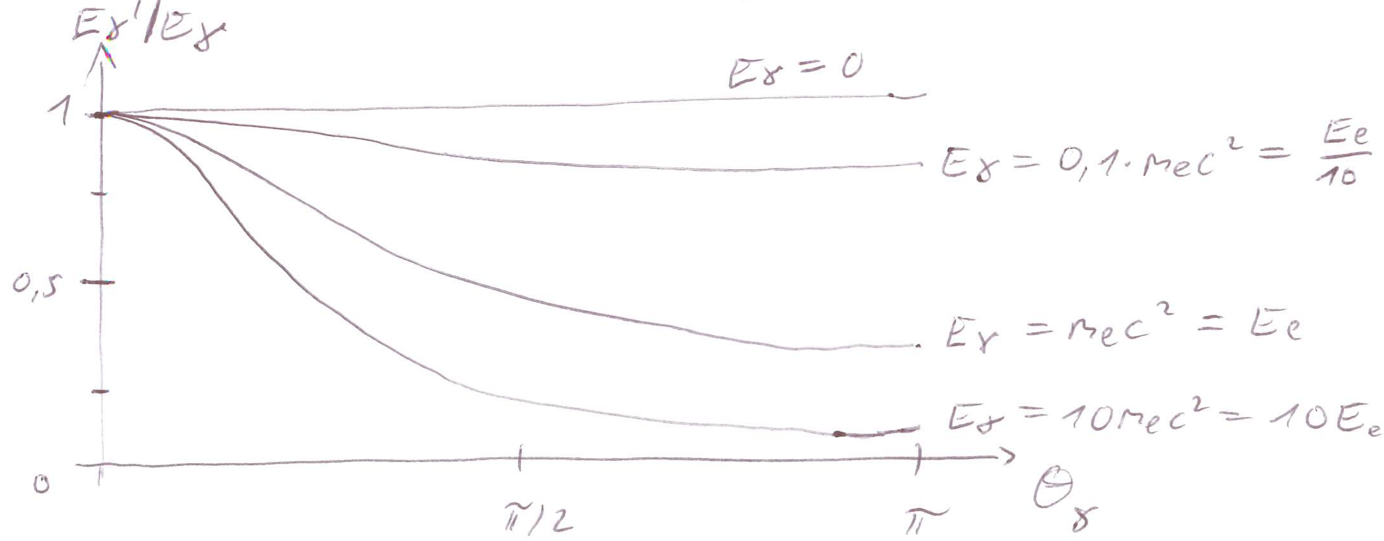
$$\Rightarrow \Delta\lambda = \lambda' - \lambda = hc \left[\frac{1}{E_\gamma'} - \frac{1}{E_\gamma} \right]$$

$$\overset{(a)}{=} hc \left[\frac{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\theta_\gamma)}{E_\gamma} - \frac{1}{E_\gamma} \right]$$

$$= \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta_\gamma) \equiv \lambda_c (1 - \cos\theta_\gamma)$$



Beispiel für verschiedene Streuenergien:



$\Rightarrow$ ~~~~ je höher die anfängliche Energie E_γ, desto höher ist der Energieübertrag auf das Elektron für alle $\Theta_\gamma > 0$!

$\boxed{A2}$ (a) F.T. von $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ (Gauß-Funktion)

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-(\alpha x^2 + ikx)}$$

$$= \left\{ \begin{aligned} \alpha x^2 + ikx &= \alpha\left(x^2 + \frac{ik}{\alpha} x\right) \\ &= \alpha\left[x^2 + 2\frac{ik}{2\alpha} x + \left(\frac{ik}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{ik}{2\alpha}\right)^2\right] \\ &= \alpha\left[\left(x^{\cancel{2}} + i\frac{k}{2\alpha}\right)^2 + \frac{k^2}{4\alpha^2}\right] \\ &= \alpha\left(x + i\frac{k}{2\alpha}\right)^2 + \frac{k^2}{4\alpha} \end{aligned} \right\}$$

$$= \frac{e^{-k^2/(4\alpha)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha\left(x + i\frac{k}{2\alpha}\right)^2} = \left\{ \begin{aligned} y &:= x\sqrt{\alpha} \\ \frac{dy}{dx} &= \sqrt{\alpha} \end{aligned} \right\}$$

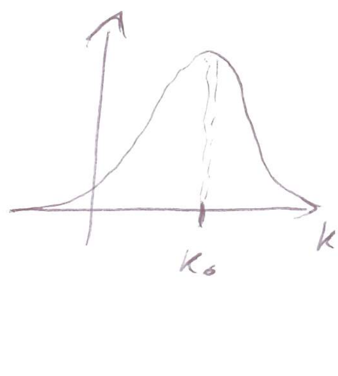
$$= \frac{e^{-k^2/(4\alpha)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{-\left(y + i\frac{k}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2}$$

$$\overset{\text{Hinweis}}{=} \frac{e^{-k^2/(4\alpha)}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}$$

$\Rightarrow$ wieder <u>Gauß-Funktion</u>!

(b)(i) Stationäres Wellenpaket im Impulsraum:

$$g(k) = C \exp\left(-\frac{1}{2a^2}(k-k_0)^2\right)$$



F.T. in den Ortsraum liefert das Gauß'sche Wellenpaket:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, g(k)\, e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \exp\left[-\frac{1}{2a^2}(k-k_0)^2 + ikx - i\frac{\hbar k^2}{2m} t\right] = \left\{ \begin{aligned} u &= k - k_0 \\ \frac{du}{dk} &= 1 \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \, \exp\left[- \frac{u^2}{2a^2} + i(u+k_0)x - i \frac{\hbar (u+k_0)^2 t}{2m} \right]$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \, \exp\left[- \frac{1}{2a^2} u^2 + iux + ik_0 x - i \frac{\hbar t}{2m} u^2 - i \underbrace{\frac{\hbar k_0^2}{2m}}_{\omega_0} t - i \underbrace{\frac{\hbar k_0 t}{m}}_{v_g} u \right]$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} du \, \exp\left[- \frac{1}{2a^2} u^2 - i \frac{\hbar t}{2m} u^2 + iux - i v_g t u + ik_0 x - i\omega_0 t \right]$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} du \, \exp\left[- \left(\frac{1}{2a^2} + i \frac{\hbar t}{2m} \right) u^2 + i(x - v_g t) u \right]$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} du \, \exp\left[- \underbrace{\frac{1 + i \frac{\hbar t a^2}{m}}{2a^2}}_{\equiv s} u^2 + i(x - v_g t) u \right]$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} du \, \exp\left[- s \left(u^2 - i \frac{x - v_g t}{s} u \right) \right]$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} du \, \exp\left[- s \left\{ \left(u - i \frac{x - v_g t}{2s} \right)^2 + \frac{(x - v_g t)^2}{4s^2} \right\} \right]$$

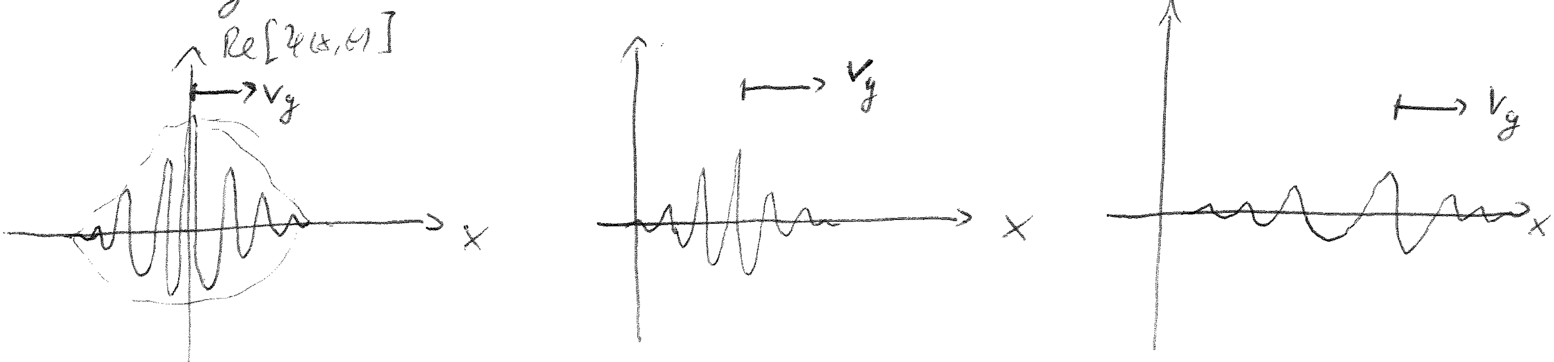
$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} du \, \exp\left[- s \left(u - i \frac{x - v_g t}{2s} \right)^2 - \frac{(x - v_g t)^2}{4s} \right]$$

$$= \frac{C}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t) - \frac{(x - v_g t)^2}{4s}} \int_{-\infty}^{\infty} du \, \exp\left[- s \left(u - i \frac{x - v_g t}{2s} \right)^2 \right]$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} y = u\sqrt{s} \\ \frac{dy}{du} = \sqrt{s} \end{array} \right\} = \frac{C}{\sqrt{2\pi}\sqrt{s}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t) - \frac{(x - v_g t)^2}{4s}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy \, e^{-\left(u - i \frac{x - v_g t}{2s^2}\right)^2}}_{= \sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{C a}{\sqrt{1 + i \frac{\hbar t a^2}{m}}} \exp\left[- \frac{a^2 (x - v_g t)^2}{2\left(1 + i \frac{a^2 \hbar t}{m}\right)} \right] e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$$

Veranschaulichung von $\mathrm{Re}\left[\psi(x,t)\right]$ zeigt physikalische Bedeutung:



$t=0$ $\qquad$ $t'>0$ $\qquad$ $t''>t'$

Wellenpaket bewegt sich mit v_g, Wellen schwingen mit ω_0, Paket "zerläuft"

(ii) Zunächst schreiben wir $\psi(x,t)$ um:

$$\psi(x,t) = \frac{C a}{\sqrt{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}}} e^{i(k_0 x-\omega_0 t)} \exp\left(-\frac{a^2(x-v_g t)^2\cdot\left(1-i\frac{a^2\hbar t}{m}\right)}{2\left(1+\frac{a^4\hbar^2t^2}{m^2}\right)}\right)$$

$$= \frac{C a}{\sqrt{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}}} \exp\left[i\left(k_0 x-\omega_0 t+\frac{\frac{a^4\hbar t}{m}(x-v_g t)^2}{2\left(1+\frac{a^4\hbar^2t^2}{m^2}\right)}\right)\right]$$

$$\cdot \exp\left[-\frac{a^2(x-v_g t)^2}{2\left(1+\frac{a^4\hbar^2t^2}{m^2}\right)}\right]$$

Damit:

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{|C|^2 a^2}{\sqrt{1+\frac{a^4\hbar^2t^2}{m^2}}} \exp\left[-\frac{a^2(x-v_g t)^2}{1+\frac{a^4\hbar^2t^2}{m^2}}\right]$$

Wir integrieren nun über ganz $x\in(-\infty,\infty)$ um C zu bestimmen:

kein Beitrag

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x,t)|^2 = \frac{|c|^2 a^2}{\sqrt{1+\frac{a^4\hbar^2 t^2}{m^2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \exp\left[-\frac{a^2(x - \cancel{v_g t})^2}{1+\frac{a^4\hbar^2 t^2}{m^2}}\right]$$

$$= \left\{ y = \sqrt{\frac{a^2}{1+\frac{a^4\hbar^2 t^2}{m^2}}}\, x \;;\quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a^2}{1+\frac{a^4\hbar^2 t^2}{m^2}}} \right\}$$

$$= |c|^2 a \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2} = |c|^2 a \sqrt{\pi} \stackrel{!}{=} 1$$

Gesamt-Wahrscheinlichkeit

$$\Rightarrow \quad |c| = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}$$

Wähle $c > 0$:

$$c = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}}$$

Prüfe damit $g(k)$:

kein Beitrag

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\, |g(k)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk\, c^2 \exp\left(-\frac{(k - k_0)^2}{2a^2} 2\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk\, c^2 e^{-k^2/a^2} = \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{k}{a} \\ \frac{dy}{dk} = \frac{1}{a} \end{array} \right\}$$

$$= c^2 a \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2} = \sqrt{\pi}\, a\, c^2 = 1 \quad ✓$$

(c) Zunächst $\langle x \rangle$.

nun wichtig!

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi|^2 x = \frac{c^2 a^2}{\sqrt{1+\frac{\hbar^2 a^4 t^2}{m^2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x \exp\left[-\frac{a^2(x - v_g t)^2}{1+\frac{a^4 t^2 \hbar^2}{m^2}}\right]$$

$$= \left| \begin{array}{l} y = x - v_g t \\ \frac{dy}{dx} = 1 \end{array} \right| = \frac{c^2 a^2}{\sqrt{1+\frac{\hbar^2 a^4 t^2}{m^2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, (y + v_g t) \exp\left[-\frac{a^2 y^2}{1+\frac{a^4\hbar^2 t^2}{m^2}}\right]$$

kein Beitrag, da ungerade!

$$= \frac{c^2 a^2 v_g t}{\sqrt{1+\frac{\hbar^2 a^4 t^2}{m^2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left[-\frac{a^2 y^2}{1+\frac{a^4\hbar^2 t^2}{m^2}}\right]$$

$$= c^2 a v_g t \int_{-\infty}^{\infty} dy' \, e^{-y'^2} = v_g t$$

Für $\langle p \rangle$ benötigen wir die Ableitung von $\psi(x,t)$ nach x; hier ist $p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ der Impulsoperator im Ortsraum!

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) = \cancel{\frac{c\,a}{\sqrt{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}}}}\, \psi(x,t)\left[ik_0 - \frac{a^2(x-v_g t)}{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}}\right]$$

$$\Rightarrow \psi^*(x,t)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) = |\psi(x,t)|^2\left[\hbar k_0 + i\,\frac{\hbar a^2(x-v_g t)}{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}}\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x,t)|^2 \left[\hbar k_0 + i\,\frac{\hbar a^2(x-v_g t)}{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}}\right]$$

kein Beitrag

$$= \underbrace{\frac{c^2 a^2}{\sqrt{1+\frac{a^4 t^2\hbar^2}{m^2}}}\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-\frac{a^2(x-v_g t)^2}{1+\frac{a^4\hbar^2 t^2}{m^2}}\right]}_{\text{schon bekannt}} \left[\hbar k_0 + i\,\frac{\hbar a^2 (x-v_g t)}{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}}\right]$$

$$= \ldots = c^2 a\sqrt{\pi}\,\hbar k_0 = \hbar k_0$$

Also:

$$\underbrace{\langle x \rangle = v_g t}_{\text{"Gruppenbewegung"}}, \qquad \underbrace{\langle p \rangle = \hbar k_0}_{\text{Materiewelle}}$$

(d) Es gilt

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 + \langle x \rangle^2 - 2x\langle x \rangle \rangle$$
$$= \langle x^2 \rangle + \langle x \rangle^2 - 2\langle x \rangle^2$$
$$= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

und analog für Δp.

Für $(\Delta x)^2$ benötigen wir $\langle x^2 \rangle$. Dazu ist folgendes Integral nützlich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-ax^2} = \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{a}\,x \\ \frac{du}{dx} = \sqrt{a} \end{array} \right\} = a^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} du\, u^2 e^{-u^2}$$

$$\underbrace{u}_{f(u)} \cdot \underbrace{u e^{-u^2}}_{g'(u)}$$

$$= \frac{a^{-3/2}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} du\, u\, 2u e^{-u^2}$$

$$= \frac{a^{-3/2}}{2} \left\{ \underbrace{-u e^{-u^2} \Big|_{u=-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-u^2} \right\} = \frac{a^{-3/2}\sqrt{\pi}}{2}$$

Damit:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\psi(x,t)|^2 x^2 = \frac{C^2 a^2}{\sqrt{1 + \frac{a^4\hbar^2 t^2}{m^2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 \exp\left[- \frac{a^2 (x - v_g t)^2}{1 + \frac{a^4 \hbar^2 t^2}{m^2}} \right]$$

$$= \frac{C^2 a^2}{\sqrt{1 + \frac{a^4\hbar^2 t^2}{m^2}}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, (y^2 + v_g^2 t^2) \exp\left[- \frac{a^2 y^2}{1 + \frac{a^4 \hbar^2 t^2}{m^2}} \right]$$

$$= C^2 a \cdot \left[v_g^2 t^2 \sqrt{\pi} + \frac{1 + \frac{a^4 \hbar^2 t^2}{m^2}}{2a^2} \sqrt{\pi} \right]$$

$$= v_g^2 t^2 + \frac{1}{2a^2} \left(1 + \frac{a^4 \hbar^2 t^2}{m^2} \right)$$

Also:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\,a} \sqrt{1 + \frac{a^4 \hbar^2 t^2}{m^2}}$$

Für Δp benötigen wir die zweite Ableitung von $\psi(x,t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)\left[ik_0 - \frac{a^2(x-v_g t)}{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}}\right]$$

$$= \psi(x,t)\left[ik_0 - \frac{a^2(x-v_g t)}{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}}\right]^2 + \psi(x,t)\cdot\left[-\frac{a^2}{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}}\right]$$

$$= \psi(x,t)\left[-k_0^2 + \frac{a^4(x-v_g t)^2}{\left(1+i\frac{a^2\hbar t}{m}\right)^2} - 2ik_0\frac{a^2(x-v_g t)}{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}} - \frac{a^2}{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}}\right]$$

Damit:

$$\langle p^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}dx\,\psi^*(x,t)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\psi(x,t)$$

$$= -\hbar^2\int_{-\infty}^{\infty}dx\,|\psi(x,t)|^2\left[-k_0^2 - \frac{a^2}{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}} + \frac{a^4(x-v_g t)^2}{\left(1+i\frac{a^2\hbar t}{m}\right)^2} - \underbrace{2ik_0\frac{a^2(x-v_g t)}{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}}}_{=0}\right]$$

$$= -\hbar^2\left\{\left(-k_0^2 - \frac{a^2}{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}}\right) + \frac{c^2a^2}{\sqrt{1+\frac{\hbar^2a^4t^2}{m^2}}}\,\frac{a^4}{\left(1+i\frac{a^2\hbar t}{m}\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dy\,y^2\exp\left[\frac{-a^2y^2}{1+\frac{a^4\hbar^2t^2}{m^2}}\right]\right\}$$

$$= \hbar^2k_0^2 + \frac{a^2\hbar^2}{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}} - \frac{c^2a^2\hbar^2}{\sqrt{1+\hbar^2\frac{a^4t^2}{m^2}}}\,\frac{a^4}{\left(1+i\frac{a^2\hbar t}{m}\right)^2}\left(\frac{1+\frac{a^4\hbar^2t^2}{m^2}}{a^2}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \hbar^2k_0^2 + \frac{a^2\hbar^2}{1+i\frac{a^2\hbar t}{m}} - \frac{a^2\hbar^2}{2}\,\frac{1+\frac{a^4\hbar^2t^2}{m^2}}{\left(1+i\frac{a^2\hbar t}{m}\right)^2}$$

$$= \hbar^2k_0^2 + \frac{a^2\hbar^2}{2\cancel{\left(1+i\frac{a^2\hbar t}{m}\right)}}\left[2 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\,\frac{\left(1-i\frac{a^2\hbar t}{m}\right)\cancel{\left(1+i\frac{a^2\hbar t}{m}\right)}}{\cancel{\left(1+i\frac{a^2\hbar t}{m}\right)}}\right]$$

$$= \hbar^2k_0^2 + \frac{a^2\hbar^2}{2}$$

Damit haben wir:

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{\hbar^2 k_0^2 + \frac{a^2 \hbar^2}{2} - \hbar^2 k_0^2}$$

$$= \frac{a\hbar}{\sqrt{2}}$$

Also:

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}\, a} \sqrt{1 + \frac{a^4 \hbar^2 t^2}{m^2}},$$

$$\Delta p = \frac{a\hbar}{\sqrt{2}}$$

Hinweis: $\langle p \rangle$ und Δp sind zeitlich konstant
$\Rightarrow$ Impulserhaltung!

(e) $|\psi(x,t)|^2$ hat zeitabhängige Breite Δx. Für $t=0$ haben wir:

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}\, a}, \quad \Delta p = \frac{a\hbar}{\sqrt{2}} \Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2} \neq 0$$

D.h. Ort und Impuls sind nicht gleichzeitig beliebig scharf messbar!

z.B. messe Δp, dann: $\Delta x = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\Delta p} \xrightarrow[\Delta p \to 0]{} \infty$

$\Rightarrow$ Heisenberg'sche Unschärferelation

Für $t > 0$ gilt stets $\Delta x \geq \Delta x(t=0)$, also:

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$$

„besser als $\frac{\hbar}{2}$ wird's nicht"

Makrokosmos: $\hbar$ ist sehr klein! $\Rightarrow$ Quanteneffekte
$\Rightarrow$ QBits

$\Delta x \to \infty \quad (t \to \infty) \Rightarrow$ Wellenpaket zerfließt