QCD und Kolliderphysik

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. H. Mantler, Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 1

Ausgabe: Mi, 25.06.2018 – Besprechung: Do, 03.05.2018

Aufgabe 1: $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$

Berechnen Sie den Wirkungsquerschnitt für den Prozess

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \to \mu^-(p_3) + \mu^+(p_4)$$

in führender Ordnung der QED. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Zeichnen Sie das relevante Feynman–Diagramm und bestimmen Sie mit den Feynman–Regeln die invariante Amplitude für den Prozess.

(b) Berechnen Sie das Amplitudenquadrat mit Mittelung über die einlaufenden und Summation über auslaufende Polarisationen. Zeigen Sie, dass

$$\bar{\sum}|M|^2 = \frac{8e^4}{s^2}\left((p_1 \cdot p_3)(p_2 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)\right)$$

in der Näherung $m_e, m_\mu \to 0$,.

(c) Drücken Sie e^2 durch die Feinstrukturkonstante α und die Skalarprodukte der Impulse durch Mandelstamvariablen aus.

(d) Zeigen Sie, dass der Zweiteilchenphasenraum

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \frac{1}{32\pi^2}\mathrm{d}\Omega$$

nach Integration über den Azimutalwinkel durch

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \frac{\mathrm{d}t}{8\pi s}$$

gegeben ist.

(e) Nach Integration über t finden Sie das Endergebnis

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \,.$$

Aufgabe 2: SU(N) Darstellungen

Die Generatoren $t^a = \lambda^a/2$ der *fundamentalen Darstellung* der SU(N) werden durch die λ–Matrizen (*Gell–Mann Matrizen* für den Spezialfall der SU(3)):

$$\lambda^a_{ij}, \qquad a = 1, \ldots, N^2-1, \qquad i,j = 1, \ldots, N \ . \tag{1}$$

Die λ–Matrizen sind durch die Beziehung

$$\mathrm{tr}\left(\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2}\right) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{2}$$

normiert und erfüllen die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{a=1}^{N^2-1}\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij}\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{kl} \equiv \left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{ij}\left(\frac{\lambda^a}{2}\right)_{kl} = \frac{1}{2}\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{2N}\delta_{ij}\delta_{kl} \ . \tag{3}$$

Sie erfüllen die folgenden Vertauschungs– und Antivertauschungsrelationen,

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right] = i f_{abc}\frac{\lambda^c}{2} \ , \tag{4}$$

$$\left\{\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right\} = d_{abc}\frac{\lambda^c}{2} + \frac{1}{N}\delta^{ab} \ , \tag{5}$$

wodurch die total antisymmetrischen SU(N) Strukturkonstranten f_{abc} und die total symmetrischen d_{abc} Symbole definiert sind. Die Vertauschungsrelation (4) ist für jede Darstellung der SU(N) mit Generatoren L^a erfüllt, nicht jedoch (5).

(a) Zeigen Sie für eine beliebige Darstellung der SU(N), dass

$$C_2 = L^a L^a \left(= \sum_{a=1}^{N^2-1} L^a L^a\right)$$

eine Casimir–Invariante ist, d.h. dass $[C_2, L^a] = 0$ für alle Generatoren L^a.

(b) Berechnen Sie den Wert von C_2 für die fundamentale Darstellung (N).

(c) Verwenden Sie (3) um die Summe über a in

$$\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2}\frac{\lambda^a}{2}$$

auszuführen.