8) Ausflug Quanteninformation

a) Spin des Elektrons als Beispiel für Qbit

Erinnerung: Drehimpuls charakterisiert durch $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_3$

Intrinsische Eigenschaft von Teilchen = Spin als Eigendrehimpuls

$$\hat{S}^2 |s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, m_s\rangle$$

$$S_3 |s, m_s\rangle = \hbar m_s |s, m_s\rangle$$

Spin-Statistik-Theorem: Fermionen halbzahliger Spin s
Bosonen ganzzahliger Spin s

Elektron: $s = 1/2$, $m_s = -1/2, 1/2$

Darstellung durch Vektoren und Matrizen:

$$|1\rangle = |\uparrow\rangle = |s = 1/2, m_s = +1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|0\rangle = |\downarrow\rangle = |s = 1/2, m_s = -1/2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Spin-Operator ist $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ mit

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Offenbar gilt dann: $S_3 |\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle$, $S_3 |\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle$

Leiter-Operatoren: $S_+ = S_1 + i S_2 = \frac{\hbar}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right) = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$S_- = S_1 - i S_2 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit: $S_+ |\downarrow\rangle = \hbar |\uparrow\rangle$, $S_- |\uparrow\rangle = \hbar |\downarrow\rangle$

Bit: klassischer Zustand aus 0, 1

Qbit: Überlagerung gemäß $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ mit $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$
(globale Phase aus α entfernt)

Wähle $\alpha = \cos \theta/2$, $\beta = \sin \theta/2 \, e^{i\varphi}$

mit $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi[$

→ Vektor auf der Bloch-Sphäre

(eigentlich höherer Informationsgehalt als Bit!)

b) von Neumann Meßprozeß

Kryptographie:

$$\text{Alice} \xrightarrow{\quad y \quad} \text{Bob}$$

Verschlüsselung z.B. $y = Ax$ — Zugriff / Störung — Entschlüsselung $x = A^{-1} y$

Quantenkryptographie: Abfrage des Zustandes erfordert Meßprozeß!
$\rightarrow$ Änderung des Zustandes !!

Beispiel: Alice präpariert Zustand als Gemisch $|\psi\rangle = \sum_n p_n |\psi_n\rangle$
bezüglich eines VONS $|\psi_n\rangle$

Messung erfolgt mit hermiteschen Operator $\hat{A}$ mit $\hat{A}|\lambda_n\rangle = \lambda_n |\lambda_n\rangle$ (VONS)
$\hookrightarrow \hat{A} = \sum_n \lambda_n |\lambda_n\rangle\langle\lambda_n| = \sum_n \lambda_n \hat{P}_n$

Wahrscheinlichkeit λ_n zu messen:

$$P(\lambda_n) = |\langle\psi|\lambda_n\rangle|^2 = \sum_m p_m \langle\lambda_n|\psi_m\rangle\langle\psi_m|\lambda_n\rangle$$

Definiere Dichteoperator für Anfangszustand:

$$\hat{\varrho} = \sum_m p_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m|$$

$$\rightarrow P(\lambda_n) = \mathrm{Spur}\big(\hat{\varrho}\,\underbrace{|\lambda_n\rangle\langle\lambda_n|}_{\hat{P}_n}\big) = \mathrm{Spur}(\hat{\varrho}\hat{P}_n)$$

Beispiel: Elektron

Dichtematrix in der Basis von S_3/σ_3 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ für $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$:

$$\hat{\varrho}(|\uparrow\rangle) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ 0) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

Dann: $P(+\frac{\hbar}{2}) = \mathrm{Spur}(\hat{\varrho}\cdot\hat{\sigma}_3) = \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Spur}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = +1$

Präpariert man einen Zustand nicht in der Eigenbasis des Meßoperators,
so ist $\hat{\varrho}$ mitunter nicht-diagonal!

Nach der Messung von λ_n wird aus $\hat{\varrho}$ der Zustand $\dfrac{\hat{P}_n\hat{\varrho}\hat{P}_n}{\mathrm{Spur}(\hat{\varrho}\hat{P}_n)}$!

Dazu kommt Zeitentwicklung des Zustandes!

c) Verschränkte Zustände

Beispiel: Zwei Elektronen

Tensorprodukt der beiden Spin Hilbert-Räume

Reiner Zustand: $|\psi\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle_{AB} = |\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B$

~~Gemis~~ Verschränkte Zustand:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle_{AB} - |\downarrow\uparrow\rangle_{AB}\right) \neq \left(\alpha|\uparrow\rangle_A + \beta|\downarrow\rangle_A\right) \otimes \left(\gamma|\uparrow\rangle_B + \delta|\downarrow\rangle_B\right)$$

Zustand nicht als Tensorprodukt darstellbar.
Peres-Horodecki-Kriterium an $\hat{S}$

Singulett-Zustand mit Spin 0

Definiere Meßoperatoren ~~für~~ für A und B:

$S_3^{(A)}|\uparrow\rangle_A = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle_A$, $S_3^{(A)}|\downarrow\rangle_A = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle_A$

genauso für Elektron B.

Im Produktraum: $S_3^A = S_3^{(A)} \otimes 1^{(B)}$, $S_3^B = 1^{(A)} \otimes S_3^{(B)}$

Separiere die beiden verschränkten Elektronen: Alice hat Elektron A, Bob Elektron B.

Dann: Alice misst $+\frac{\hbar}{2}$ $\rightarrow$ $|\psi\rangle$ kollabiert zu $|\uparrow\downarrow\rangle_{AB}$ $\rightarrow$ Bob misst $-\frac{\hbar}{2}$.

$-\frac{\hbar}{2}$ $\qquad$ $|\downarrow\uparrow\rangle_{AB}$ $\qquad$ $+\frac{\hbar}{2}$.

Einstein: „Spukhafte Fernwirkung", Quantenteleportation,
Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon

aber: keine Informationsübertragung möglich

Stichworte: Bell'sche Ungleichung, von Neumann-Entropie
Bell-Zustände als maximal verschränkte Zustände