QCD und Kolliderphysik

Vorlesung: Prof. Dr. D. Zeppenfeld – Übung: Dr. H. Mantler, Dr. M. Sekulla

Übungsblatt 4

Ausgabe: Mi, 06.06.2018 – Besprechung: Mi, 20.06.2018

Aufgabe 5: Renormierungsschemata

Der QCD Skalenparameter Λ ist durch

$$\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} = -\int_{\alpha_S(Q)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\beta(\alpha)}$$

definiert. Darin ist die β-Funktion durch

$$\beta(\alpha_S) = \mu^2 \frac{\partial \alpha_S}{\partial \mu^2} = -b\alpha_S^2 \left(1 + b'\alpha_S + b''\alpha_S^2 + O(\alpha_S^3)\right)$$

gegeben.

(a) Untersuchen Sie zwei Renormierungsschemata A und B, in denen die Kopplungen durch

$$\alpha_S^B = \alpha_S^A \left(1 + c_1 \alpha_S^A + c_2 (\alpha_S^A)^2 + O((\alpha_S^A)^3)\right)$$

in Beziehung stehen. Zeigen Sie, dass die ersten beiden Koeffizienten der β-Funktion unabhängig vom Renormierungsschema sind und der dritte Koeffizient durch

$$b''_B = b''_A + c_2 - b' c_1 - c_1^2$$

gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Skalenparameter der beiden Schemata durch

$$\Lambda_B = \Lambda_A \exp\left(\frac{c_1}{2b}\right)$$

zusammenhängen.

(c) Das MS- und das $\overline{\text{MS}}$-Schema unterscheiden sich durch die zusätzlich absorbierten Terme $(\ln 4\pi - \gamma)$ im letzteren, $c_1 = b(\ln 4\pi - \gamma)$. Wie groß ist der Unterschied zwischen Λ_{MS} und $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ (numerisch)?

Aufgabe 6: Tensorintegrale

Das elementare Schleifenintegral ist für $f(p) = 1$ gegeben durch

$$I_d(q, a) = \mu^{4-d} \int \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d} \frac{f(p)}{[-p^2 + 2p \cdot q + M^2]^a}$$
$$= \frac{i}{16\pi^2} (4\pi\mu^2)^{\frac{4-d}{2}} \frac{\Gamma(a - \frac{d}{2})}{\Gamma(a)} (q^2 + M^2)^{\frac{d}{2} - a} \ .$$

(a) Berechnen Sie die Schleifenintegrale $I_d^{\mu}(q, a)$ und $I_d^{\mu\nu}(q, a)$, die durch $f(p) = p^{\mu}$ bzw. $f(p) = p^{\mu} p^{\nu}$ im Integranden definiert sind. Differenzieren Sie dazu sukzessive nach q_{μ}.

(b) Die Kontraktion von $I_d^{\mu\nu}(q, a)$ mit dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ in d Dimensionen gibt eine Beziehung zwischen diesen drei Schleifenintegralen. Leiten Sie diese Beziehung her. Verifizieren Sie diese Identität mit Ihren Resultaten aus (a) und bestätigen Sie daraus, dass für die Spur des metrischen Tensors

$$g^{\mu}{}_{\mu} = d$$

gelten muss.